Algunos Ejercicios Resueltos Guía 11 y 12, 2007

Profesor: Patricio Felmer
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P3.G11 Para $x > 0$ calcule $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$.

Sol: De lo primero que nos damos cuenta es que, a pesar de ser una guía de funciones *exponencial y logaritmo* en el enunciado no aparece ninguna de ellas, al menos explícitamente. Entonces una buena idea es hacer aparecer alguna exponencial o logaritmo por ahí. Veamos, por definición

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{n}}$$

Con esto intentemos calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right) = (*)$$

La siguiente propiedad nos puede ser de utilidad (al menos para este ejercicio, el control y la vida diaria)

PROPIEDAD:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *con* $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$

Si queremos ocuparla, ¿Cuál sería nuestro a_n? Claramente el único candidato posible es $a_n = \frac{\ln(x)}{n}$, pues cumple con las hipótesis, ya que es el producto de una constante por una sucesión nula (la famosísima $\frac{1}{n}$) y nunca se anula.

Ahora sólo nos falta terminar de transformar $(*)$ en algo que se parezca a lo que dice la propiedad, es decir debemos hacer que a_n aparezca en el denominador, para esto multiplicamos y dividimos por $\ln(x)$ (¿siempre se puede? la verdad es que no, el caso $\ln(x) = 0$ queda propuesto).

Obtenemos:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(x) \frac{\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \right]$$

Para efectos de calcular el límite, $\ln(x)$ es una constante (no depende de n), luego podemos usar álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \left[\ln(x) \frac{\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \right] = \ln(x) \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \right]$$

Finalmente, por la propiedad recordada

$$\ln(x) \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(e^{\frac{\ln(x)}{n}} - 1\right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \right] = \ln(x) \cdot 1 = \ln(x)$$

P4.G14 Considere la función dada por la regla:

$$f(x) = \begin{cases} x^n sen(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Pruebe que si $n \geq 1$ se cumple que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

b) Pruebe que si $n > 1$ entonces f es derivable en $x_0 = 0$, pero para $n = 1$ no.

c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ y encuentre para que valores de n se cumple $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Sol: a) Calculemos el límite de $f(x)$ cuando x se va a 0 (la idea es que este límite sea $f(0) = 0$). Para ello ocuparemos la parte de la función que fue definida para $x \neq 0$ (es cosa que mire un poco más arriba y copie).

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n sen(\frac{1}{x})$$

Sabemos que x^n se va a 0 cuando $n \geq 1$ (como nos lo asegura el enunciado) y $x \to 0$. Además *seno* es una función acotada (entre -1 y 1). Usamos el *Teorema de Nula por Acotada*[1] para decir que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x^n}_{\to 0} \underbrace{sen(\frac{1}{x})}_{acotada} = 0 = f(0)$$

Como ven la única dificultad es entender bien lo que significa definir una función por partes.

b) Para probar que una función f es derivable en un punto x_0 debemos demostrar la existencia del siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En este caso debemos ocupar $x_0 = 0$ y nuestra función además cumple con la gracia que $f(0) = 0$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} sen(\frac{1}{x})$$

Si $n > 1$ podemos hacer un razonamiento similar a la de la parte anterior y volver a ocupar el Teorema de Nula por Acotada (el límite que estamos calculando es 0).

Si $n = 1$ tenemos que:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} sen(\frac{1}{x}) = \nexists$$

De paso hemos demostrado que si $n > 1$ entonces $f'(0) = 0$.

[1] Teorema visto en sucesiones y que es fácilmente aplicable en funciones. Si no le convence intente utilizar el Teorema del Emparedado o Sandwich

c) Calculemos directamente la derivada para $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left(x^n sen(\frac{1}{x})\right)' = (x^n)' \cdot sen(\frac{1}{x}) + x^n \cdot \left(sen(\frac{1}{x})\right)' = nx^{n-1} \cdot sen(\frac{1}{x}) + x^n \cdot cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

$$= nx^{n-1} \cdot sen(\frac{1}{x}) - x^{n-2} \cdot cos(\frac{1}{x})$$

Vimos en la parte anterior que cuando $n > 1$ y gracias al *Teorema de Nula por Acotada:*

$$\lim_{x \to 0} x^{n-1} \cdot sen(\frac{1}{x}) = 0$$

Si queremos que $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ debemos imponer que:

$$\lim_{x \to 0} x^{n-2} \cdot cos(\frac{1}{x}) = 0$$

Y eso se consigue si $n > 2$ (x^{n-2} sería una función que tiende a cero, *coseno* es una función acotada y usando el *Teorema de Nula por Acotada* se tiene que el límite es 0).

NOTA: De este problema podemos sacar una tremenda moraleja. En funciones definidas por partes la derivada de los puntos límites (en este caso el 0) se deben calcular por definición. En el resto de los puntos se puede calcular por algebra de derivadas (cálculo directo de la derivada a través de las propiedades y conocimiento de las derivadas famosas).