Secciones Cónicas

22 de marzo de 2007

Definición de cónicas

Cónica

Sean D y F una recta y un punto del plano tales que $F \notin D$. Sea e un número positivo.
Una cónica es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que su distancia a F es e-veces su distancia a la recta D. Es decir:

$$P \in \text{Cónica} \iff d(P,F) = e \cdot d(P,D), \qquad e > 0$$

- F es llamado **foco** de la cónica.
- D es llamada **directriz** de la cónica (veremos sólo el caso en que es vertical u horizontal).
- e es llamada **excentricidad** de la cónica.

Además

- Si $e < 1$ la cónica se llamará **Elipse**.
- Si $e = 1$ la cónica se llamará **Parábola**.
- Si $e > 1$ la cónica se llamará **Hipérbola**.

Ecuación de la parábola

Una **parábola** corresponde al caso $e = 1$.

Para escribir su ecuación consideraremos que el foco está en la ubicación $F = (0, p)$ donde $p \neq 0$ y que la directriz D es la recta horizontal de ecuación $y = -p$. Con esto, el origen es un punto de la parábola ya que dista una distancia $|p|$ tanto de F como de D. Para escribir la ecuación de la parábola consideremos un punto $P = (x, y)$ cualquiera del plano e impongamos que su distancia a F y a D sean iguales:

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \text{Parábola} \quad &\iff \quad PF = PD \\
&\iff \quad \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\
&\iff \quad x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\
&\iff \quad x^2 = 4py \\
&\iff \quad y = \frac{1}{4p}x^2.
\end{aligned}$$

Gráfico de la parábola

Consideremos el caso $p > 0$. Entonces podemos apreciar lo siguiente:

1. El punto $(0, 0)$ evidentemente satisface la ecuación de la parábola, luego la parábola pasa por el origen, como ya lo habíamos observado anteriormente.
2. Como $x^2 \geq 0$ y $p > 0$ entonces, todos los puntos de la parábola deben tener ordenada no negativa ($y \geq 0$), es decir, el gráfico de la parábola debe estar contenido en el primer y segundo cuadrante, además del origen.
3. Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, como $(-x)^2 = x^2$, se concluye que el punto $P' = (-x, y)$ también satisface la ecuación de la parábola, o sea, pertenece a ella. Notemos que P' es el punto simétrico de P con respecto al eje OY.
   En consecuencia, la parábola es una curva simétrica con respecto al eje OY.
   La intersección entre la parábola y el eje de simetría se llama vértice de la parábola. En este caso el vértice es el origen $(0, 0)$.
4. En el primer cuadrante podemos calcular los valores de y obtenidos para diferentes valores de x. Si se consideran valores cada vez mayores de x, se obtienen valores cada vez mayores de y, por lo tanto la parábola es una curva creciente en este cuadrante.

Gráfico de la parábola

Por todo lo anterior el gráfico será:

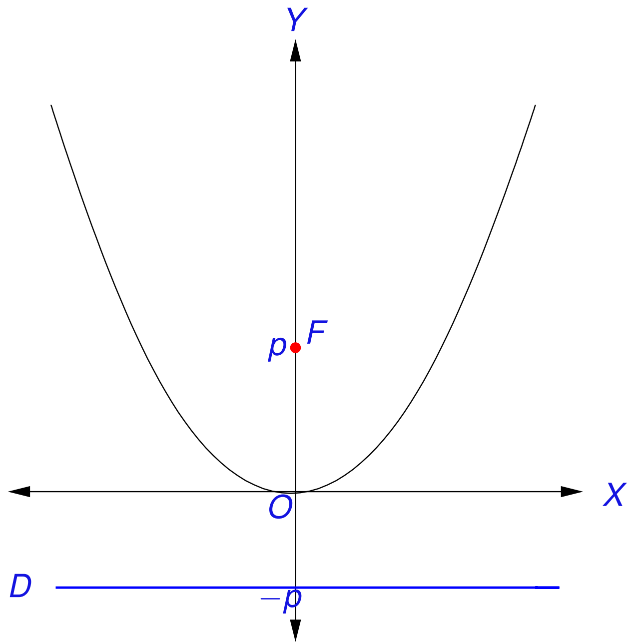


Figura: Gráfico de la parábola.

Observaciones:

1. El gráfico en el caso $p < 0$ es análogo al anterior, pero abierto hacia abajo.
2. Si escribiéramos la ecuación de la parábola en el caso de directriz vertical $x = -p$ y foco $F = (p, 0)$, repitiendo el mismo proceso anterior, la ecuación de la parábola quedaría $y^2 = 4px$, la cual corresponde a una parábola de eje horizontal abierta hacia la derecha si $p > 0$ o abierta hacia la izquierda si $p < 0$.

Cambio de coordenadas mediante traslación paralela de ejes

Sean $S = \{OXY\}$ y $S' = \{O'X'Y'\}$ dos sistemas de coordenadas de tal modo que los ejes OX y $O'X'$ son paralelos y tienen el mismo sentido, lo mismo que los ejes OY y $O'Y'$. El origen O' tiene coordenadas (x_0, y_0) en S como muestra la figura. En este caso diremos que el sistema S' es una traslación paralela del sistema S.

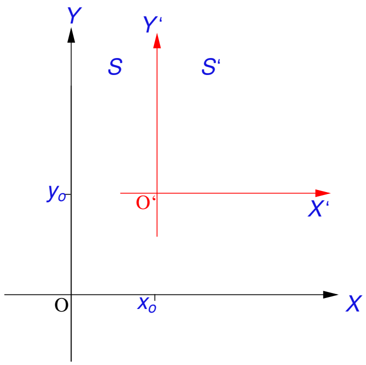


Figura: Traslación de sistema de coordenadas.

Un punto P del plano tendrá coordenadas (x, y) con respecto a S y coordenadas (x', y') con respecto a S'.

De un esquema sencillo puede apreciarse que:

$$\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array}$$

Cambio de coordenadas mediante traslación paralela de ejes

De este modo, cada vez que en la ecuación de un lugar geométrico aparezcan las expresiones $x - x_0$ o $y - y_0$, estas pueden interpretarse como las coordenadas x' e y' de los mismos puntos respecto a un sistema trasladado cuyo origen esta en (x_0, y_0).

Ejemplos

1. $\mathcal{L} : y = mx$ es una recta de pendiente m que pasa por el origen y $\mathcal{L}' : (y - y_0) = m(x - x_0)$ es una recta de la misma pendiente que pasa por el punto (x_0, y_0), es decir esta recta pasa por el origen un sistema trasladado al punto (x_0, y_0).
2. $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ es una circunferencia de radio r centrada en el origen y $\mathcal{C}' : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$ también corresponde a una circunferencia de radio r pero centrada en (x_0, y_0).
3. $\mathcal{P} : y = \frac{1}{4p}x^2$ es una parábola de eje vertical con vértice en el origen y $\mathcal{P}' : y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$ es otra parábola de eje vertical con vértice en el punto (x_0, y_0). En el último caso, el foco de la parábola tiene coordenadas $(x_0, y_0 + p)$ y la directriz tiene ecuación $y = y_0 - p$. Es decir, las posiciones de estos objetos son las mismas de la parábola original, pero trasladadas x_0 e y_0 en los sentidos horizontal y vertical respectivamente.

Parábola general

Teorema

La ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ representa una parábola de eje vertical con directriz $D : y = \frac{-1-\triangle}{4a}$, foco $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{1-\triangle}{4a})$ y vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a})$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$.

Demostración.

Efectivamente, la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ puede ordenarse completando cuadrados perfectos del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c \quad &\Longleftrightarrow \quad y = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad y = a[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] \\
&\Longleftrightarrow \quad y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&\Longleftrightarrow \quad (y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (y - y_0) = a(x - x_0)^2, \quad \text{donde } x_0 = -\frac{b}{2a}, \ y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.
\end{aligned}$$

Continúa... $\square$

Parábola general

Continuación demostración.

Es decir, se trata de una parábola de eje vertical, con vértice desplazado a la posición (x_0, y_0). Como ya vimos anteriormente,$p = \frac{1}{4a}$ y por lo tanto el foco será

$$\begin{aligned} F &= (x_0, y_0 + p) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a} + \frac{1}{4a}\right) \\ &= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\triangle}{4a}\right). \end{aligned}$$

Para la directriz tendremos

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{1}{4a} \\ &= -\frac{\triangle}{4a} - \frac{1}{4a} \\ &= -\frac{1+\triangle}{4a}. \end{aligned}$$

Claramente las coordenadas del vértice serán $V = (x_0, y_0) = (-\frac{-b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a})$, donde $\triangle = b^2 - 4ac$. □

Ecuación de la elipse

La **elipse** corresponde al caso $e < 1$.

Para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la elipse es

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \text{Elipse} &\iff PF = ePD \\ &\iff \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x - d|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\ &\iff x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right) \\ &\iff x^2(1 - e^2) + 2x(e^2 d - f) + y^2 = e^2 d^2 - f^2. \end{aligned}$$

Como la elección del foco y la directriz se ha realizado para que la ecuación sea simple, impondremos que $f = e^2 d$, con esto eliminamos el factor de primer grado en la ecuación y nos ahorramos una completación de cuadrado perfecto. Con esto, la ecuación de la elipse se reduce a

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = e^2 d^2(1 - e^2).$$

Ecuación de la elipse

En la última expresión podemos dividir por $e^2d^2(1-e^2)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2d^2}+\frac{y^2}{e^2d^2(1-e^2)}=1.$$

Si en esta ecuación llamamos $a=ed$ y $b=ed\sqrt{1-e^2}$, entonces tendremos:

Ecuación general de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Donde

$$f=e^2d=ae$$

y

$$d=\frac{a}{e}.$$

Además

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Ecuación de la elipse

En consecuencia:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con } a>b.$$

corresponde siempre a una elipse con:

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
Foco: $F=(ae,0)$
Directriz: $D: x=\frac{a}{e}$

Gráfico de la elipse

1. Dado que en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2 = y^2$ y además $(-x)^2 = x^2$, luego los puntos $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.
   Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.
2. En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo
   $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$
   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \leq a$, luego el gráfico de la elipse debe hacerse sólo en la zona entre $x = 0$ y $x = a$ (del primer cuadrante).
3. También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo
   $$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$
   De aquí vemos que y debe estar comprendido entre $y = 0$ e $y = b$.
4. Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que
   $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$
   Partiendo en $x = 0$ se obtiene $y = b$. Si x crece de 0 hasta a se ve que y decrece de b hasta 0. Al final, cuando $x = a$ se obtiene $y = 0$.

Gráfico de la elipse

Luego el grafico será:

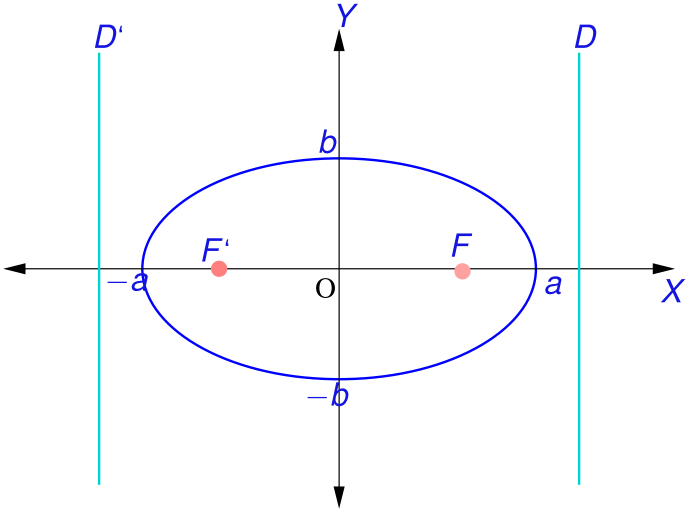


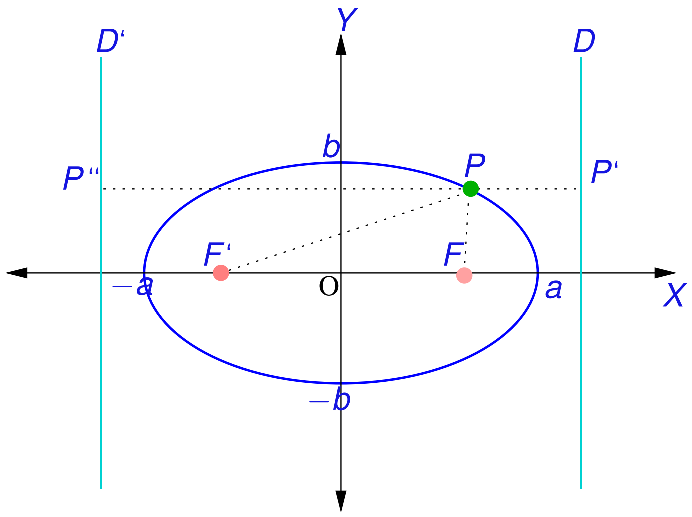
Figura: Gráfico de la elipse.

Observación

Por la simetría del gráfico, se aprecia facilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\frac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la elipse. Por lo tanto la elipse tiene dos focos y dos directrices.

Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Entonces es claro que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''.$$

Luego

$$PF+PF' = e(PP'+PP'') = eP'P'' = e\frac{2a}{e} = 2a.$$

es decir

$$PF + PF' = 2a.$$

Observaciones

1. Si $a < b$ entonces la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ corresponde a una elipse donde se han intercambiado los roles de x e y y los roles de a y b, de modo que $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, $F = (0, be)$, $F' = (0, -be)$, $D : y = \frac{b}{e}$ y $D' : y = -\frac{b}{e}$.
2. En consecuencia la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \neq b$ representa siempre a una elipse de semiejes a y b, que es horizontal si $a > b$ o vertical si $a < b$.
3. Si $a = b$ entonces la ecuación corresponde a una circunferencia de radio a y no a una elipse.

Ecuación de la hipérbola

La **hipérbola** corresponde al caso $e > 1$.

Nuevamente, para escribir su ecuación en forma simple, conviene ubicar el foco sobre el eje OX en las coordenadas $F = (f, 0)$, y la directriz vertical de ecuación $x = d$, donde $f \neq d$. Con esta elección, la ecuación de la hipérbola es

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \text{Hipérbola} &\iff PF = ePD \\
&\iff \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = e|x-d|; \qquad \text{elevando al cuadrado,} \\
&\iff x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2dx + d^2\right) \\
&\iff -x^2(e^2-1) + 2x(e^2d - f) + y^2 = e^2d^2 - f^2.
\end{aligned}$$

En este caso también eligiremos $f = e^2d$ para evitarnos una completación de cuadrados.

Con esto la ecuación de la hipérbola será:

$$-x^2(e^2-1) + y^2 = -e^2d^2(e^2-1).$$

Ecuación de la hipérbola

En la última expresión podemos dividir por $-e^2d^2(e^2-1)$, con lo cual obtendremos lo siguiente:

$$\frac{x^2}{e^2d^2}-\frac{y^2}{e^2d^2(e^2-1)}=1.$$

Aquí, si llamemos $a=ed$ y $b=ed\sqrt{e^2-1}$, entonces tendremos

Ecuación general de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde

$$f=e^2d=ae \qquad \text{y} \qquad d=\frac{a}{e}$$

Además

$$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Ecuación de la hipérbola

En consecuencia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b$$

corresponde siempre a una hipérbola con:

Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
Foco:	$F = (ae, 0)$
Directriz:	$D : x = \frac{a}{e}$

Gráfico de la hipérbola

1. Como en la ecuación aparecen x^2 e y^2, deducimos que se trata de una figura doblemente simétrica con respecto a los ejes. En efecto, si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación. Pero $(-y)^2 = y^2$ y además $(-x)^2 = x^2$, luego los puntos $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$, también satisfacen la ecuación, luego pertenecen a ella.
   Como consecuencia de lo anterior, basta con hacer el análisis gráfico de la elipse sólo en el primer cuadrante.

2. En el primer cuadrante podemos despejar y en términos de x obteniendo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

   De aquí vemos que para poder calcular y es necesario que $x \geq a$, luego el gráfico de la elipse debe hacerse sólo en la zona a la derecha de $x = a$ (en el primer cuadrante).

3. También podemos despejar x en términos de y en el primer cuadrante obteniendo

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

   De aquí vemos que y puede tomar cualquier valor.

4. Siempre en el primer cuadrante, podemos obtener algunos puntos considerando que

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

   Luego para $x = a$ se obtiene $y = 0$.

Gráfico de la hipérbola

Además si x crece entonces y también crece

Por último si x toma valores muy grandes podemos hacer la siguiente aproximación:

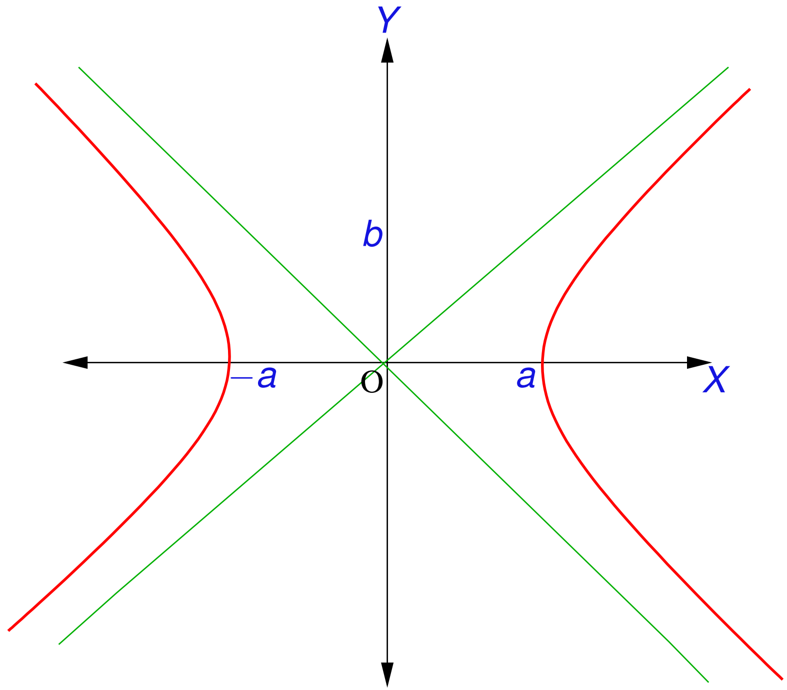
$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2} \sim \frac{b}{a}x$$

Es decir la hipérbola se aproxima a la recta $y = \frac{b}{a}x$. Dicha recta se llama asíntota de la hipérbola.

Por simetría vemos que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son todas las asíntotas de la hipérbola.

Gráfico de la hipérbola

Luego el grafico será:

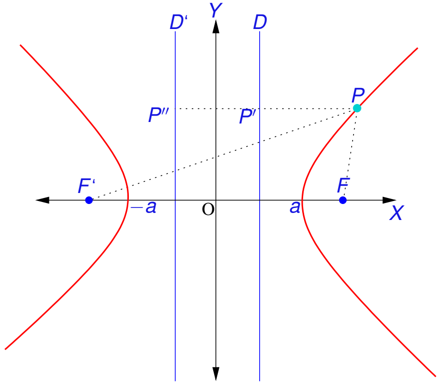


Observación

Por la simetría del gráfico, se aprecia facilmente que el punto $F' = (-ae, 0)$ y la recta D' de ecuación $x = -\frac{a}{e}$ funcionan como un foco y directriz de la hipérbola. Por lo tanto la hipérbola tiene dos focos y dos directrices.

Propiedad importante

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean P' y P'' las proyecciones de P sobre las directrices.



Entonces es claro que

$$PF = ePP' \text{ y } PF' = ePP''$$

Luego

$$PF - PF' = e(PP' - PP'') = eP'P'' = e\frac{2a}{e} = 2a$$

es decir

$$PF - PF' = 2a.$$

Observaciones

1. La ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ corresponde a una hipérbola donde se han intercambiado los roles de x e y y los roloes de a y b, de modo que $e = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$,
$F(0, be)$, $F'(0, -be)$, $D : y = \frac{b}{e}$ y $D' : y = -\frac{b}{e}$.

   Las asintotas serían $x = \pm\frac{a}{b}y$ es decir $y = \pm\frac{b}{a}x$, o sea las mismas asintotas que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ estas dos hiperbolas que comparten las asintotas se llaman hipérbolas conjugadas y sus ecuaciones se escriben:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

2. Si $a = b$ entonces la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ se llama hipérbola equilatera.
Estas hiperbolas tienen exentricidad $e = \sqrt{2}$ y sus asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes.