



Guía Problemas

La presente guía le permitirá tener una idea bastante precisa del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver en una evaluación y el tiempo promedio que debería demorar en resolverlos. En total debería poder resolverla en 3 horas. Le recomendamos que trabaje en ella una hora antes de la clase de trabajo dirigido, que resuelva sus dudas en la clase de trabajo dirigido y que luego dedique una hora a escribir con detalles las soluciones.

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

a) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$

b) (20 min.) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

c) (20 min.) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0, ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

d) (20 min.) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**)

(a) (15 min.) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) (25 min.) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a+b)d] + [-(c+d)b] = 0.$$

(c) (15 min.) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

P3. (20 min.) Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}, w \neq 0, z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = \lambda w, y = \lambda z.$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto ltimo implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusin.

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface los siguientes propiedades (axiomas):

(A1) $3 \in C$.

(A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.

Semana 1 Guía Problemas

(A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.

(A4) $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

(a) (5 min.) $1 \notin C$.

(b) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$.

(c) (5 min.) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$.

(d) (5 min.) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C)$.

(e) (5 min.) No existe $x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$.