Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar

Repaso del algoritmo SIMPLEX

`Marcel Goic F.`[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Desempolvando lo que ya sabemos

Algunos resultados importantes de programación lineal:

- El óptimo de todo PL (en caso de existir) se encuentra en un vértice del poliedro que define el conjunto factible.
- Sea un poliedro definido por $A \cdot x = b$ con $A \in I\!R^{m \times n}$, $x \in I\!R^n$, $b \in I\!R^m$, $rg(A) = m$. Todo vértice del poliedro puede ser caracterizado como una solución básica en que se escogen m variables (asociadas a m columnas de A)para que formen la base y las $(n-m)$ variables restantes (asociadas a $(n-m)$ columnas de A) para ser fijadas en 0. Para encontrar el valor de las m componentes no nulas del vértice, resolvemos el sistema de ecuaciones de $m \times m$ resultante. Finalmente, para resolver el sitema de ecuaciones lo mas directo es realizar eliminación gaussiana.

De esta manera, lo que hace simplex es ir escogiendo columnas de manera inteligente de modo de ir recorriendo los vértices del poliedro factible. Así, cada vez que tenemos un vértice necesitamos:

1. Ver si es óptimo.
2. Si no es óptimo, escoger cual es el nuevo vértice determinando cual variable entra a la base y cual sale.
3. Adicionalmente debemos ser capaces de determinar cuando:
   - La solución es no acotada: se puede mejorar infinitamente el valor de la función objetivo.
   - Existen óptimos alternativos: toda una cara del poliedro tiene el mismo valor de la función objetivo.
   - La solución es degenerada: un vértice esta sobredeterminado por lo que de una iteración a la otra estaremos en el mismo vértice.

2. Algoritmo SIMPLEX (para problemas de minimización)

La presente sección corresponde a la transcripción de material de clase preparado por el distinguidísimo catedratico Sr.Felipe Caro V.

- **Forma canónica o usando tablas**

  Se tiene el problema lineal en su forma canónica para alguna solución básica factible dada ($\bar{b}_i \geq 0 \forall i = 1, ..., m$)). Las variables básicas son aquellas que tienen costo reducido nulo y su respectiva columna es un vector canónico de R^m.

$$\begin{array}{ccc|c} \bar{c_1} & \cdots & \bar{c_n} & -\bar{z} \\ \hline \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

1. Si $\bar{c}_j \geq 0\ \forall j = 1, ..., n$ entonces la solución es **óptima** (las variables básicas son iguales a b_i y las no básicas son nulas).
2. Si alguno de los costos reducidos es negativo ($\bar{c}_j < 0$ para algún j) entonces se debe escoger una variable no básica x_s para que entre a la base. No es obligatorio, pero usualmente se usa el criterio $\bar{c}_s = \text{mín}\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$.
3. Si $\bar{a}_{is} \leq 0\ \forall\ i = 1, ..., m$ entonces el problema es **no acotado**. Si $\bar{a}_{is} > 0$ para algún i, entonces se determina la variable que sale de la base mediante el criterio:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

4. Se pivotea sobre $\bar{a}_{rs}$ para actualizar la tabla o la forma canónica. Las fórmulas de actualización son:

$$\bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is} \cdot \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \qquad \bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is} \cdot \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

$$\bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s \cdot \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \qquad -\bar{z} \leftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s \cdot \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

5. Volver a 1.

- **Forma matricial**

  Se el problema en su forma estandar y se asume que se conoce una base B primal factible (o sea se tiene un vértice factible inicial)

$$\begin{aligned} \text{mín } & z = c^t \cdot x \\ s.a \quad & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

1. Determinar la inversa B^{-1} de la base.
2. Determinar la solución básica factible asociada a la base B. Para ello se tiene que resolver el sistema $B \cdot x_b = b$ que tiene solución única. Luego $x_b = \bar{b} = B^{-1} \cdot b$ y $z = c_B^t \cdot \bar{b}$.
3. Determinar si esta solución es óptima aplicandoel criterio de optimalidad. Para esto es necesario calcular los costos reducidos asociados a las variables no básicas $\bar{c}_j = c_j - c_B^t B^{-1} A_{.j}$. Si $\bar{c}_j \geq 0\ \forall j = 1, ..., n$ entonces la solución es **óptima**. En caso contrario, efectuar el cambio de base.

4. Determinar la columna que entra a la base. Sea $\bar{c}_s = \text{mín}\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$, entonces la variable x_s aumentará su valor y la columna $A_{\cdot s}$ entra a la base.
5. Determinar la columna que sale de la base. Calcular $\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1}A_{\cdot s}$. Si $\bar{A}_{\cdot s} \leq \vec{0}$ entonces el problema es **no acotado**. De lo contrario determinar r tal que
$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$
Entonces la variable básica de la ecuación r es la primera que se anula cuando x_s crece, por lo tanto la columna $A_{\cdot r}$ sale de la base.
6. Actualizar la base y volver a 1.

3. Fase I del algoritmo Simplex.

Para iniciar el proceso iterativo, simplex necesita un vértice (base) factible inicial. Si en los coeficientes del problema original aparece una identidad y todos los lados derechos tenemos una base factible inicial trivial: la correspondiente a las variables que forman la identidad[2].

Sin embargo, en muchos casos esto no ocurre, por lo que tenemos que disponer de un método para hallar soluciones básica factibles si las hay. Esto consiste en agregar tantas variables **artificiales** como sea necesario para formar una identidad y luego resolver un problema de optimización consistente en tratar de que dichas variables artificiales se hagan nulas y por tanto se puedan eliminar. Para ello tratamos de minimizar la suma de variables artificiales:

- Si la suma óptima de variables artificiales es no nula significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.
- Si la suma óptima de variables artificiales es nula significa que todas las variables artificiales son nulas y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible:
  - Si ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces tomamos dicha base como vértice inicial para la fase II.
  - Si existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.

4. Problemas

4.1. Problema 1

Resolver usando el algoritmo simplex el siguiente problema:

[2] típicamente las variables de holgura

$$\begin{array}{llcr} & \text{máx } z = 2x_1 + 3x_2 & & \\ s.a & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 - 3x_2 & \geq & -9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución

Pasamos el problema a forma estandar:

$$\begin{array}{llcr} & \text{mín } z = -5x_1 - 3x_4 & & \\ s.a & x_1 + x_2 + x_2 & = & 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

- Iteración 1:
  Trivialmente tenemos una base factible formada por las variables de holgura x_3 y x_4:

x_3	x_4	x_1	x_2	
0	0	-2	-3	0
1	0	1	1	5
0	1	1	3	9

  Notamos que esta en forma aanónica porque las variables básicas forman cada una un vector caaónico de $\mathbb{R}^2$ y tienen funciones coeficeintes en la función objetivo nulos. Así, podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

  1. **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables no básicas con costos reducidos negatiaos.
  2. **Entrada:** Entra la variable con menor costo reducido: x_2.
  3. **Salida:** $\text{mín}\{\frac{5}{1}, \frac{9}{3}\} = 3$, luego, sale x_4.

- Iteración 2:
  Al intercambiar las variables x_2 por x_4 nuestra base queda conformada por las variables x_3 y x_2:

x_3	x_7	x_1	x_4	
0	-3	-2	0	0
1	1	0	0	5
0	3	1	1	9

Notamos que no esta en forma canónica porque lo que tenemos que pyvotear:

x_3	x_2	x_1	x_4	
0	0	-1	1	9
1	0	2/3	-1/3	3
0	1	1/3	1/3	3

Notar aquí que nuestra solucion en curso es $(0, 3, 2, 2)$ con valor de la función objetivo de 9. Como ahora está en forma canónica por lo que podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

1. **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables no básicas con costos reducidos negativos.
2. **Entrada:** Entra la varianle con menor costo reducido: x_1.
3. **Salida:** $\min\{\frac{2}{2/3}, \frac{3}{1/3}\} = 3$, luego, sale x_3.

- ITERACION 3:
  Al intercambiar las variables x_1 por x_3 nuestra base queda conformada por las variables x_1 y x_2:

x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	0	0	0	9
2/3	0	1	-1/3	2
1/3	1	0	1/3	3

Notamos que no esta en forma canónica porque lo que tenemos que pivotear:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	3/2	1/2	12
1	0	3/2	-1/2	3
0	1	-1/2	1/2	2

Notar aquí que nuestra solucion en curso es $(3, 2, 0, 0)$ con valor de la función objetivo de 12. Como ahora está en forma canónica por lo que podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

1. **Optimalidad:** Es óptimo porque no existen variables no básicas con costos reducidos negativos.

La forma matricial es completamente análoga, solo que en vez de pivotear, todas las actualizaciones se explicitan por medio del calculo de operaciones matriciales:

- $\overline{c_R} = c_R - c_B B^{-1} R$

- $\overline{b} = B^{-1}b$
- $\overline{A_{.j}} = B^{-1}A_{.j}$

Así por ejemplo, la iteracion 2 se realizaría matricialmente como sigue:

$$(\overline{c_1}, \overline{c_4}) = (-2, 0) - (0, -3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = (-1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} \\ \overline{a_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

1. **Optimalidad:** Como $\overline{c_1} < 0$ no es óptimo
2. **Entrada:** Entra la única variable con costo reducido negativo: x_1
3. **Salida:** $\min\{\frac{2}{2/3}, \frac{3}{1/3}\} = 3$ por lo que sale x_3

$\odot$

4.2. Problema 2

Resolver el siguiente problema usando el algoritmo simplex:

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcr} s.a & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución

Como siempre, comenzamos por escribir el problema en la forma estandar:

$$\min\ z = -6x_1 - 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcr} s.a & x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Si bien tenemos lados derechos positivos, no tenemos una submatriz identidad en la matriz de coeficientes y por lo tanto no tenemos una solución básica factible inicial para comenzar a iterar con el algoritmo simplex. Luego debemos resolver la Fase I del algoritmo simplex. Para ello agregamos variables artificiales y resolvemos el siguiente problema:

$$\min\ w = x_5$$

$$\begin{array}{lrcl} s.a & x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 & = & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

- Iteración 1 (Fase I):
  Nuestra base esta compuesta por las variables x_3 y x_5. Luego el tableau asociado es:

x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	
0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	10
0	1	2	1	-1	4

  No esta en forma canónica (hay costos reducidos de variables básicas no nulos), por lo que debemos pivotear llegando al siguiente tableau:

x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	
0	0	-2	-1	1	-4
1	0	1	1	0	10
0	1	2	1	-1	4

  Ahora, como esta en forma estandar podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida:

  1. **Optimalidad:** No es óptimo porque existen costos reducidos negativos.
  2. **Entrada:** Entra x_1 porque tiene el minimo costo reducido.
  3. **Salida:** $\min\{\frac{10}{1}, \frac{4}{2}\} = 2 \Rightarrow$ sale x_5.

- Iteración 2 (Fase I):
  Nuestra base ahora esta compuesta por las variables x_3 y x_1. Luego el tableau asociado es:

x_3	x_1	x_5	x_2	x_4	
0	-2	0	-1	1	-4
1	1	0	1	0	10
0	2	1	1	-1	4

  No esta en forma canónica por lo que debemos pivotear llegando al siguiente tableau:

x_3	x_1	x_5	x_2	x_4	
0	0	1	0	0	0
1	0	-1/2	1/2	1/2	8
0	1	1/2	1/2	-1/2	2

Ahora, como esta en forma estandar podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida:

1. **Optimalidad:** Es óptimo porque no existen costos reducidos negativos.

Ahora, como $\sum$(variables artificiales) $= 0 \Rightarrow$ tenemos una solución basica factible la cual esta dada por: $x_1 = 2$, $x_3 = 8$ (variables básicas) y $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ (variables no básicas).

Con esto, podríamos tomar esta solución y partir todo de nuevo para resolver la Fase II, pero es mas eficiente continuar con la solución en curso cambiando la función objetivo y eliminando las variable artificiales (que ya sabemos que no nulas).

- Iteración 1 (Fase II):
  Nuestra base esta compuesta por las variables x_3 y x_1. Luego el tableau asociado es:

x_3	x_1	x_2	x_3	
0	-6	-4	0	0
1	0	1/2	1/2	8
0	1	1/2	-1/2	2

  No esta en forma canónica (hay costos reducidos de variables básicas no nulos), por lo que debemos pivotear llegando al siguiente tableau:

x_3	x_1	x_2	x_4	
0	0	-1	-3	12
1	0	1/2	1/2	8
0	1	1/2	-1/2	2

  Ahora, como esta en forma estandar podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida:

  1. **Optimalidad:** No es óptimo porque existen costos reducidos negativos.
  2. **Entrada:** Entra x_4 porque tiene el minimo costo reducido.
  3. **Salida:** $\min\{\frac{8}{1/2}, \frac{2}{-1/2}\} \Rightarrow$ sale x_3.

- Iteración 2 (Fase II):
  Nuestra base ahora esta compuesta por las variables x_4 y x_1. Luego el tableau asociado es:

x_4	x_1	x_2	x_3	
-3	0	-1	0	12
1/2	0	1/2	1	8
-1/2	1	1/2	-1	2

No esta en forma canónica por lo que debemos pivotear llegando al siguiente tableau:

x_4	x_1	x_2	x_3	
0	0	2	6	60
1	0	1	2	16
0	1	1	1	10

Ahora, como esta en forma estandar podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida:

1. **Optimalidad:** Es óptimo porque no existen costos reducidos negativos.

$\odot$