# EL ALGORITMO SIMPLEX[1]

**Prof. Jorge Amaya A.**
**Departamento de Ingeniería Matemática y**
**Centro de Modelamiento Matemático**

**Universidad de Chile**

**Abril de 2005**

[1]Este texto es un apunte de clases, destinado exclusivamente a los alumnos del curso MA37A-OPTIMIZACION de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile.

# 1 Idea básica

Sabemos que para poder resolver un problema de programación lineal necesitamos solamente considerar los vértices del poliedro $\mathcal{P} = \{x \in I\!R^n / Ax = b, \;\; x \geq 0\}$ como candidatos a solución óptima del problema. Para un número grande de variables vimos también que el número de vértices $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ puede ser enorme, por lo que una metodología de búsqueda sistemática se hace necesaria.

El método simplex, desarrollado originalmente por G. Dantzig (1947), se basa en una idea geométrica muy simple: primero se encuentra una base factible (un vértice de $\mathcal{P}$). Luego el método permite moverse de vértice en vértice, a través de las aristas de $\mathcal{P}$ que sean direcciones de descenso para la función objetivo, generando una sucesión de vértices $x_k$ cuyos valores $c^T x_k$ son (estrictamente) decrecientes. Esto asegura que un mismo vértice no es visitado dos veces. Así, como el número de vértices es finito, el algoritmo converge en un número finito de pasos; esto significa que encuentra una solución óptima, o una arista a lo largo de la cual la función objetivo es no acotada.

A la búsqueda de una base factible (punto extremo) inicial se la llama Fase I del Algoritmo Simplex. El resto del procedimiento se conoce como Fase II, que expondremos a continuación.

# 2 Fase II del Algoritmo Simplex

Consideremos el problema

$$(\text{PL}) \ \min_{x \in \mathcal{P}} c^T x$$

donde $\mathcal{P} = \{x \in I\!R^n / Ax = b, \;\; x \geq 0\}$.

Supongamos que $A \in \mathcal{M}_{mn}$ es de rango $m$, entonces puede escribirse de la forma $A = [B, N]$, con $B \in \mathcal{M}_{mm}$ invertible.

Si denotamos $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \;\; c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$, entonces $Ax = Bx_B + Nx_N = b$, lo que finalmente implica que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

El problema (PL) es entonces equivalente a

$$\begin{array}{rll} \min & (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N & + c_B^T B^{-1} b \\ \\ & x_B + B^{-1} N x_N & = B^{-1} b \\ & x_N & \geq 0 \\ & x_B & \geq 0 \end{array}$$

Consideremos un punto $x$ extremo (es factible), $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$

Con esto, $c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b$. Se observa que, si $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$, entonces dar valor positivo a las variables $x_N$ produce un crecimiento del valor de $c^T x$. Entonces, la solución $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$ es óptima.

De aquí en adelante llamaremos $\pi^T$ al vector fila $c_B^T B^{-1}$, por lo cual el valor de la función objetivo también se puede escribir $\pi^T b$.

Se llamará *vector de costos reducidos* al resultado de reemplazar las variables básicas en la función objetivo. Es decir, el vector $c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ corresponde al costo reducido de las variables no básicas.

## 2.1 CASO 1: solución en curso es óptima

Veamos un ejemplo para ilustrar este concepto.

**Ejemplo 2.1**

$$\begin{array}{rrrcr} \min & 3x_3 & +x_4 & & \\ & -3x_3 & +3x_4 & \leq & 6 \\ & -8x_3 & +4x_4 & \leq & 4 \\ & & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Escribamos el problema en la forma canónica:

$$\begin{array}{rrrrrcrl} \min & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & +x_4 & & +0 & \\ & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & 6 & \\ & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = & 4 & \\ & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Elijamos $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $N = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

donde

$x_B$ : variables básicas o en la base
$x_N$ : variables no-básicas o fuera de la base

Además, en este caso,

$x_1, x_2$ : variables de holgura
$x_3, x_4$ : variables estructurales (es decir, las del problema original).

Se puede despejar $x_1, x_2$ en función de $x_3, x_4$ y reemplazar en la función objetivo. Notar que todo queda igual, pues $B = I$ y los costos reducidos de las variables básicas son siempre nulos, en efecto, $\bar{c}_B^T = c_B^T - \pi^T B = 0$.

Como $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N = (3, 1) \geq 0$, la solución $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es óptima.

**Criterio de Optimalidad**

*En un problema de minimización escrito en la forma canónica, si las variables no básicas tienen asociado un vector de costos reducidos* $\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T N \geq 0$*, entonces la solución* $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ *es óptima.*

## 2.2 CASO 2: el problema es no acotado

Consideremos ahora el siguiente ejemplo (casi igual al anterior):

**Ejemplo 2.2**

$$\begin{array}{rrrrrcrl}
\min & 0x_1 & +0x_2 & -3x_3 & +x_4 & & +0 & \\
 & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & 6 & \\
 & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = & 4 & \\
 & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1,2,3,4
\end{array}$$

Tal como en el ejemplo anterior, $x = \begin{pmatrix} 6, & 4, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$ es una solución factible, pero no es óptima, pues $\bar{c}_3 < 0$, es decir, conviene dar un valor positivo a la variable no básica $x_3$. Hasta dónde puede crecer? La única condición a respetar es la positividad de las variables básicas (las demás variables no básicas, en este caso solamente la variable $x_4$, permanecen fijas en cero). Imponemos entonces la condición

$$x_1 = -3x_4 + 6 + 3x_3 \geq 0$$
$$x_2 = -4x_4 + 4 + 8x_3 \geq 0$$

Se observa así que $x_3$ puede crecer indefinidamente sin violar las restricciones y haciendo tender el valor de la función objetivo a $-\infty$. Este problema es no acotado.

**Criterio de no Acotamiento**

*Si el costo reducido de una variable no básica es negativo y los elementos en la columna correspondiente de la matriz $B^{-1}N$ son negativos o nulos, entonces el problema es no acotado.*

## 2.3 CASO 3: la solución en curso no es óptima y se puede mejorar

Veamos ahora un tercer ejemplo (también casi igual anterior).

**Ejemplo 2.3**

$$\begin{array}{rrrrrcrl}
\min & 0x_1 & +0x_2 & +3x_3 & -x_4 & & +0 & \\
 & x_1 & & -3x_3 & +3x_4 & = & 6 & \\
 & & x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = & 4 & \\
 & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1,2,3,4
\end{array}$$

Vemos que $x_4$ es una variable no básica cuyo costo reducido es negativo[2], luego conviene hacerla entrar a la base. Cuánto puede crecer? La condición a respetar es

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 3x_4 + 6 \geq 0 \\ x_2 &= 8x_3 - 4x_4 + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Manteniendo $x_3 = 0$ (fuera de la base), el valor crítico de $x_4$ es $\min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{4}\} = 1$ y la variable $x_2$ se anula (sale de la base).

**Criterio de Pivoteo**

*Se hace entrar a la base una variable cuyo costo reducido sea negativo y sale de la base una variable básica que limite el crecimiento de la variable que entra.*

## 2.4 Resumen del método

En este punto introduciremos una forma de organizar los datos, por medio de una tabla del tipo:

$$\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{z} \\ \hline & & & \\ \bar{a}_{11} & & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

que corresponde a la tabla

$$\begin{array}{cc|c} 0^T & \bar{c}_N^T & -\pi^T b \\ \hline & & \\ I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

Se entiende que $\bar{b}_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$ y que las columnas del lado izquierdo de esta última tabla pueden estar desordenadas.

El esquema siguiente permite sistematizar el Algoritmo Simplex.

[2] Si bien no hay resultados respecto a la elección entre las variables con costos reducidos negativos, en general usaremos la variable de costo reducido *más* negativo.

(1) Si $\bar{c}_j \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, entonces la solución en curso en óptima. Las variables básicas se fijan en los correspondientes valores de $\bar{b}_i$, $i = 1, \ldots, m$, siguiendo el orden de entrada de las columnas de la matriz identidad (el orden de las variables de base), y las no básicas son nulas.

(2) Si $\bar{c}_s < 0$ para algún $s = 1, \ldots, n$, elegimos $x_s$ para entrar a la base. Pasamos a (3) o (4), según corresponda.

(3) Si $\bar{a}_{is} \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, el problema es no acotado. La dirección admisible extrema de no acotamiento a partir del vértice en curso es (con eventual reordenamiento de las coordenadas) $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}\bar{a}_s \\ e_s \end{pmatrix}$, siendo $\bar{a}_s$ la columna $s$ de $B^{-1}N$.

(4) Si $\bar{a}_{is} > 0$ para algún $i = 1, \ldots, m$, se determina $r$ tal que $\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min\{\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \ / \ \bar{a}_{is} > 0\}$ y se pivotea en $\bar{a}_{rs}$, según las formulas (notar que la fila del pivote sólo se divide por el valor $\bar{a}_{rs}$):

$$\bar{a}_{ij} \longleftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is}\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}, \quad i \neq r$$

$$\bar{a}_{rj} \longleftarrow \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$$

Para el lado derecho, se actualiza según:

$$\bar{b}_i \longleftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}, \quad i \neq r$$

$$\bar{b}_r \longleftarrow \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

Y para la fila de costos reducidos y valor en curso de la función objetivo:

$$\bar{c}_j \longleftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}$$

$$-\bar{z} \longleftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

**Observación 2.1** *Notar que esto corresponde precisamente al pivoteo de Gauss para la resolución del sistema de ecuaciones lineales* $((m+1) \times n)$*:*

$$\begin{array}{rrcl} -z & & +(c_N^T - \pi^T N)x_N & = -\pi^T b \\ & x_B & +B^{-1}Nx_N & = B^{-1}b \end{array}$$

*donde la columna se elige solamente de entre las variables en $x_N$, de manera de incrementar el valor del lado derecho de la primera ecuación (por lo tanto $z$ decrece al evaluar en $x_N = 0$), y la fila se elige de manera de garantizar que el lado derecho de las restantes ecuaciones se mantenga mayor o igual a cero.*

**Ejemplo 2.4**

$$\begin{array}{rrrcl} \min & -x_1 & -3x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & -3x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

El problema, escrito en la forma canónica, queda:

$$\begin{array}{rrrrrcll} \min & -x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 3 & \\ & -3x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 2 & \\ & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Entonces, considerando las variables de holgura como variables de base, se tiene la secuencia de tablas:

$$\begin{array}{rrrr|rl} & \downarrow & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & \\ -3 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & \rightarrow \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad (\textit{pivoteo}) \quad \begin{array}{rrrr|rl} \downarrow & & & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z & \\ -10 & 0 & 0 & 3 & 6 & \\ \hline \boxed{4} & 0 & 1 & -1 & 1 & \rightarrow \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

de donde se obtiene el cuadro (óptimo) final

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -z \\ 0 & 0 & 5/2 & 1/2 & 17/2 \\ \hline 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & 11/4 \end{array}$$

Identificamos $x^* = \left(\frac{1}{4}, \ \ \frac{11}{4}, \ \ 0, \ \ 0\right)^T$ como la solución óptima, luego el valor óptimo es $z^* = -17/2$.

**Definición 2.1** *Si una o más variables básicas se anulan, entonces la solución de un PL se dice **degenerada**. En caso contrario, la llamaremos **no-degenerada**.*

# 3 Fase I del Algoritmo Simplex

Hasta ahora, podemos resolver un PL si conocemos una solución básica inicial. Esta base inicial puede obtenerse fácilmente en el caso de un sistema de desigualdades de tipo $\leq$, con lado derecho posistivo, considerando como variables básicas a las variables de holgura. La Fase I del Simplex consiste en encontrar una base factible en un caso general.

Consideremos el problema escrito en forma canónica,

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \min & c^t x & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

El problema de factibilidad de $(P)$ puede plantearse como el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{array}{lrl} (P_a) \quad \min & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ai} & \\ & Ax + x_a & = b \\ & x, x_a & \geq 0 \end{array}$$

que es un problema en $n + m$ variables, $x \in I\!R^n$ y $x_a \in I\!R^m$. Bajo el supuesto razonable que $b \geq 0$, una solución básica factible evidente para este problema es $x_N = x = 0$ y $x_B = x_a = b$, luego podemos usar la Fase II del Algoritmo Simplex para resolverlo.

Este problema $(P_a)$ se resuelve considerando

$B = I$ ($x_a$ en la base),
$N = A$,

$c_B = 1\!\!1 = (1, \ldots, 1)^T$ y
$c_N = 0$.

Así, para este problema el cuadro es:

$$\begin{array}{cc|c} \bar{c}_N^T & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

que es equivalente a

$$\begin{array}{cc|c} c_N^T - c_B^T A & 0 & -c_B^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

y a

$$\begin{array}{cc|c} -1\!\!1^T A & 0 & -1\!\!1^T b \\ \hline A & I & b \end{array}$$

Las variables $x_{ai}$ son llamadas *variables artificiales* y el propósito del problema $(P_a)$ es llevarlas a salir de la base. Esto es posible, siempre que el problema original tenga una solución factible. En tal caso, el método simplex terminará con una solución básica factible, donde $x_{ai} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$ (todas las variables artificiales fuera de la base).

La propiedad esencial aquí es: $x$ es solución de $(P)$ si y solamente si $(x, x_a)$ es solución de $(P_a)$ con $x_a = 0$.

Si en el óptimo de $(P_a)$ se tiene algún $x_{ai} > 0$, entonces el problema $(P)$ es infactible.

**Ejemplo 3.1** *Consideremos el siguiente problema, escrito en forma canónica:*

$$\begin{array}{llccccccl} (P) & \min & x_1 & -2x_2 & & & & & \\ & & x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 1 & \\ & & x_1 & & & +x_4 & = & 4 & \\ & & x_1 & -x_2 & & & = & 0 & \\ & & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

Luego, agregando las variables artificiales $x_5, x_6, x_7$ queda:

$$
\begin{array}{llllllllll}
(P_a) & \min & & & & x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
& x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & & = & 1 \\
& x_1 & & & +x_4 & & +x_6 & & = & 4 \\
& x_1 & -x_2 & & & & & +x_7 & = & 0 \\
& & & & & & & x_i & \geq & 0 \quad i = 1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Ya tenemos planteado el problema que necesitamos resolver. Escribamos la tabla y apliquemos el método Simplex [3]:

$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
\downarrow & & & & & & & & \\
-3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow
\end{array}
\qquad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T
$$

Primera iteración:

$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
 & \downarrow & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -5 & \\
\hline
0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & \rightarrow \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}
\qquad x = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 0 \end{pmatrix}^T
$$

Segunda iteración:

$$
\begin{array}{ccccccc|cc}
 & & & \downarrow & & & & & \\
0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -7/2 & \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 & \rightarrow \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 &
\end{array}
\qquad x = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}^T
$$

Tercera iteración:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 & 7/2 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2
\end{array}
\qquad x^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} & 0 & \mathbf{\frac{7}{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T
$$

**Observación 3.1** *En la última iteración todas las variables artificiales salieron de la base, los costos reducidos asociados toman todos el valor 1 (esto siempre es cierto) y* $z^* = 0$.

[3] Las negrillas señalan las variables en la base para cada iteración.

Ya tenemos una solución básica factible. Ahora eliminamos las variables artificiales y recalculamos los costos reducidos y el valor objetivo para esta solución:

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2
\end{array}
$$

El vector de costos está dado por $c^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$c_B^T = \begin{pmatrix} c_2 & c_4 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_N^T = \begin{pmatrix} c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

El orden en que se escribe el costo para las variables básicas depende del vector en la base canónica que las mismas tienen asociado.

Reconozcamos las matrices $B$ y $N$ en el problema original $(P)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los costos reducidos serán:

$$\bar{c_B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{c_N}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = 0 - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{columna(s) no básica(s) del cuadro: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

Además:

$$\pi^t b = c_B^T B^{-1} b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Con esto el cuadro queda:

$$
\begin{array}{cccc|cc}
 & & \downarrow & & & \\
0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & \\
\hline
0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & 7/2 & \rightarrow \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 &
\end{array}
$$

Pivoteando aquí según las reglas de la Fase II, obtenemos:

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}
$$

que es un cuadro que satisface la condición de optimalidad. Entonces la solución del problema $(P)$ es: $x^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T$ y el valor de la función objetivo es $\pi^T b = -4$.