

Números Reales

March 9, 2007

Números reales positivos

Para introducir la idea de orden en los reales y poder trabajar con desigualdades, existen diversas formas para comenzar. En este apunte hemos escogido la versión que comienza por la definición del conjunto de los reales estrictamente positivos y en base a ellos se obtienen las definiciones de las desigualdades y todas las propiedades.

En \mathbb{R} existe un subconjunto llamado conjunto de reales (estrictamente) positivos (\mathbb{R}_+^*), el cual satisface los siguientes axiomas o reglas.

Axioma 6 (de la tricotomía):

$\forall x \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- i) $x \in \mathbb{R}_+^*$
- ii) $(-x) \in \mathbb{R}_+^*$
- iii) $x = 0$

Observación

De cumplirse (i) se dice que x es un real estrictamente positivo y si se cumple (ii) diremos que x es un real estrictamente negativo.

Axioma 7 (Clausura):

$(\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$ se cumple que:

- $(x + y) \in \mathbb{R}_+^*$
- $x \cdot y \in \mathbb{R}_+^*$

Es decir, \mathbb{R}_+^* es cerrado para la suma y el producto.

Relaciones de orden

Ahora que conocemos el conjunto \mathbb{R}_+^* , estamos en condiciones de incorporar las definiciones de los símbolos $<, >, \leq, \geq$.

Relaciones de orden

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ se define la relaciones $<, >, \leq, \geq$, por:

- 1 $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}_+^*$
- 2 $x > y \iff y < x \iff (x - y) \in \mathbb{R}_+^*$
- 3 $x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)$
- 4 $x \geq y \iff (x > y) \vee (x = y)$

Propiedades

Propiedad 1

$$x > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^*$$

Demostración

$x > 0$ corresponde exactamente por definición a $(x - 0) \in \mathbb{R}_+^*$, lo que es idénticamente la expresión $x \in \mathbb{R}_+^*$. Con esto queda demostrada la equivalencia de las proposiciones.

Propiedad 2

$$x \text{ es negativo} \iff x < 0.$$

Demostración

$x < 0$ corresponde exactamente por definición a $(0 - x) \in \mathbb{R}_+^*$, con lo cual se tiene que $-x \in \mathbb{R}_+^*$, con lo cual se tiene que x es negativo.

Propiedad 3 (tricotomía)

Para cualquier par de números reales x e y , una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- i) $x < y$
- ii) $x > y$
- iii) $x = y$

Demostración

Según el Axioma 1 de la tricotomía, como $(y - x) \in \mathbb{R}$ entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera: i) $(y - x) \in \mathbb{R}_+^*$, ii) $-(y - x) \in \mathbb{R}_+^*$, o bien iii) $(y - x) = 0$.

Sin embargo i) significa: $x < y$. ii) significa $(x - y) \in \mathbb{R}_+^*$, o sea, $x > y$. Finalmente iii) significa $x = y$. Con lo cual se tiene la demostración.

Propiedades

Propiedad 4

$$x < y \text{ y } a \in \mathbb{R} \implies x + a < y + a.$$

Demostración

Veamos que $(y + a) - (x + a) \in \mathbb{R}_+^*$ es decir que $(y + a) - (x + a) > 0$:

$$\begin{aligned}(y + a) - (x + a) &= y + a + ((-x) + (-a)) \\ &= y + (-x) + a + (-a) \\ &= y - x,\end{aligned}$$

pero por hipótesis sabemos que $x < y$ lo que implica que $y - x > 0$, luego

$$(y + a) - (x + a) > 0 \text{ de donde } x + a < y + a.$$

Observación

Con esta última propiedad podemos sumar un elemento a ambos lados de la desigualdad y esta no cambia.

Propiedad 5

$$\text{i) } x < y \wedge a > 0 \implies ax < ay$$

$$\text{ii) } x < y \wedge a < 0 \implies ax > ay$$

Demostración

i) Por hipótesis $(y - x) \in \mathbb{R}_+^*$ y $a \in \mathbb{R}_+^*$, por los axiomas 7 y 3 tendremos que $a(y - x) = ay - ax \in \mathbb{R}_+^*$, por lo tanto $ax < ay$.

$$\text{ii) } ax - ay = a(x - y) = (-a)(y - x) \in \mathbb{R}_+^* \implies ax > ay.$$

Propiedades

Observación

Con la propiedad 5, podemos multiplicar un elemento a ambos lados de la desigualdad y si este elemento es positivo la desigualdad no cambia, pero si el elemento es negativo la desigualdad sí cambiará.

Propiedad 6

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0.$$

Demostración

Por el axioma 1 de tricotomía sabemos:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow x \in \mathbb{R}_+^* \vee x = 0 \vee (-x) \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow x \cdot x \in \mathbb{R}_+^* \vee x^2 = 0 \vee (-x)(-x) \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}_+^* \vee x^2 = 0 \vee x^2 \in \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow x^2 > 0 \vee x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Comentario: $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 \geq 0$, pero $1 \neq 0$, por lo tanto $1 > 0$ luego. Con esto $1 \in \mathbb{R}_+^*$.

Propiedad 7

Si $x < y$ y $u < v \Rightarrow x + u < y + v$.

Demostración

Por la definición de $<$ tenemos dos cosas:

$$x < y \Rightarrow (y - x) \in \mathbb{R}_+^* \text{ y } u < v \Rightarrow (v - u) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Como \mathbb{R}_+^* es cerrado para la suma tendremos: $(y - x) + (v - u) \in \mathbb{R}_+^*$, de donde desarrollando los paréntesis obtendremos: $(y + v) - (x + u) \in \mathbb{R}_+^*$.

Luego nuevamente por la definición de $<$, lo último equivale a $x + u < y + v$.

Propiedades

Observación

Esta última propiedad nos dice que podemos sumar las desigualdades.

Propiedad 8

Si $0 < x < y$ y $0 < u < v$ entonces podemos multiplicar las desigualdades, es decir $xu < yv$.

Demostración

Por la definición de $<$ y por la cerradura de \mathbb{R}_+^* para $+$ y \cdot , obtendremos

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < y \implies (y - x) \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 < u < v \implies (v - u) \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\} \implies v(y - x) + (v - u)x \in \mathbb{R}_+^*,$$

desarrollando la última expresión obtendremos $vy - ux \in \mathbb{R}_+^*$, con lo cual por la definición de $<$ se tendrá $xu < yv$.

Observación

Esta propiedad nos dice que podemos multiplicar las desigualdades en \mathbb{R}_+^* sin que cambie la desigualdad.

Propiedad 9

- i) $(x < 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy < 0$
- ii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy > 0$

Demostración

Por la propiedad 1, la cerradura para \cdot obtendremos los dos resultados, es decir

- i) $(-x) \in \mathbb{R}_+^* \wedge y \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow -xy \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow xy < 0.$
- ii) $(-x) \in \mathbb{R}_+^* \wedge (-y) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow (-x)(-y) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow xy > 0.$

Propiedades

Propiedad 10

- i) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$
- ii) $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

Demostración

- i) $x^{-1} = x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x = (x^{-1})^2 \cdot x$, luego como $(x^{-1})^2 > 0$ y $x > 0$, por la propiedad anterior obtendremos $x^{-1} = (x^{-1})^2 \cdot x > 0$
- ii) $x^{-1} = x^{-1} x^{-1} x = (x^{-1})^2 \cdot x < 0$ ya que $(x^{-1})^2 > 0 \wedge x < 0$.

Propiedad 11

Si $0 < x < y$ entonces $x^{-1} > y^{-1}$.

Demostración

Veamos que $x^{-1} - y^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$:

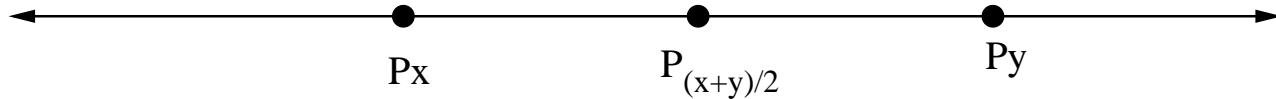
$$x^{-1} - y^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} = (y-x) \cdot x^{-1}y^{-1}$$

pero $0 < x < y \Rightarrow (y-x) \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$ e $y^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$ con lo cual de la última expresión obtendremos : $x^{-1} - y^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$, es decir, $y^{-1} < x^{-1}$.

Representación gráfica de \mathbb{R}

En virtud de la relación menor o igual definida en \mathbb{R} se puede pensar en ordenar esquemáticamente los números reales de menor a mayor. Los números reales se representan sobre una recta horizontal tal que a cada x en \mathbb{R} se le asocia un punto P_x sobre la recta siguiendo las siguientes convenciones:

- i) Si $x < y$ entonces P_x está a la izquierda de P_y
- ii) Si $x < y$ entonces $P_{\frac{x+y}{2}}$ es punto medio del trazo $\overline{P_x P_y}$.



Definición de intervalos en \mathbb{R}

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal es que $a \leq b$. Los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} se llamaran intervalos:

- 1 Intervalo abierto a coma b :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

- 2 Intervalo cerrado a coma b :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

- 3 Intervalo a coma b cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

- 4 Intervalo a com b cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Definición de intervalos en \mathbb{R}

Intervalos

5. Intervalos no acotados:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

Notación:

Para denotar un intervalo abierto (a, b) también se puede ocupar los parentesis $]a, b[$.

Observaciones

- 1 Si $a = b$ entonces $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ y $[a, a] = \{a\}$.
- 2 Se puede anotar al conjunto \mathbb{R} como el intervalo no acotado $(-\infty, +\infty)$.
- 3 Sea I un intervalo y $x_1, x_2 \in I$, tales que $x_1 \leq x_2$, entonces $[x_1, x_2] \subseteq I$.

Introducción

Inecuación

Una inecuación es una desigualdad de números reales en la que intervienen una o más cantidades genéricas. Resolver una inecuación consiste en determinar para que valores reales de las incógnitas genéricas se satisface la desigualdad.

Dependiendo del número de cantidades genéricas hay inecuaciones de 1, 2 o más incógnitas y entre las de una incógnita las hay de primer, segundo, tercer o mayor grado.

Al resolver una inecuación de 1 incógnita suele buscarse el mayor subconjunto de \mathbb{R} donde la desigualdad se cumpla. Este conjunto se llama **conjunto solución de la inecuación**.

Inecuaciones de primer grado

Son de la forma $ax + b < 0$ donde a y b son números reales constantes y $a \neq 0$. Donde el signo $<$ puede ser también $>$, \leq o \geq .

Solución

$$\begin{aligned} ax + b &< 0 \\ \Leftrightarrow ax &< -b \end{aligned}$$

- i) Si $a > 0$ entonces la inecuación queda $x < -\frac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$.
- ii) Si $a < 0$ entonces la inecuación queda $x > -\frac{b}{a}$ cuya solución evidentemente es $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$.

Ejemplo

$$5(x - 1) > 2 - (17 - 3x)$$

Solución

$$\begin{aligned} 5(x - 1) &> 2 - (17 - 3x) \\ \Leftrightarrow 5x - 5 &> -15 + 3x \\ \Leftrightarrow 2x &> -10 \\ \Leftrightarrow x &> -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución será $x \in (-5, \infty)$.

Inecuaciones de grado mayor a 1

Enunciaremos un método para resolver algunas inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,$$

donde el signo $<$ puede ser también $>$, \leq o \geq .

Nos remitiremos primeramente a los casos cuando $P(x)$ y $Q(x)$ son productos de factores de primer orden del tipo $ax + b$. Comencemos por observar que este tipo de factores cambia de signo en el punto $x = -\frac{b}{a}$. Denominaremos puntos críticos a estos valores.

El método para resolver estas inecuaciones es en consecuencia el siguiente:

- 1 Determinar todos los puntos críticos mediante la ecuación $x = -\frac{b}{a}$.
- 2 Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar los intervalos abiertos encerrados entre ellos más los dos intervalos no acotados correspondientes.
- 3 Analizar el signo de la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en los intervalos encontrados en (2.) y escoger aquellos que resuelvan de buen modo la inecuación.
- 4 En los caso en que los signos de la inecuación sean \leq o \geq deben agregarse a la solución los puntos críticos del numerador, ya que en esos puntos se anula la fracción.

Ejemplo

Apliquemos lo anterior al siguiente ejemplo:

$$\frac{x+1}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x}$$

Solución

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x} \leq \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x+4}{x} - \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2-x+4x-4-x^2-x}{x(x-1)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2x-4}{x(x-1)} \leq 0. \end{aligned}$$

Los puntos críticos serán:

- Para $2x - 4$ el punto crítico es 2.
- Para $x - 1$ el punto crítico es 1.
- Para x el punto crítico es 0.

Ejemplo

Para realizar el punto 3) y 4) es decir analizar el signo de la expresión $\frac{2x-4}{x(x-1)}$ de los intervalos encontrados de forma más ordenada, es conveniente formar una tabla donde analizaremos por parte el signo por intervalo de cada término de la forma $ax + b$ que participa, y luego ver el signo de la expresión total por medio de la regla de los signos para la multiplicación. En este ejemplo la tabla será:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
x	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$x - 1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$2x - 4$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{2x-4}{x(x-1)}$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

El caso del punto crítico $x = 2$ la expresión vale 0 , por lo tanto cumple la desigualdad, más bien la igualdad, por lo tanto debemos agregarla a nuestro conjunto solución. El caso de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ es distinto, debemos quitarlos del conjunto solución pues el denominador se anula obteniendo división por 0 , lo cual no puede ser.

Por todo esto el conjunto solución será:

$$(-\infty, 0) \cup (1, 2].$$

Factorización de términos cuadráticos

Si la inecuación no aparece factorizada por factores de primer grado, se puede intentar factorizar la expresión, o bien intentar conocer (sin factorizar) los puntos donde estos factores cambian de signo. En este último caso, se puede resolver la inecuación con el metodo indicado anteriormente.

Por ejemplo para los factores de segundo grado se tiene:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
 &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
 &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].
 \end{aligned}$$

Llamemos Δ al factor $b^2 - 4ac$. Dependiendo del signo de Δ se tienen tres posibilidades:

1 Si $\Delta > 0$ entonces la expresión es factorizable según factores de primer grado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
 &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].
 \end{aligned}$$

Aplicando la factorización suma por su diferencia obtendremos la expresión en factores de primer grado:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Factorización de términos cuadráticos

Los puntos críticos de la última expresión son $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, con lo cual volvemos al caso ya estudiado. Es decir:

■ $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

■ $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de $-a$ si $x \in (x_1, x_2)$.

2. Si $\Delta = 0$ entonces solo hay un punto crítico que es $x^* = -\frac{b}{2a}$ y se tiene que:
 $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de a si $x \in (-\infty, x^*) \cup (x^*, \infty)$.

3. Si $\Delta < 0$ entonces no hay puntos críticos y en este caso
 $ax^2 + bx + c$ tiene el signo de $a \forall x \in \mathbb{R}$.

Luego el factor $ax^2 + bx + c$ puede ser simplificado en la inecuación, cuidando el efecto que el signo de este factor produce en el sentido de la desigualdad.

Si en la inecuación aparecen factores de mayor grado, su resolución estará condicionada al hecho de si puede o no factorizar hasta factores de primer y segundo grado o si se conocen sus cambios de signo.

Ejercicios

1 Resolver las siguientes inecuaciones:

i) $2x^2 + 3x + 1 < 0$

ii) $4x - 5 - x^2 > 0$

iii) $x^3 < x$

iv) $\frac{22}{2x-3} + \frac{23x+26}{4x^2-9} > \frac{51}{2x+3}$

v) $6x^6 - x^3 < x^4$

vi) $\frac{4x-3}{6x} \leq \frac{8x-6}{5x}$

vii) $\frac{x^9+x}{x^2-3x+2} < 0$

2 Determinar los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

i) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x^8+2x^7-8x^6}{x^2-4x+3} > 0\}$

ii) $\{x \in \mathbb{R} / x^3 - 11x^2 + 10x < 10x^3 - 12x^2 + 82x > 0\}$

iii) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{40}{x^2+x-12} < -4\}$

Algunas soluciones

i) $2x^2 + 3x + 1 < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego

$$2x^2 + 3x + 1 < 0 \iff x \in (-1, -1/2).$$

ii) $4x - 5 - x^2 > 0 \iff -x^2 + 4x - 5 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - (4 \cdot -1 \cdot -5) = 16 - 20 = -4 < 0$$

Luego el signo del factor es constante e igual al signo de $a = -1$, es decir siempre negativo.

Luego la solución de la inecuación es:

$$4x - 5 - x^2 > 0 \iff x \in \Phi.$$

Algunas soluciones

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } x^3 < x &\iff x^3 - x < 0 \\
 &\iff x(x^2 - 1) < 0 \\
 &\iff x(x - 1)(x + 1) < 0
 \end{aligned}$$

Luego los puntos críticos son 0, 1 y -1 .

Con estos puntos críticos confeccionamos la siguiente tabla:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$x - 1$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$x + 1$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$x^3 - x$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Luego la solución es

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1).$$

Algunas soluciones

$$\begin{aligned}
 \text{vi) } \frac{4x-3}{6x} \leq \frac{8x-6}{5x} &\iff \frac{4x-3}{6x} - \frac{8x-6}{5x} \leq 0 \\
 &\iff \frac{(20x-15)-(48x-36)}{30x} \leq 0 \\
 &\iff \frac{-28x+21}{30x} \leq 0 \\
 &\iff \left(\frac{-7}{30}\right)\left(\frac{4x-3}{x}\right) \leq 0 \\
 &\iff \frac{4x-3}{x} \geq 0
 \end{aligned}$$

Luego los puntos críticos son 0 y $\frac{3}{4}$. Con esto confeccionamos la tabla siguiente:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{3}{4})$	$(\frac{3}{4}, +\infty)$
$4x - 3$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
x	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{4x-3}{x}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Además el punto crítico $x = \frac{3}{4}$ anula el numerador de la fracción, luego es también solución de la inecuación.

Luego la solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

Definición del módulo

Módulo o valor absoluto

Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos módulo de x al real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

i) $|2| = 2$

ii) $|-2| = -(-2) = 2$

iii) $|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1, & \text{si } 1 - x^2 < 0 \end{cases}$

pero

$$1 - x^2 \geq 0 \iff (1 - x)(1 + x) \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

Luego

$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Propiedades

Propiedades

- 1 $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- 2 $|x| = 0 \iff x = 0$
- 3 $|x| = |-x|$
- 4 $|x^2| = |x|^2 = x^2$
- 5 $-|x| \leq x \leq |x|$
- 6 $|xy| = |x| \cdot |y|$
- 7 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- 8 $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$
- 9 $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee a \leq x \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$
- 10 $|x - x_0| \leq a \iff x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \iff x \in [x_0 - a, x_0 + a]$
- 11 $|x - x_0| \geq a \iff x \leq x_0 - a \vee x \geq x_0 + a \iff x \in (-\infty, x_0 - a] \cup [x_0 + a, \infty)$
- 12 $(\forall x, y \in \mathbb{R}) |x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad triangular)

Observación

Más importante que la demostración de las últimas propiedades, es lograr entenderlas e internalizarlas a cabalidad, ya que serán una herramienta muy importante para la resolución de inecuaciones que contengan expresiones con módulo. Inecuaciones que por cierto serán mucho más interesantes y complicadas a la vez que las vistas al comienzo.

Demostración de algunas propiedades

1. Debemos demostrar que $(\forall x \in \mathbb{R}) |x| \geq 0$

$$x \in \mathbb{R} \implies x \geq 0 \vee x < 0$$

$$\implies |x| = x \geq 0 \vee |x| = -x > 0$$

$$\implies |x| \geq 0 \vee |x| > 0$$

$$\implies |x| \geq 0.$$

2. Debemos partir del hecho $|x| = 0$ y probar que $x = 0$, y luego partir de $x = 0$ y a partir de este hecho probar que $|x| = 0$. Con esto habremos probado la equivalencia.

$$-x = 0 \Rightarrow |x| = x = 0 \Rightarrow |x| = 0$$

$$-|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \vee -x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

5. Debemos demostrar: $(\forall x \in \mathbb{R}) -|x| \leq x \leq |x|$

$$x \in \mathbb{R} \implies x \geq 0 \vee x < 0$$

$$\implies x = |x| \vee -x = |x|$$

$$\implies -|x| \leq x = |x| \vee -|x| = x < |x|$$

$$\implies -|x| \leq x \leq |x| \vee -|x| \leq x \leq |x|$$

$$\implies -|x| \leq x \leq |x|.$$

Demostración de algunas propiedades

8. Debemos demostrar: $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$

Si $a < 0$ la equivalencia es evidente pues

$$|x| \leq a \iff x \in \emptyset \iff -a \leq x \leq a$$

Si $a \geq 0$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff [x \geq 0 \vee x < 0] \wedge |x| \leq a \\ &\iff 0 \leq x = |x| \leq a \vee -a \leq -|x| = x < 0 \\ &\iff 0 \leq x \leq a \vee -a \leq x < 0 \\ &\iff [0 \leq x \wedge -a \leq x \leq a] \vee [x < 0 \wedge -a \leq x \leq a] \\ &\iff [0 \leq x \vee x < 0] \wedge -a \leq x \leq a \\ &\iff -a \leq x \leq a \end{aligned}$$

Ejemplo

Resolvamos

$$2|x| < |x - 1|$$

Para resolver este tipo de inecuaciones, se pueden usar dos métodos alternativos. El primero, usa las propiedades del módulo en forma reiterada. El segundo método consiste en separar la inecuación con módulo en un conjunto de inecuaciones fáciles sin modulo. Veamos en forma detallada como usar estas dos técnicas en este ejercicio.

Técnica 1 (uso de las propiedades del módulo)

Esta técnica se usa del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 2|x| < |x - 1| &\iff -|x - 1| < 2x < |x - 1| \\ &\iff |x - 1| > -2x \wedge |x - 1| > 2x \\ &\iff [x - 1 < 2x \vee x - 1 > -2x] \wedge [x - 1 < -2x \vee x - 1 > 2x] \\ &\iff [x > -1 \vee 3x > 1] \wedge [3x < 1 \vee x < -1] \\ &\iff [x > -1] \wedge [x < \frac{1}{3}] \\ &\iff x \in (-1, \frac{1}{3}). \end{aligned}$$

Ejemplo

Técnica 2 (uso de los puntos críticos)

Esta técnica comienza buscando todos los puntos en los cuales los factores bajo los módulos cambian de signo.

Si miramos la expresión

$$2|x| < |x - 1|,$$

vedos claramente que los puntos críticos son el 0 para el primer módulo y el 1 para el segundo. Estos puntos críticos se ordenan de menor a mayor y con ellos se forman los intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ y $(1, +\infty)$.

Con estos intervalos se puede decir que la inecuación es equivalente a las frases lógicas siguientes:

- Hay que encontrar todos los reales que cumplan $2|x| < |x - 1|$.
- Hay que encontrar todos los reales en $(-\infty, 0] \cup (0, 1] \cup (1, +\infty)$ que cumplan $2|x| < |x - 1|$.
- Hay que encontrar todos los reales en $(-\infty, 0]$ que cumplan $2|x| < |x - 1|$, mas todos los reales en $(0, 1]$ que cumplan $2|x| < |x - 1|$, mas todos los reales en $(1, +\infty)$ que cumplan $2|x| < |x - 1|$.

Ejemplo

En la última frase lógica anterior está la clave del problema. En efecto lo que debe hacerse es resolver la inecuación en cada uno de los intervalos considerados y al final reunirse todas las soluciones. Lo interesante es que en cada intervalo, los módulos pueden eliminarse, ya que los argumentos que ellos encierran tienen signos constantes.

Veamos como opera este método en cada intervalo.

1. En el intervalo $(-\infty, 0]$ los factores x y $x - 1$ son ambos menores o iguales a cero, por lo tanto en este intervalo la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x - 1| &\iff -2x < -(x - 1) \\ &\iff 2x > x - 1 \\ &\iff x > -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto en este intervalo la solución es el conjunto $(-1, 0]$.

2. En el intervalo $(0, 1]$ el factor x es positivo pero el factor $x - 1$ es negativo, por lo tanto en este intervalo la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x - 1| &\iff 2x < -(x - 1) \\ &\iff 3x < 1 \\ &\iff x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Luego en este intervalo la solución es $(0, \frac{1}{3})$.

Ejemplo

3. Finalmente, en el intervalo $(1, \infty)$ los factores x y $x - 1$ son ambos positivos, por lo tanto en este intervalo la inecuación se escribe

$$\begin{aligned} 2|x| < |x - 1| &\iff 2x < (x - 1) \\ &\iff x < -1. \end{aligned}$$

Esta inecuación tiene solución $(-\infty, -1)$ en \mathbb{R} , pero como la estamos resolviendo en el intervalo $(1, \infty)$, se deduce que la solución es \emptyset .

En consecuencia la solución final de esta inecuación es

$$(-1, 0] \cup (0, \frac{1}{3}) \cup \emptyset = \left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

Ejemplo

$$\blacksquare |x^2 - |3 + 2x|| < 4$$

Solución 1 (Usando las propiedades de módulo):

$$\begin{aligned} |x^2 - |3 + 2x|| < 4 &\iff -4 < x^2 - |3 + 2x| < 4 \\ &\iff |3 + 2x| < x^2 + 4 \wedge |3 + 2x| > x^2 - 4 \\ &\iff [-x^2 - 4 < 3 + 2x \wedge 3 + 2x < x^2 + 4] \wedge [3 + 2x < -x^2 + 4 \vee 3 + 2x > x^2 - 4] \\ &\iff x^2 + 2x + 7 > 0 \wedge x^2 - 2x + 1 > 0 \wedge [x^2 + 2x - 1 < 0 \vee x^2 - 2x - 7 < 0]. \end{aligned}$$

En cada inecuación de segundo grado se tiene:

$\Delta = -24 < 0 \implies ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + 7$ tiene el signo de $a \forall x \in \mathbb{R}$, en este caso $a = 1$, lo que implica que la solución es todo \mathbb{R} .

$\Delta = 0 \implies$ la solución no incluirá $x = 1$ ya que la expresión $x^2 - 2x + 1$ se anula y esto no puede ser. Además el signo de $x^2 - 2x + 1$ nuevamente será el signo de $a = 1$, el cual es positivo, por lo tanto la solución será $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\Delta = 8 \implies$ la solución es $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$, intervalo donde el signo de $x^2 + 2x - 1$ es el signo de $-a$ donde $a = 1$, por lo tanto será el intervalo donde $x^2 + 2x - 1 < 0$.

$\Delta = 32 \implies$ la solución es $(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$.

Luego la solución final de la inecuación es:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap [(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}) \cup (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})] \\ = (-1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ejemplo

Solución 2 (Usando puntos críticos):

Lo primero es ver el punto crítico $3 + 2x$, el cual es $-\frac{3}{2}$, luego el signo de $3 + 2x$ para $x < -\frac{3}{2}$ será negativo, por lo tanto debemos anteponer un signo $(-)$ a la expresión y sacar el módulo. Si $x > -\frac{3}{2}$, la expresión será positiva y sólo debemos retirar el módulo. Con esto tendremos lo siguiente:

$$|x^2 - |3 + 2x|| < 4 \iff [x < -\frac{3}{2} \wedge |x^2 + 3 + 2x| < 4] \vee [x \geq -\frac{3}{2} \wedge |x^2 - 3 - 2x| < 4].$$

Ahora completaremos cuadrado en las expresiones que tienen módulo:

$$\iff [x < -\frac{3}{2} \wedge |(x + 1)^2 + 2| < 4] \vee [x \geq -\frac{3}{2} \wedge |(x - 1)^2 - 4| < 4].$$

Luego buscamos los puntos críticos de $(x + 1)^2 + 2$ y $(x - 1)^2 - 4$. La primera expresión será siempre positiva así que se puede retirar el módulo. La segunda expresión tendrá dos puntos críticos $x = -1$ y $x = 3$.

Ejemplo

Con los puntos críticos se crearán los intervalos correspondientes y se hará lo que corresponda con el módulo dependiendo del signo resultante de $(x-1)^2 - 4$ en cada intervalo. Realizando esto tendremos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & [x < -\frac{3}{2} \wedge (x+1)^2 < 2] \vee [x \in [-\frac{3}{2}, -1) \wedge (x-1)^2 - 4 < 4] \\ & \vee [x \in [-1, 3] \wedge -(x-1)^2 + 4 < 4] \vee [x \in (3, \infty) \wedge (x-1)^2 - 4 < 4]. \end{aligned}$$

Con esto último ya no tenemos ninguna expresión con módulo, ahora sólo faltará buscar el intervalo solución como se enseñó en un comienzo

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & [x < -\frac{3}{2} \wedge x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})] \vee [x \in [-\frac{3}{2}, -1) \wedge x \in (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})] \\ & \vee [x \in [-1, 3] \wedge x \neq 1] \vee [x \in (3, \infty) \wedge x \in (1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})], \end{aligned}$$

arreglando un poco los intervalos de solución obtendremos

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & [x \in (-1 - \sqrt{2}, -\frac{3}{2})] \vee [x \in [-\frac{3}{2}, -1)] \vee [x \in [-1, 3] \setminus \{1\}] \vee [x \in (3, 1 + 2\sqrt{2})] \\ \Leftrightarrow & x \in (-1 - \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$