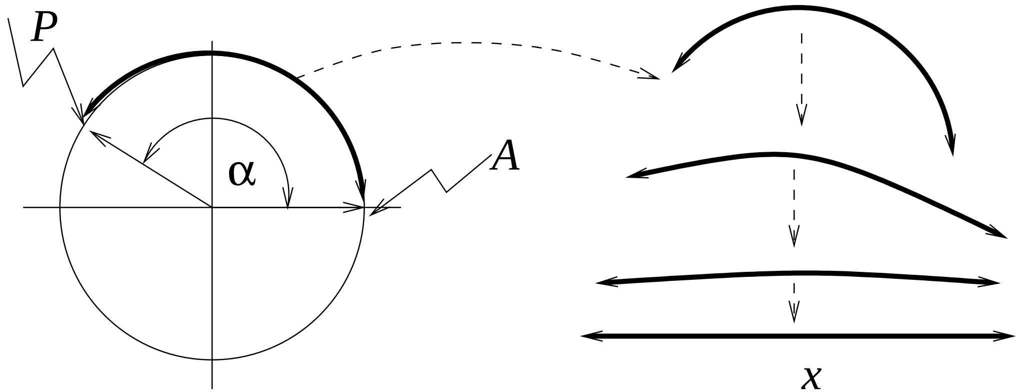
Trigonometría

4 de abril de 2007

Medida de ángulos en radianes

Consideremos la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de la figura.



Ángulo positivo

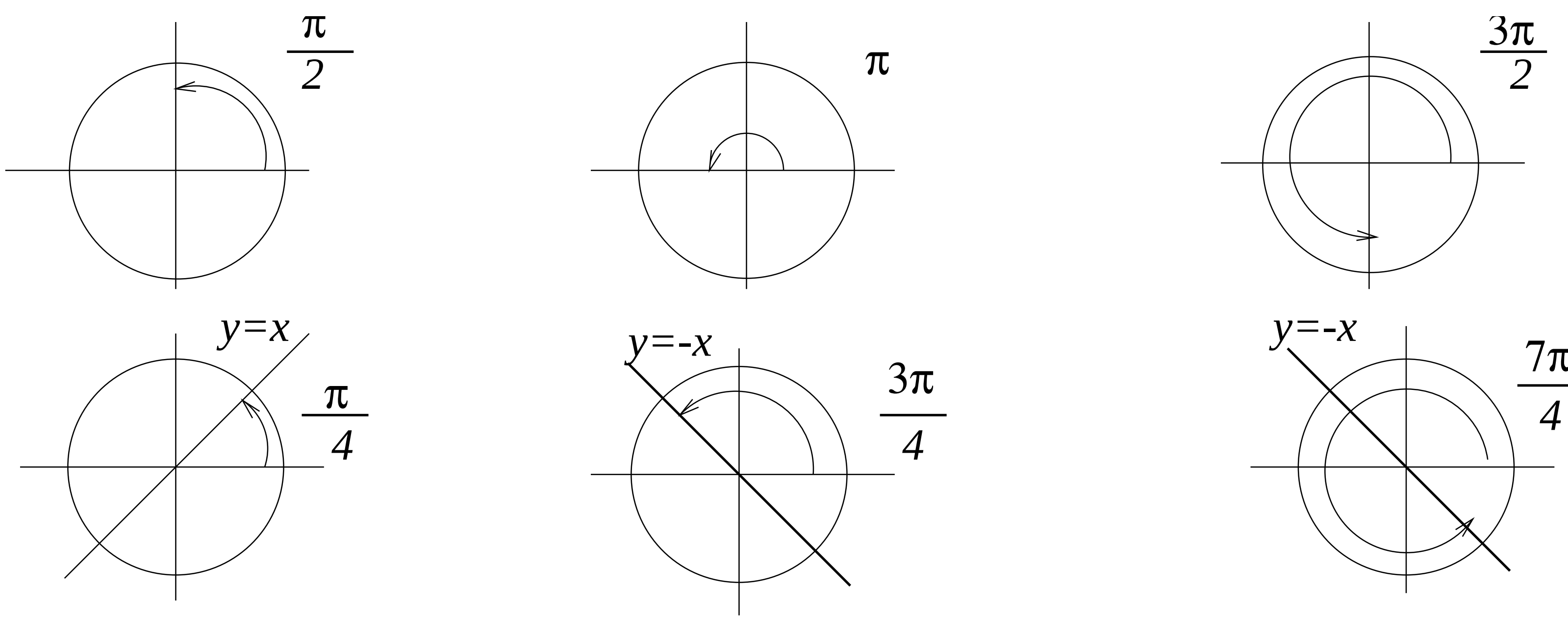
Dado un punto *P* en la circunferencia, llamaremos ángulo positivo *AOP* al ángulo en el que hay que rotar el rayo *OA*, en el sentido contrario de los punteros del reloj, para obtener el rayo *OP*.

La medida de este ángulo EN RADIANES, será el largo del arco de circunferencia que va desde *A* hasta *P*, moviéndose en el sentido contrario a los punteros del reloj.

Diremos que el punto *P* se obtiene de **rotar en el ángulo positivo *AOP* el punto *A*.**

Medida de ángulos en radianes

Algunos ángulos positivos:



Medida de ángulos en radianes

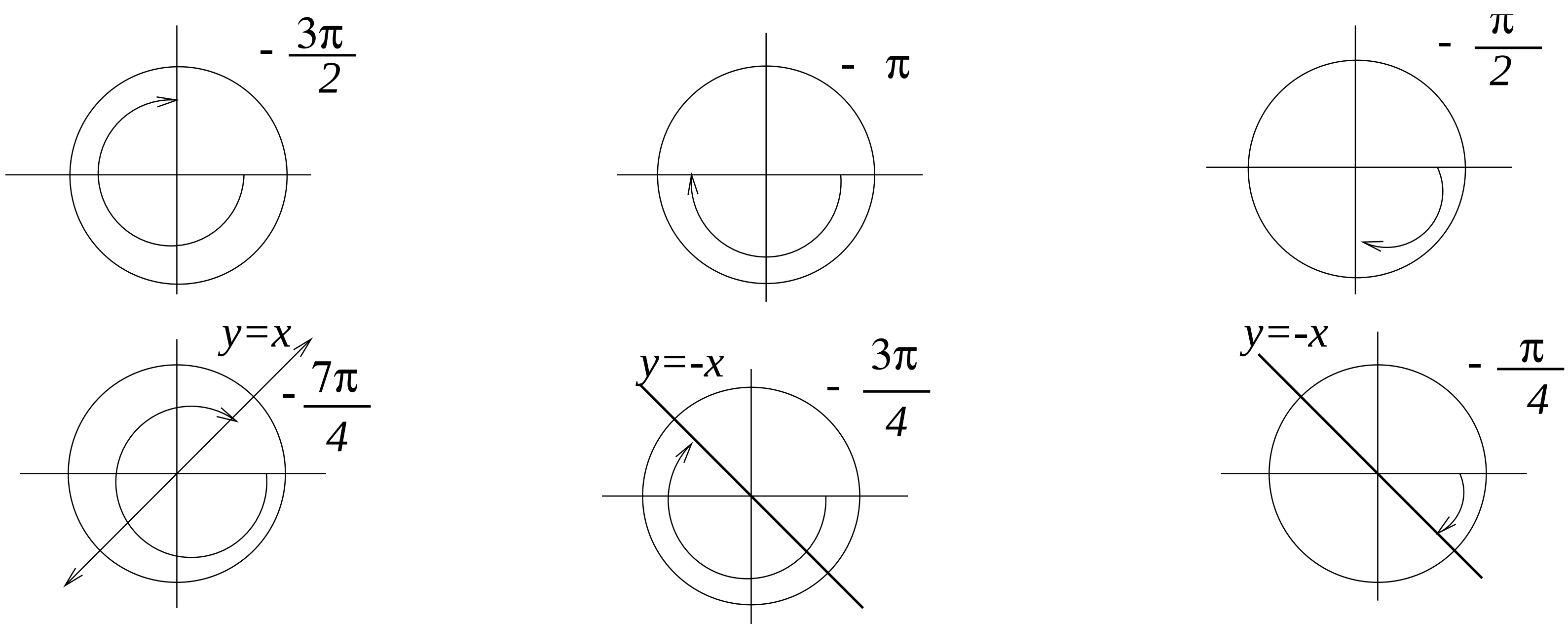
Ángulo negativo

Llamaremos **ángulo negativo** *AOP* al ángulo en el que hay que rotar el rayo *OA*, en el sentido de los punteros del reloj, para obtener el rayo *OP*.

La medida de esta ángulo EN RADIANES, será el inverso aditivo del largo del arco de circunferencia que va desde *A* hasta *P* moviéndose en el sentido de los punteros del reloj.

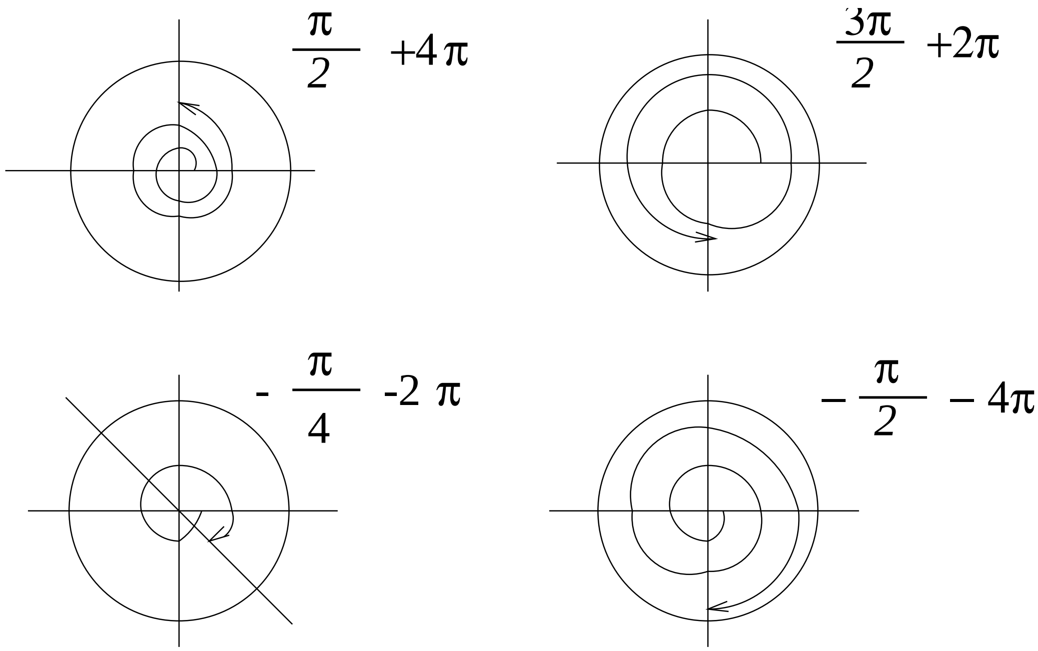
Diremos que el punto *P* se obtiene de rotar en el ángulo negativo *AOP* el punto *A*. Llamaremos 2π el largo de la circunferencia de radio 1.

Algunos ángulos negativos:



Medida de ángulos en radianes

- Cuando un ángulo da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en el sentido contrario de los punteros del reloj y luego gira un ángulo positivo *AOP* su medida en radianes es $2k\pi + x$, donde x es la medida del ángulo positivo *AOP*.
- Del mismo modo un ángulo que da $k \in \mathbb{N}$ vueltas en el sentido de los punteros del reloj y luego gira un ángulo negativo *AOP*, tiene como medida $-2k\pi + x$, donde x es la medida del ángulo negativo *AOP* (ver Figura).



En general, si la medida en radianes x, de un ángulo es positiva se entenderá que el ángulo se obtiene al dar vueltas en el **sentido contrario** a los punteros del reloj y si x es negativo como dar vueltas **en el sentido** de los punteros del reloj.

Esta forma de medir ángulos establece una biyección entre ángulos y números reales.

Funciones trigonométricas

Una biyección entre ángulos y reales (no es la única)

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea P_x el punto de la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 1, que se obtiene al girar un ángulo cuya medida en radianes es x , partiendo desde el punto $(1,0)$. Entonces si $x > 0$ estaremos rotando en el sentido contrario a los punteros del reloj y si $x < 0$ lo estaremos haciendo en el sentido de los punteros del reloj.

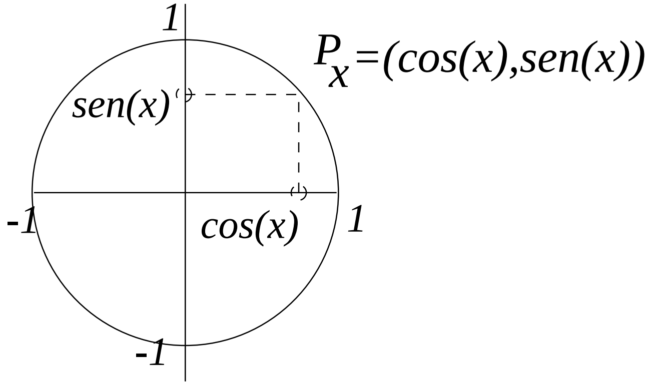
Usando P_x definiremos las funciones trigonométricas.

Función coseno

Definimos la función COSENO ($\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) como aquella que a cada x le asocia la abscisa del punto P_x.

Función seno

La función SENO ($\text{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) queda definida como aquella que a cada x asocia la ordenada del punto P_x.



Funciones trigonométricas: Características

De la definición de las funciones seno y coseno se deduce que ellas satisfacen la así llamada Identidad Trigonométrica Fundamental:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Las siguientes aseveraciones acerca de las funciones trigonométricas pueden justificarse fácilmente y quedan como ejercicio.

Función coseno

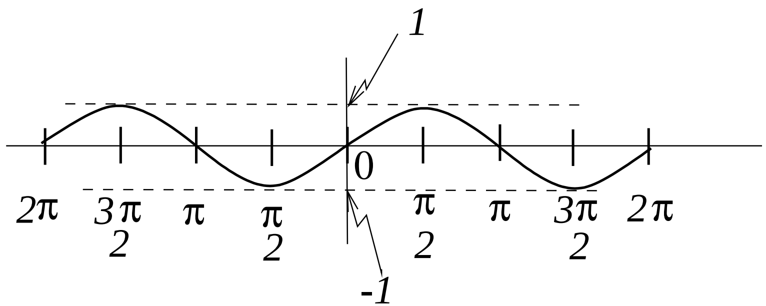
La función es periódica de periodo 2π.
Es una función par. Por lo tanto bastará con conocerla en $I = [0, \pi]$ para tener su comportamiento global.
Tiene un cero en $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que $\cos^{-1}(\{0\}) = \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
En $[0, \frac{\pi}{2}]$ es positiva y es negativa en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Decrece en $[0, \pi]$.

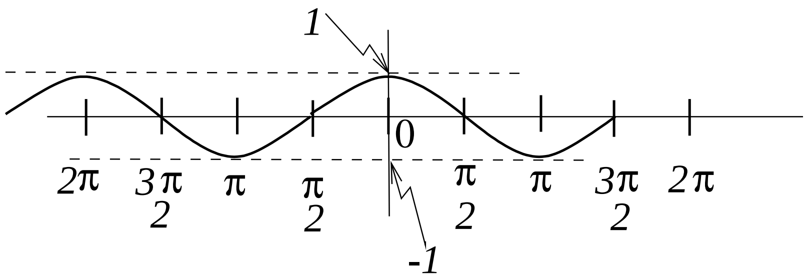
Función seno

La función es periódica de periodo 2π.
Es una función impar. Por lo tanto bastará con conocerla en $I = [0, \pi]$ para tener su comportamiento global.
Tiene un cero en $x = 0$ y otro en $x = \pi$.
Luego $\operatorname{sen}^{-1}(\{0\}) = \{x = k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
En I es siempre positiva.
Crece en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decrece en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Funciones trigonométricas: Características

Veamos en el gráfico de dichas funciones (seno y coseno respectivamente), las propiedades anteriores.





Funciones trigonométricas: Tangente

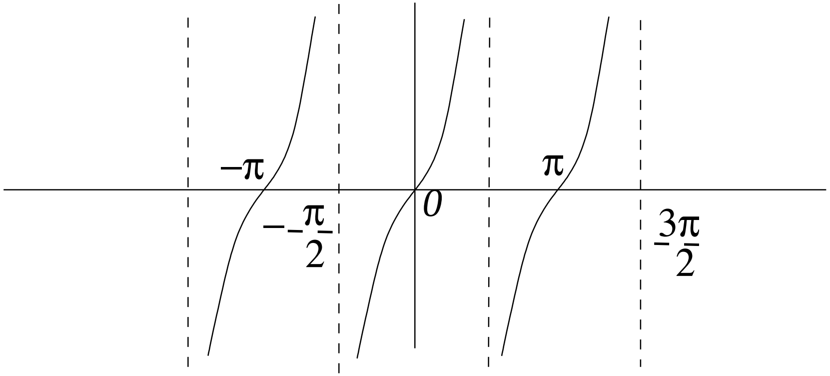
Otra función importante es:

Función tangente

Se define la función tangente por $\tan : A \to \mathbb{R}$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} \cos(x) \neq 0\}$ que a x asocia $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Algunas propiedades:

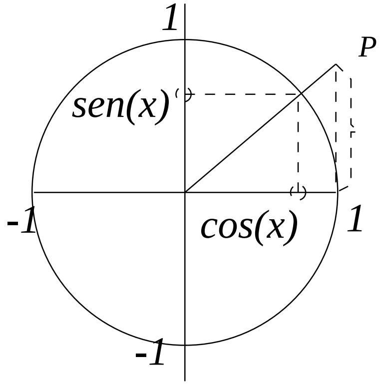
- La función tan es periódica de periodo π.
- Sus ceros son los ceros de la función sen.
- Es una función impar.
- Es positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Es estrictamente creciente en cada intervalo de la forma $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.



Funciones trigonométricas: Tangente

Observación

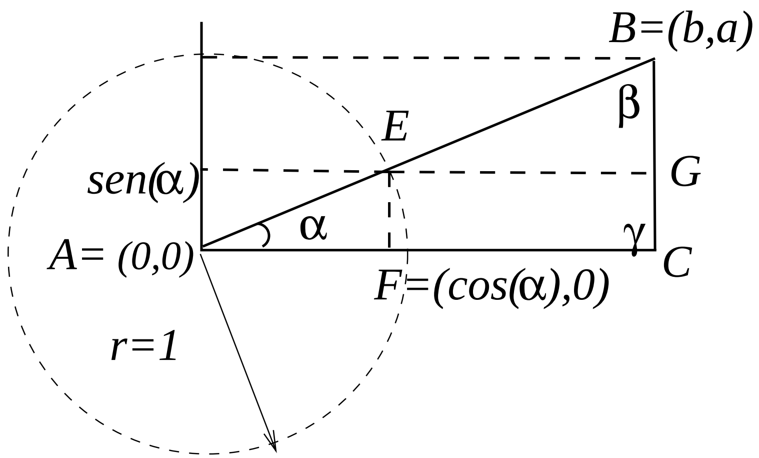
La cantidad $\tan(x)$ corresponde a la pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto P_x asociado, como vemos en la figura:



tg(x): pendiente de la recta por O y P.

Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Consideremos un triángulo rectángulo de vértices A, B y C (el vértice A en el origen y rectángulo en C), de lados a, b y c, opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, y ángulos interiores α, β y γ como el de la figura:



Se tiene que

Teorema

En un triángulo rectángulo se satisface que

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \ \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} \text{ y } \tan(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Demostración.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es $\frac{a}{b}$. En el triángulo AEF el lado AE es de tamaño 1, de modo que $\overline{AF} = \cos(\alpha)$ y $\overline{EF} = \operatorname{sen}(\alpha)$. Por lo tanto, $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$.

Entonces, el triángulo EBG tiene sus lados iguales a $\overline{EB} = c - 1$, $\overline{EG} = b - \cos(\alpha)$ y $\overline{BG} = a - \operatorname{sen}(\alpha)$. Por lo tanto,

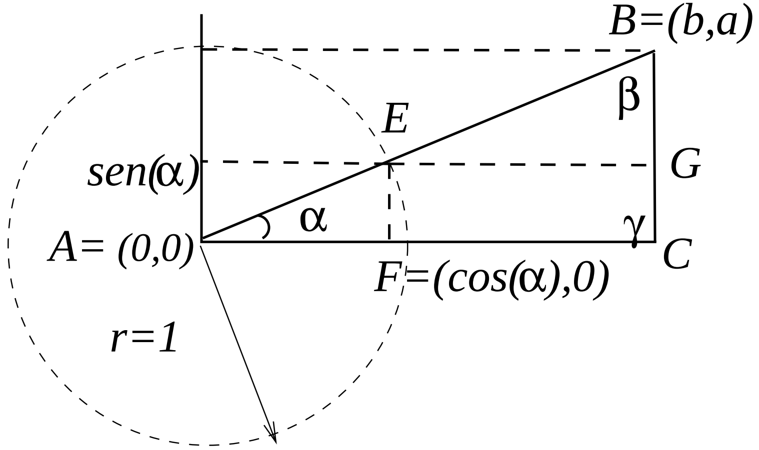
$$(a - \operatorname{sen}(\alpha))^2 + (b - \cos(\alpha))^2 = (c - 1)^2.$$

Desarrollando los cuadrados, aplicando que $a^2 + b^2 = c^2$ y que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, se obtiene que

$$-2\operatorname{sen}(\alpha)\, a - 2\cos(\alpha)\, b = -2c.$$

Sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{a}\cos(\alpha)$. Reemplazando esto en la ecuación anterior, podemos despejar $\cos(\alpha)$. Luego, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\operatorname{sen}(x) = \frac{a}{c}$ y $\tan(x) = \frac{a}{b}$.

□



Funciones recíprocas

Además se definen las funciones cotangente, secante y cosecante por:

Funciones recíprocas

Se definen:

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \csc x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Algunas propiedades:

Propiedades

- Si $\cos x \neq 0$, entonces $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$. Esto se obtiene al dividir la identidad anterior por $\cos^2 x$.
- Si $\operatorname{sen} x \neq 0$, entonces $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cotan}^2 x$. Esto se obtiene al dividir la identidad fundamental por $\operatorname{sen}^2 x$.

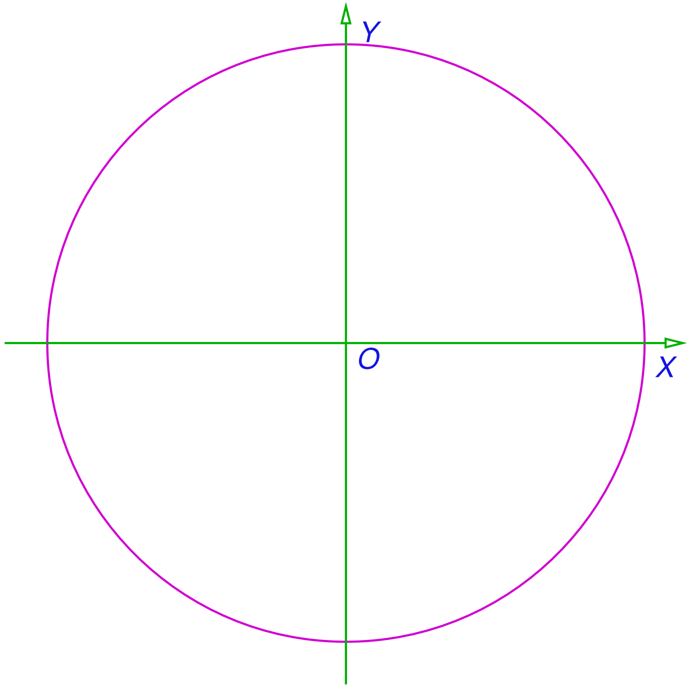
Propiedades

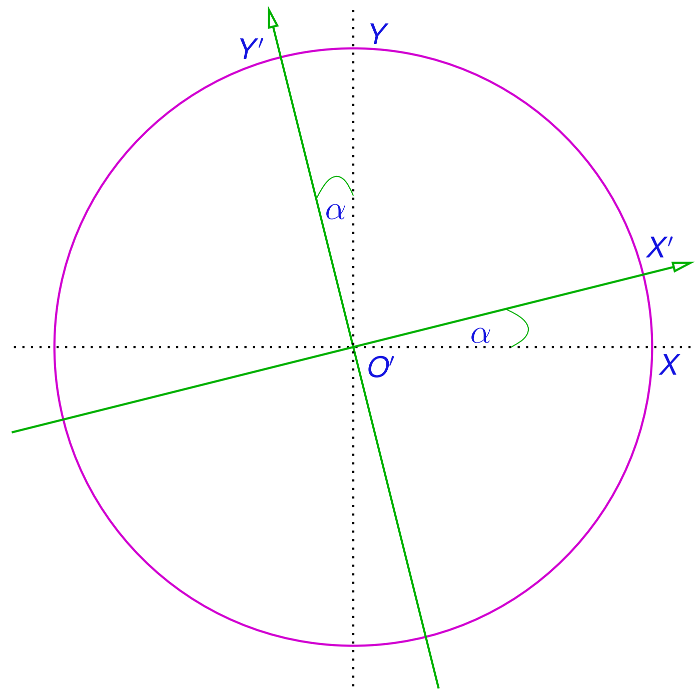
Inscribiendo apropiadamente triángulos rectángulos isosceles o equilateros en el círculo unitario se puede obtener la siguiente tabla de valores:

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x
0	0	1	0	-	1	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	1	$-$	1
π	0	-1	0	$-$	-1	$-$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-$	0	$-$	-1

Independencia de sistemas de coordenadas

Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano. El primero $\{OXY\}$ es típico, donde el eje OX es horizontal y el eje OY es vértical. El segundo $\{O'X'Y'\}$ tiene origen en $O' = O$ y los ejes $O'X'$ y $O'Y'$ forman un ángulo α con respecto a los ejes OX y OY respectivamente. Se dice que $\{O'X'Y'\}$ corresponde a una rotación del sistema $\{OXY\}$ en un ángulo α.





Independencia de sistemas de coordenadas

Tracemos una circunferencia unitaria $\odot$ con centro en O y consideremos dos puntos P y Q en $\odot$ de modo tal que $\angle POX = \alpha$ y $\angle QOX = \beta$.

Con esto calculemos la distancia PQ en ambos sistemas:

En el sistema OXY

$$P = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$

$$Q = (\cos\beta, \text{sen}\beta).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= [\cos\beta - \cos\alpha]^2 + [\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha]^2 \\
&= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha \\
&+ \text{sen}^2\beta - 2\text{sen}\beta\text{sen}\alpha + \text{sen}^2\alpha \\
&= 2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\text{sen}\beta\text{sen}\alpha.
\end{aligned}$$

Independencia de sistemas de coordenadas

En el sistema O'X'Y'

$P = (1, 0)$

$Q = (\cos(\beta - \alpha), \text{sen}(\beta - \alpha))$.

Luego:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= [1 - \cos(\beta - \alpha)]^2 + [0 - \text{sen}(\beta - \alpha)]^2 \\ &= 1 - 2\cos(\beta - \alpha) + \cos^2(\beta - \alpha) + \text{sen}^2(\beta - \alpha) \\ &= 2 - 2\cos(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Como la distancia PQ es independiente del sistema de coordenadas utilizado, podemos escribir que:

$$2 - 2\cos\beta\cos\alpha - 2\text{sen}\beta\text{sen}\alpha = 2 - 2\cos(\beta - \alpha)$$

de donde se deduce que:

Diferencia de ángulos en coseno

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\beta\text{sen}\alpha.$$

Esta fórmula contiene una tremenda cantidad de información. Dependiendo de los ángulo α y β vamos a obtener una variada cantidad de identidades trigonométricas que luego ocuparemos para complementar nuestra demostración en curso.

Propiedades importantes

La ecuación anterior no arroja una gran cantidad de información que veremos a continuación.

Diferencia de ángulos en coseno

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha.$$

- Evaluando en $\beta=0$ obtenemos $\cos(-\alpha)=\cos 0\cos\alpha+\operatorname{sen}0\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha$, es decir $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, lo que significa que la función cos es *par.*
- Evaluando $\alpha=\pi/2$ obtenemos $\cos(\beta-\pi/2)=\cos\beta\cos\pi/2+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\pi/2=\operatorname{sen}\beta$, es decir:

$$\cos(\beta-\pi/2) = \operatorname{sen}\beta.$$

- Llamemos $\gamma=\beta+\pi/2$. Ocupando lo anterior, $\cos(\beta-\pi/2)=\operatorname{sen}\beta$ y evaluando β por γ tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\gamma-\pi/2) &= \operatorname{sen}\gamma\\ \cos\beta &= \operatorname{sen}(\beta+\pi/2).\end{aligned}$$

- Evaluemos ahora en $\alpha=-\pi/2$. Con esto obtenemos $\cos(\beta+\pi/2)=\cos(\beta-(-\pi/2))=\cos\beta\cos(-\pi/2)+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(-\pi/2)=-\operatorname{sen}\beta$, es decir:

$$\cos(\beta+\pi/2) = -\operatorname{sen}\beta.$$

Propiedades importantes

- Como $\cos(\beta+\pi/2) = -\sin\beta$, llamamos $\gamma = \beta - \pi/2$ y reemplazando β por γ , tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma+\pi/2) &= -\text{sen}\gamma \\ \cos\beta &= -\text{sen}(\beta-\pi/2) \\ -\cos\beta &= \text{sen}(\beta-\pi/2). \end{aligned}$$

- Ahora veamos un pequeño truco, analizemos la paridad de sen.

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= \sin(-\alpha+\pi/2-\pi/2) \\ &= \sin((-\alpha+\pi/2)-\pi/2) \text{ Usando la propiedad recién vista} \\ &= -\cos(-\alpha+\pi/2) \text{ Por paridad de cos tenemos} \\ &= -\cos(\alpha-\pi/2) \text{ Por la segunda propiedad nos queda} \\ &= -\sin\alpha \\ & \quad \text{En consecuencia, sin es impar.} \end{aligned}$$

- La función tan, al ser el cuociente entre una función par y otra impar, es fácil ver que esta es impar:

$$\begin{aligned} \tan(-\alpha) &= \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} \\ &= -\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \\ &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

Suma y resta de ángulos

Regresando a nuestra demostración anterior, sabemos que $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\mathrm{sen}\beta\mathrm{sen}\alpha$

Además poniendo $-\alpha$ en lugar de α se obtiene:

Suma de ángulos en coseno

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\mathrm{sen}\beta\mathrm{sen}\alpha$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\beta+\alpha) &= \cos(\pi/2-(\beta+\alpha))\\ &= \cos((\pi/2-\beta)-\alpha)\\ &= \cos(\pi/2-\beta)\cos\alpha+\mathrm{sen}(\pi/2-\beta)\mathrm{sen}\alpha\\ &= \mathrm{sen}\beta\cos\alpha+\cos\beta\mathrm{sen}\alpha\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos:

Suma de ángulos en seno

$$\mathrm{sen}(\beta+\alpha)=\mathrm{sen}\beta\cos\alpha+\cos\beta\mathrm{sen}\alpha$$

Suma y resta de ángulos

Finalmente poniendo $-\alpha$ en lugar de α se obtiene:

Diferencia de ángulos en seno

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Regla de los cuadrantes

Ahora que sabemos calcular sen$(\alpha \pm \beta)$ y cos$(\alpha \pm \beta)$, veamos que sucede cuando se le otorga el valor de 2π a uno de estos angulos. Sabemos que sen$(2\pi) = 0$ y que cos$(2\pi) = 1$, por lo tanto:

- $\text{sen}(2\pi + \alpha) = \text{sen}\alpha$
  $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$
- $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\alpha$
  $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

Ya vimos que sucede cuando uno de los ángulos es 2π, lo que significa dar una vuelta completa. Ahora analizaremos que sucede cuando deseamos un cambio de cuadrante, es decir, sumarle π o bien $\pi/2$, por lo tanto:

1. $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\alpha$
   $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
2. $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$
   $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
3. $\cos(\pi/2 - \alpha) = \text{sen}\alpha$
   $\text{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$
4. $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\text{sen}\alpha$
   $\text{sen}(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$

Identidades útiles

Otras identidades bastante útiles se desprenden directamente de la suma y resta de angulos en las funciones sen y cos y son las siguientes:

Identidades

1. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
2. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
3. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$
4. $$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$
5. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
   $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
6. $|\operatorname{sen}\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$
   $|\cos\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$
7. $|\tan\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
   $\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}}{1+\cos x}$
   $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Regla final

Definimos la *co-función* de una función trigonométrica de la siguiente manera:

Co-función

- $f = \text{sen} \Rightarrow cof = \cos$.
- $f = \cos \Rightarrow cof = \text{sen}$.
- $f = \tan \Rightarrow cof = \cot$.
- $f = \cot \Rightarrow cof = \tan$.
- $f = \sec \Rightarrow cof = \csc$.
- $f = \csc \Rightarrow cof = \sec$.

Ahora, cada vez que se desee calcular una función Trigonométrica en un ángulo α de la forma $\alpha = \Omega \pm \varphi$ donde $\Omega = \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \pm 2\pi, \pm(2\pi + \pi/2), \ldots$, es decir, ángulos que representan a puntos sobre los ejes, se obtiene lo siguiente:

$$f(\Omega \pm \varphi) = \begin{cases} s \cdot \varphi & \text{si } \Omega \text{ representa a un punto ubicado en el eje de las } X. \\ s \cdot cof(\varphi) & \text{si } \Omega \text{ representa a un punto ubicado en el eje de las } Y. \end{cases}$$

Donde s representa el signo que debe anteponerse, el cual se obtiene graficando el ángulo $\Omega \pm \varphi$suponiendo que φ esta entre 0 y $\pi/2$, y mirando en el círculo trigonométrico el signo de la función f correspondiente al cuadrante.

Ejemplo

$\tan(-5\pi/2 + \pi/6) = -\cot(\pi/6)$
$\sec(3\pi - \alpha) = -\sec(\alpha)$