UNIVERSIDAD MAYOR

PARA ESPIRITUS EMPRENDEDORES

*Facultad de Ingeniería*

# APUNTES DE CLASES

# INVESTIGACION OPERATIVA

Profesor: Juan A. Carvajal G.

# I. INTRODUCCION

## A. PROGRAMA DE MATERIAS

### 1. PROGRAMACION LINEAL

*a) Modelación matemática de PPL (Problemas de Programación Lineal).*

*b) Solución gráfica de PPL (2 variables).*

*c) Análisis de sensibilidad gráfico.*

*d) El método "SIMPLEX" de solución de PPL (n variables).*

*e) Dualidad y holguras complementarias.*

*f) Software computacionales para solución de PPL.*

*g) Programación lineal entera.*

### 2. APLICACIONES ESPECIALES DE PROGRAMACION LINEAL

*a) El modelo de Transporte.*

*b) El modelo de Asignación.*

### 3. MODELOS EN REDES

*a) Malla PERT ("Program Evaluation Review Technique") y método CPM ("Critical Path Method").*

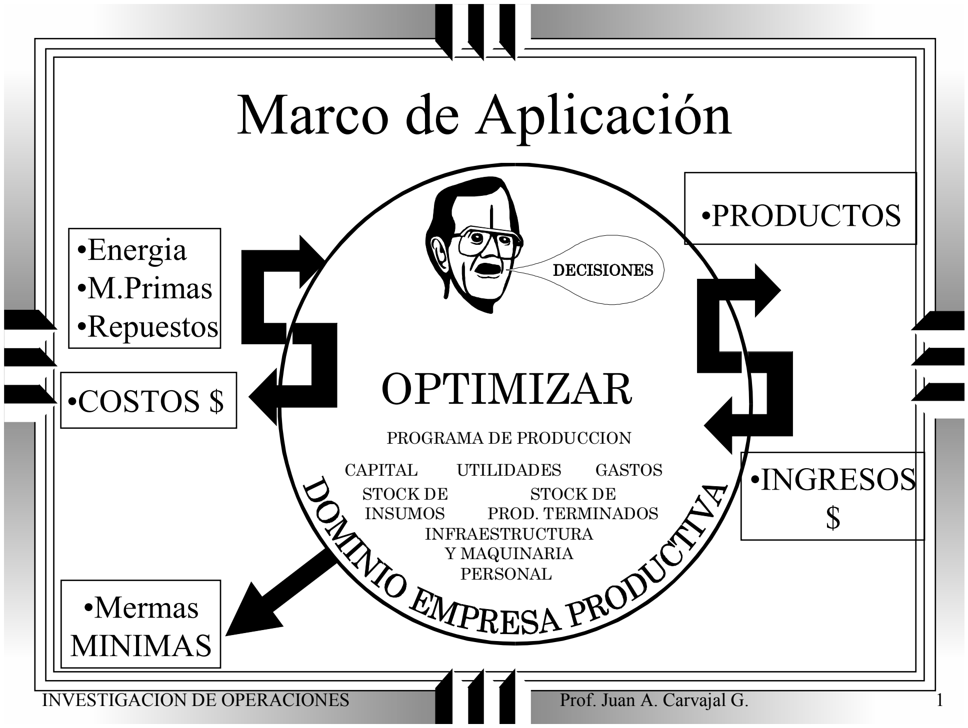
*b) Problemas de Ruta mas corta.*

*c) Arbol mínimo de comunicaciones.*

*d) Flujo máximo.*

*e) Transbordo capacitado.*

## B. MARCO DE APLICACION




## 1. TIPICAS DECISIONES GERENCIALES

### *a) En el ámbito productivo*

(1) Qué producir.
(2) Cuánto producir.
(3) Cuándo producir.
(4) Cómo producir.
(5) A quién asignar las diferentes tareas. (Programación del trabajo).
(6) etc.

### *b) En el ámbito administrativo.*

(1) En que invertir el capital.
(2) Dimensionar los stocks de materias primas, repuestos, productos terminados, etc.
(3) Definir el sistema de mantenimiento de equipos y maquinarias.
(4) Definir el sistema de abastecimiento hacia sucursales.
(5) Definir el sistema de adquisición de materias primas.
(6) Dimensionar la fuerza de trabajo.
(7) etc.

## 2. METODOS DE TOMA DE DECISIONES

a) ***Decisiones basadas en la INTUICION.***

b) ***Decisiones basadas en la EXPERIENCIA.***

c) ***Decisiones basadas en un METODO CIENTIFICO de análisis del sistema.***

## 3. FASES DEL METODO CIENTIFICO DE ANALISIS DE FENOMENOS

a) ***Observar.***

b) ***Plantear una hipótesis o modelo del comportamiento del sistema y su reacción ante diferentes estímulos.***

c) ***Implementar experiencias que comprueben la validez de la hipótesis.***

d) ***Observar los resultados y mejorar la hipótesis si esta no se cumple.***

## 4. FASES DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

a) ***Observar el sistema considerando el objetivo que se persigue con el estudio.***

b) ***Identificar las variables y restricciones que influyen positiva y negativamente en el comportamiento del sistema y en el objetivo propuesto y determinar o calcular los parámetros de interrelación entre ellas.***

c) ***Plantear el modelo matemático que representa el comportamiento del sistema a la luz del objetivo de optimización perseguido.***

d) ***Encontrar una solución teórica óptima a través de algoritmos matemáticos apropiados.***

e) ***Implementar la solución teórica óptima.***

f) ***Observar los resultados reales y retroalimentar hacia a) si la solución teórica difiere de la real.***

## 5. DEFINICIONES BASICAS

a) ***OPTIMO***

Lo mejor posible dadas las restricciones del sistema.

b) ***EFICAZ***

Quién logra cumplir el objetivo.

c) ***EFICIENTE***

Quién logra cumplir el objetivo al menor costo posible, en tiempo, en dinero, etc.

d) ***MODELO:***

Representación de la Realidad
***ABSTRACCION SELECTIVA*** DE LA REALIDAD

Ejemplos :
Modelos físicos (Maquetas)

Modelos pictóricos (Mapas)
Modelos icónicos (De imagen Ej. TV)
Modelos matemáticos Ej. $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{g} * \boldsymbol{t}^2}{2}$ (GALILEO)

# II. PROGRAMACION LINEAL

## *A. MODELACION MATEMATICA DE PPL*

### 1. FORMA GENERAL DE UN MODELO MATEMATICO DE UN PPL

F.O. Función Objetivo **MAX** o **MIN** $Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \ldots\ldots\ldots + c_n X_n$

**Sujeto a** :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n} X_n \quad \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \quad b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n} X_n \quad \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \quad b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n} X_n \quad \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \quad b_3$$

-- -- -- -- --
-- -- -- -- --
-- -- -- -- --
-- -- -- -- --

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} X_n \quad \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \quad b_m$$

DONDE :

$Z$ = Representa un parámetro o cantidad que se desea optimizar (Maximizar o Minimizar). Ej.: Ingresos, Utilidades, Costos, Tiempo de ejecución de un trabajo, etc.

$c_j$ = Coeficiente de proporcionalidad. Para efectos didácticos es una constante, pero en la realidad normalmente su valor será probabilístico.

$X_j$ = VARIABLES DE DECISION

$a_{ij}$ = Coeficiente de proporcionalidad. Para efectos didácticos es una constante, pero en la realidad normalmente su valor será probabilístico.

$b_i$ = Valor que representa la disponibilidad de un recurso (***Limitación***), límites de producción, disponibilidad de materia prima, disponibilidad de horas hombre, etc., o un ***requerimiento*** como demanda, compromisos de entrega, etc. Todas ellas forman parte de las restricciones del entorno. Para efectos didácticos es una constante, pero en la realidad normalmente su valor será probabilístico.

$n$ = Cantidad de Variables de Decisión.

$m$ = Cantidad de Restricciones.

n no necesariamente debe ser igual a m

## *B. SOLUCION GRAFICA DE PPL*

### 1. Repaso de Geometría Analítica Plana

***a)*** ***La ecuación*** $aX + bY = c$ ***representa en el plano una recta de pendiente*** $m = -\frac{a}{b}$

***b)*** ***La ecuación*** $aX + bY = 0$ ***representa en el plano una recta que pasa por el origen de coordenadas.***

***c)*** ***En la ecuación normalizada de la recta*** $\frac{X}{c/a} + \frac{Y}{c/b} = 1$ ***los términos*** $c/a$ y $c/b$ ***representan los puntos de corte de los ejes X e Y, respectivamente.***

***d)*** ***La función*** $Z = aX + bY$***,, con Z una constante indeterminada, representa en el plano a una familia de rectas paralelas.***

***e)*** ***La inecuación*** $aX + bY \leq c$ ***representa un área que se inicia en la recta*** $aX + bY = c$ ***y se extiende acercándose hacia el origen de coordenadas.***

***f)*** ***La inecuación*** $aX + bY \geq c$ ***representa un área que se inicia en la recta*** $aX + bY = c$ ***y se extiende alejándose del origen de coordenadas.***

***g)*** ***La solución*** $(X_0, Y_0)$ ***del sistema de ecuaciones*** $\begin{matrix} aX + bY = c \\ dX + eY = f \end{matrix}$ ***indica las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.***

### 2. Metodología de solución:

***a)*** ***Encuentre el modelo matemático del PPL en dos variables.***

***b)*** ***Encuentre las ecuaciones normalizadas de las rectas límite de las restricciones.***

***c)*** ***Tomando en consideración los puntos de corte definidos en las ecuaciones normalizadas, dibuje los ejes coordenados con una escala apropiada.***

***d)*** ***Dibuje en los ejes coordenados las rectas límite de las restricciones e identifique el lugar geométrico que cada restricción representa en el plano.***

***e)*** ***Identifique y destaque la "ZONA DE SOLUCIONES FACTIBLES", definida como el conjunto intersección de todos los lugares geométricos que las restricciones representan en el plano.***

***f)*** ***Dibuje una de las rectas de la familia de rectas que la F.O. representa en el plano, dando un valor arbitrario a Z, pero adecuado a la escala de los ejes coordenados y denomínela "Recta Objetivo de Referencia" (r.o.r.).***

***g)*** ***Dependiendo si la F.O. es de maximización o de minimización, traslade la recta paralelamente, en el sentido de aumento o disminución de Z, hasta que esta***

***toque un punto extremo de la zona de soluciones factibles. Identifique dicho punto como óptimo máximo u óptimo mínimo.***

***h)*** ***Para encontrar las coordenadas del punto óptimo resuelva el sistema de ecuaciones de las rectas límite cuya intersección define dicho punto.***

***i)*** ***Para encontrar el valor óptimo de Z reemplace las coordenadas del punto óptimo en la función objetivo.***

**PROBLEMA EJEMPLO EN 2 VARIABLES (Solución Gráfica)**

Una industria fabrica tres productos químicos; A, B y C. Estos productos se obtienen por medio de cualesquiera de dos procesos; los procesos 1 y 2.

Una hora de ejecución del proceso 1 tiene un costo de US$ 4 y se obtienen 2 unidades del producto "A", 1 unidad del producto "B" y 1 unidad del producto "C". Por otra parte, una hora de ejecución del proceso 2 cuesta US$ 1 y rinde 4 unidades de producto "A" y 1 unidad de producto "B".

Para satisfacer la demanda de los clientes se deberían producir a lo menos 8 unidades de producto "A", 5 unidades de producto "B" y 3 unidades de producto "C", diariamente. No obstante lo anterior, las estimaciones del departamento de venta indican que la producción diaria máxima de producto A debería ser a lo más de 16 unidades.

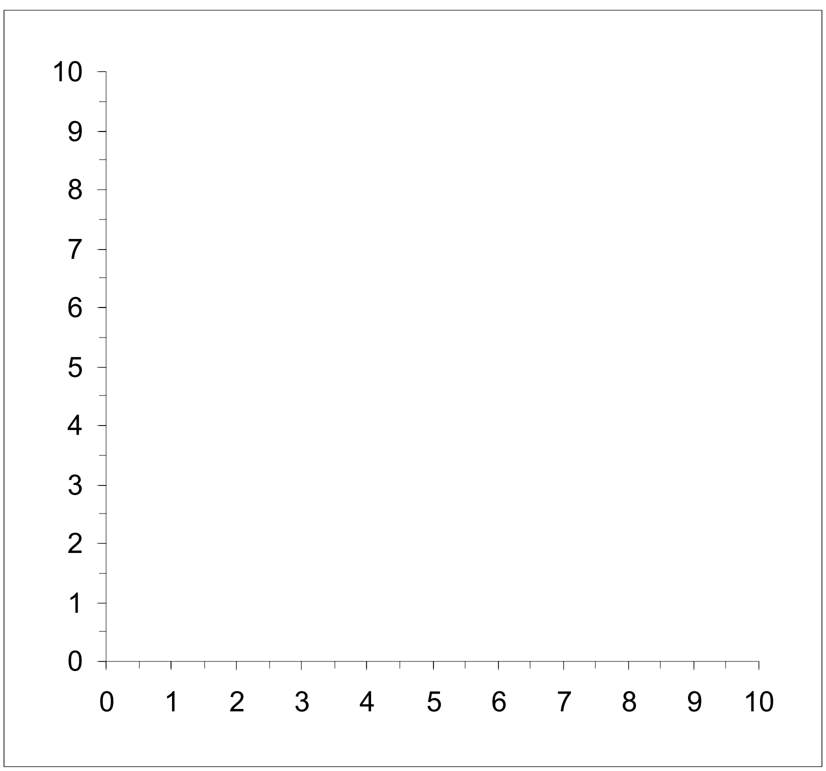
Cada proceso se puede ejecutar como máximo 7 horas al día pues requieren tiempo de preparación.

a. ¿Cuántas horas de ejecución diarias se deben implementar de cada proceso para minimizar el costo y cumplir con los clientes?
b. ¿Cuántas unidades de cada producto se producirán.?
c. ¿Cuál es el costo diario mínimo, alcanzable con su solución.?

**MODELO MATEMÁTICO:**

## ECUACIONES DE LAS RECTAS LIMITE:

## SOLUCION GRAFICA



## PROBLEMA EJEMPLO EN 2 VARIABLES N°2

Una empresa produce dos tipos de producto, el producto 1 y el producto 2. Ambos productos se producen en los mismos departamentos y con la misma maquinaria. El gerente de mercadotecnia cree que podrá vender todos los productos 1 y 2 que sean capaces de producir el próximo mes.
Los antecedentes y restricciones relevantes que se han identificado en el sistema productivo son las siguientes:
Los productos 1 y 2 dejan una utilidad unitaria de $ 5000 y $ 4000 c/u, respectivamente.
El consumo de horas máquina por unidad de producto y la disponibilidad de ellas para el próximo mes se indican en la tabla:

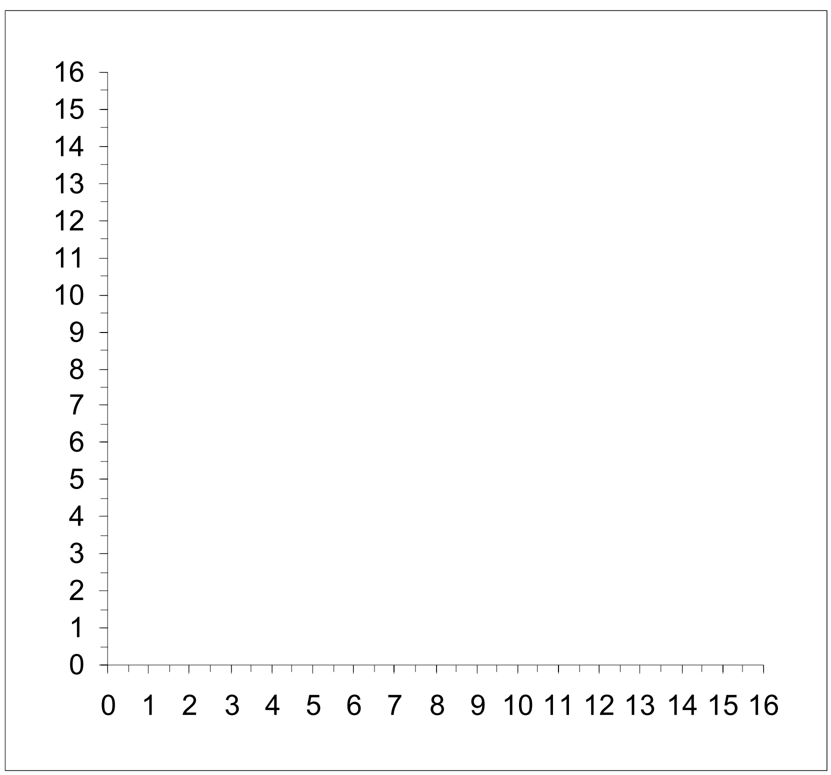
| | HORAS | | |
|---|---|---|---|
| Departamento | Por producto 1 | Por producto 2 | Total disponible |
| A | 10 | 15 | 150 |
| B | 20 | 10 | 160 |

Se ha establecido con el sindicato un número de horas mínimas de trabajo para el personal de la sección control de calidad que es de 135 horas. Cada producto 1 que se fabrique requiere de 30 horas de control y cada producto 2, 10 horas.
Como política de mercado la gerencia ha definido que se debe fabricar a lo menos un producto 2 por cada tres productos 1.
Un cliente importante ha ordenado un total de cinco unidades de producto, en cualquier combinación de tipo 1 y tipo 2.

## MODELO MATEMÁTICO:

## ECUACIONES DE LAS RECTAS LIMITE:

## SOLUCION GRAFICA



## *C. ALGORITMO SIMPLEX*

El método mas conocido para obtener la solución teórica de un PPL en ***n*** variables se denomina Método Simplex.
En general el método consta de dos fases. La primera fase permite encontrar una primera solución factible para el PPL o concluir que el problema no tiene solución. A partir de la solución factible encontrada en la primera fase, la segunda fase permite encontrar una solución óptima única, varias soluciones óptimas alternativas o concluir que el PPL es "no acotado".

### 1. Estandarización del modelo matemático

Para resolver un PPL a través del algoritmo Simplex, es necesario primero estandarizar el modelo matemático, es decir, ordenarlo de una forma tal que sea compatible con las premisas en que se basa el algoritmo. Los requerimientos que debe cumplir un modelo matemático de un PPL para ser resuelto por el método Simplex, son los siguientes:
(Nota: diferentes autores tienen diferentes aproximaciones para tratar este punto. Todas son igualmente válidas y correctas.)

***a) La función objetivo debe ser siempre de Minimización.***

Si la función objetivo es de maximización se debe usar una función auxiliar denominada **Z`** que es igual al negativo de Z y minimizar dicha función auxiliar.

Ejemplo:
Función objetivo original:

$$\text{MAX } Z = 3X_1 + 5X_2 - 7X_3$$

Función objetivo estándar

$$\text{MIN } Z` = -3X_1 - 5X_2 + 7X_3$$

***b) Las variables de decisión deben ser todas no negativas.***

Si en el sistema que el modelo representa existen variables de decisión que sí pueden tomar valores negativos, (Temperatura, profundidad, etc.), dichas variables deben ser reemplazadas en el modelo estándar por una diferencia entre dos variables auxiliares, que se definen como no negativas y excluyentes, es decir si una es mayor que cero la otra debe ser igual a cero.

Ejemplo:
Modelo original :

MAX $Z = 3X_1 + 5X_2 - 7X_3$
Sujeto a :
$3X_1 + 7X_2 - 3X_3 \geq 120$
$4X_1 - 5X_2 + 2X_3 = 80$
$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 20$
$X_1$ y $X_3 \geq 0$ ; $X_2$ = Irrestricta en signo

Modelo estándar

Sea $X_2 = U - V$, entonces:

MIN $Z` = -3X_1 - 5U + 5V + 7X_3$
Sujeto a :
$3X_1 + 7U - 7V - 3X_3 \geq 120$
$4X_1 - 5U + 5V + 2X_3 = 80$
$2X_1 + 3U - 3V + 5X_3 \leq 20$
$X_1$ y $X_3 \geq 0$
U y V $\geq 0$ , $U * V = 0$

***c) Las restricciones deben ser todas igualdades***

Si existen restricciones que son desigualdades, deben transformarse en igualdades agregando variables no negativas denominadas **"holguras",** denotadas por $\mathbf{H_i}$, donde i es el número de la restricción correspondiente a la holgura que se agrega.

Cuando la restricción es del tipo menor o igual que (≤) la variable de holgura tiene coeficiente (+1). Por el contrario, si la restricción es del tipo mayor o igual que (≥) la variable de holgura tiene coeficiente -1.

Ejemplo:
Modelo original:

MAX $Z = 3X_1 + 5X_2 - 7X_3$
Sujeto a :
$3X_1 + 7X_2 - 3X_3 \geq 120$
$4X_1 - 5X_2 + 2X_3 = 80$
$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 20$
$X_1$ y $X_3 \geq 0$ ; $X_2$ = Irrestricta en signo

Modelo estándar

Sea $X_2 = U - V$, entonces :

MIN $Z` = -3X_1 - 5U + 5V + 7X_3$

Sujeto a :

$3X_1 + 7U - 7V - 3X_3 - H_1 = 120$

$4X_1 - 5U + 5V + 2X_3 = 80$

$2X_1 + 3U - 3V + 5X_3 + H_3 = 20$

$X_1$ ; $X_3$ ; $H_1$ y $H_3 \geq 0$

U y V $\geq 0$ , $U * V = 0$

## D. SIMPLEX FASE II

***PROBLEMA EJEMPLO***

Para ilustrar el desarrollo de la Fase II del Algoritmo Simplex utilizaremos el siguiente problema ejemplo:[1]

*Planeación Financiera*. Willie Markit es el presidente de una firma de inversiones personales, que maneja una cartera de valores de un cierto número de clientes. Un cliente nuevo ha solicitado recientemente que la firma le maneje una cartera de $100.000. Al cliente le gustaría limitar su cartera a una combinación de las tres acciones que se muestran en la figura 2-32. Formulen un P.P.L. que permita tomar la mejor decisión para maximizar las utilidades totales que se obtengan de la inversión.

| Acción | Precio por acción | Utilidad anual estimada por acción | Cantidad de Acciones disponibles |
|---|---|---|---|
| A. Gofer Crude | $60 | $7 | 1000 |
| B. Can Oil | $25 | $3 | 1000 |
| C. Sloth Petroleum | $20 | $3 | 1500 |

Figura 2-32 Composición de la cartera

## 1. MODELO MATEMATICO

Sea $\mathbf{X_j}$ la cantidad de acciones tipo j a adquirir (j=A,B,C).

$$F.O.\ \text{MAX}\ Z = 7X_A + 3X_B + 3X_c$$

Sujeto a :

$$\begin{aligned} X_A \quad\quad\quad\quad & \le 1.000 \\ X_B \quad\quad & \le 1.000 \\ X_C & \le 1.500 \\ 60X_A + 25X_B + 20X_C & \le 100.000 \\ X_j \ge 0 \quad \forall j & \end{aligned}$$

[1] Problema 2-5 "Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa", Gould, Eppen y Schmidt, 3ª. Edición, 1992

## 2. MODELO MATEMATICO ESTANDARIZADO

Sea $\mathbf{X_j}$ la cantidad de acciones tipo j a adquirir (j=A,B,C).

$$F.O.\ \text{MIN}\ Z' = -7X_A - 3X_B - 3X_c$$

Sujeto a :

$$\begin{aligned}
X_A \qquad\qquad + H_1 \qquad\qquad &= 1.000 \\
X_B \qquad\qquad + H_2 \qquad\quad &= 1.000 \\
X_C \qquad\qquad + H_3 \qquad &= 1.500 \\
60X_A + 25X_B + 20X_C \qquad\qquad + H_4 &= 100.000 \\
X_j \geq 0 \quad H_i \geq 0 \quad \forall j \ , \ \forall i &
\end{aligned}$$

## 3. TABLA SIMPLEX ORIGINAL

La tabla simplex original es la representación tabular de las ecuaciones de un modelo de programación lineal estandarizado. En nuestro ejemplo la tabla simplex original sería:

| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 |
| | 60 | 25 | 20 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100000 |
| $c_j$ | -7 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## 4. TABLA SIMPLEX CANONICA

Una tabla simplex se encuentra en forma *canónica* cuando en su matriz de coeficientes existe una matriz identidad de orden (m+1), siendo m el número de restricciones.
En una tabla simplex canónica se distinguen ***VARIABLES BASICAS*** y ***VARIABLES NO BASICAS***. Son variables básicas aquellas asociadas a las columnas de la matriz identidad (Se destacan con *****) y son no básicas las restantes. Las variables no básicas tienen ***valor cero*** por definición.
Una tabla simplex canónica SIEMPRE representa una SOLUCION FACTIBLE para el problema de programación lineal. Cuando todas las restricciones de un P.P.L. son del tipo limitaciones (≤), la tabla simplex original siempre estará en forma canónica y siempre representará la solución nula, es decir, todas las variables de decisión iguales a cero, las

variables de holgura iguales al término libre de la restricción y la función objetivo igual a cero. (Es el resultado de hacer nada).

**Tabla simplex canónica del problema ejemplo:**
Variables básicas $H_1$, $H_2$, $H_3$ y $H_4$
Variables no básicas $X_A$, $X_B$ y $X_C$
Solución Factible:
$X_A$, $X_B$ y $X_C$ = 0; $H_1$ =1000, $H_2$ =1000, $H_3$ =1500, $H_4$ = 100.000, Z’ = 0; Z=0

| | | | | * | * | * | * | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z’ | $b_i$ |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 |
| | 60 | 25 | 20 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100000 |
| $c_j$ | -7 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## 5. CONDICION DE OPTIMALIDAD

Una tabla simplex canónica representa una solución óptima para el P.P.L. si y sólo si todos los coeficientes $c_j$ son no negativos.

$$\boxed{c_j \geq 0 \quad \forall j}$$

## 6. MEJORAMIENTO DE UNA SOLUCION

Si en una tabla simplex canónica existen $c_j$ negativos, significa que la solución no es óptima pero que sí puede mejorarse, es decir, obtener un mejor valor para la F.O.
El mejoramiento de una solución se realiza efectuando combinaciones lineales entre las filas de la tabla, es decir, entre las ecuaciones del modelo estandarizado. Estas combinaciones lineales permiten reemplazar una variable actualmente básica por otra que en la actualidad no lo es y dan origen a una nueva solución con un mejor valor para la F.O. que se intenta optimizar.

***a) Criterio de Entrada a la Base de Solución***

Debe entrar a la base de solución una variable no básica asociada a un $c_j$ negativo. Normalmente conviene hacer entrar a la base aquella variable no básica asociada al $c_j$ mas negativo.

***b) Criterio de Salida de la Base de Solución***

Debe salir de la base de solución aquella variable básica que tiene su elemento unidad (1) en aquella fila para la cual se verifica el mínimo cuociente entre el término libre ($b_i$) y el coeficiente de la variable que entrará a la base ($a_{ie}$) en cada restricción. Este cuociente está definido sólo para los valores ($a_{ie}$) estrictamente mayores que cero.

$$\left[\frac{b_i}{a_{ie}}\right]_{MIN} \text{; con } a_{ie} > 0$$

| | | | * | * | * | * | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$X_A$** | **$X_B$** | **$X_C$** | **$H_1$** | **$H_2$** | **$H_3$** | **$H_4$** | **-Z'** | **$b_i$** | **$b_i/a_{ie}$** | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 1000/1 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | X | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | X | |
| | 60 | 25 | 20 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100000 | 100000/60 | F4-60F1 |
| $c_j$ | -7 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | F5+7F1 |

| | * | | | | * | * | * | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **$X_A$** | **$X_B$** | **$X_C$** | **$H_1$** | **$H_2$** | **$H_3$** | **$H_4$** | **-Z'** | **$b_i$** | **$b_i/a_{ie}$** |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | |
| | 0 | 25 | 20 | -60 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40000 | |
| $c_j$ | 0 | -3 | -3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7000 | |

Esta nueva tabla representa otra solución factible para el P.P.L., a saber:
**$X_A$=1.000, $X_B$ , $X_C$ y $H_1$=0 , $H_2$=1.000 , $H_3$=1.500 , $H_4$=40.000 , Z'= -7.000 , Z = 7.000**

La solución tiene un mejor valor para Z pero no es aún la óptima pues existen cj < 0, por lo que se debe mejorar.

| | $X_A$ | ↓ $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | ↑ $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | * | | | | * | * | * | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | X | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 1000/1 | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | X | |
| | 0 | 25 | 20 | -60 | 0 | 0 | 1 | 0 | 40000 | 40000/25 | F4-25F2 |
| $c_j$ | 0 | -3 | -3 | 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7000 | | F5+3F2 |

| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | * | * | | | | * | * | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | |
| | 0 | 0 | 20 | -60 | -25 | 0 | 1 | 0 | 15000 | |
| $c_j$ | 0 | 0 | -3 | 7 | 3 | 0 | 0 | 1 | 10000 | |

Esta nueva tabla representa otra solución factible para el P.P.L., a saber:
**$X_A$=1.000, $X_B$=1.000, $X_C$, $H_1$ y $H_2$=0, $H_3$=1.500 , $H_4$=15.000 , Z'= -10.000 ,
Z = 10.000**

La solución tiene un mejor valor para Z pero no es aún la óptima pues existen cj < 0, por lo que se debe mejorar.

| | $X_A$ | $X_B$ | ↓ $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | ↑ $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | * | * | | | | * | * | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | X | | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | X | | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | 1500/1 | | F3-F4 |
| | 0 | 0 | 20 | -60 | -25 | 0 | 1 | 0 | 15000 | 15000/20 | (1/20) | |
| $c_j$ | 0 | 0 | -3 | 7 | 3 | 0 | 0 | 1 | 10000 | | | F5+3F4 |

| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | * | * | * | | | * | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 0 | 0 | 3 | 5/4 | 1 | -1/20 | 0 | 750 | |
| | 0 | 0 | 1 | -3 | -5/4 | 0 | 1/20 | 0 | 750 | |
| $c_j$ | 0 | 0 | 0 | -2 | -3/4 | 0 | 3/20 | 1 | 12250 | |

Esta nueva tabla representa otra solución factible para el P.P.L., a saber:
**$X_A$=1.000, $X_B$=1.000, $X_C$=750 , $H_1$ , $H_2$ y $H_4$=0, $H_3$=750 , Z'= -12.250 ,
Z = 12.250**

La solución tiene un mejor valor para Z pero no es aún la óptima pues existen cj < 0, por lo que se debe mejorar.

| | * | * | * | | | * | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | ↓$H_1$ | $H_2$ | ↑$H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 1000/1 | F1-F3 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | X | |
| | 0 | 0 | 0 | 3 | 5/4 | 1 | -1/20 | 0 | 750 | 750/3 | (1/3) |
| | 0 | 0 | 1 | -3 | -5/4 | 0 | 1/20 | 0 | 750 | X | F4+3F3 |
| $c_j$ | 0 | 0 | 0 | -2 | -3/4 | 0 | 3/20 | 1 | 12250 | | F5+2F3 |

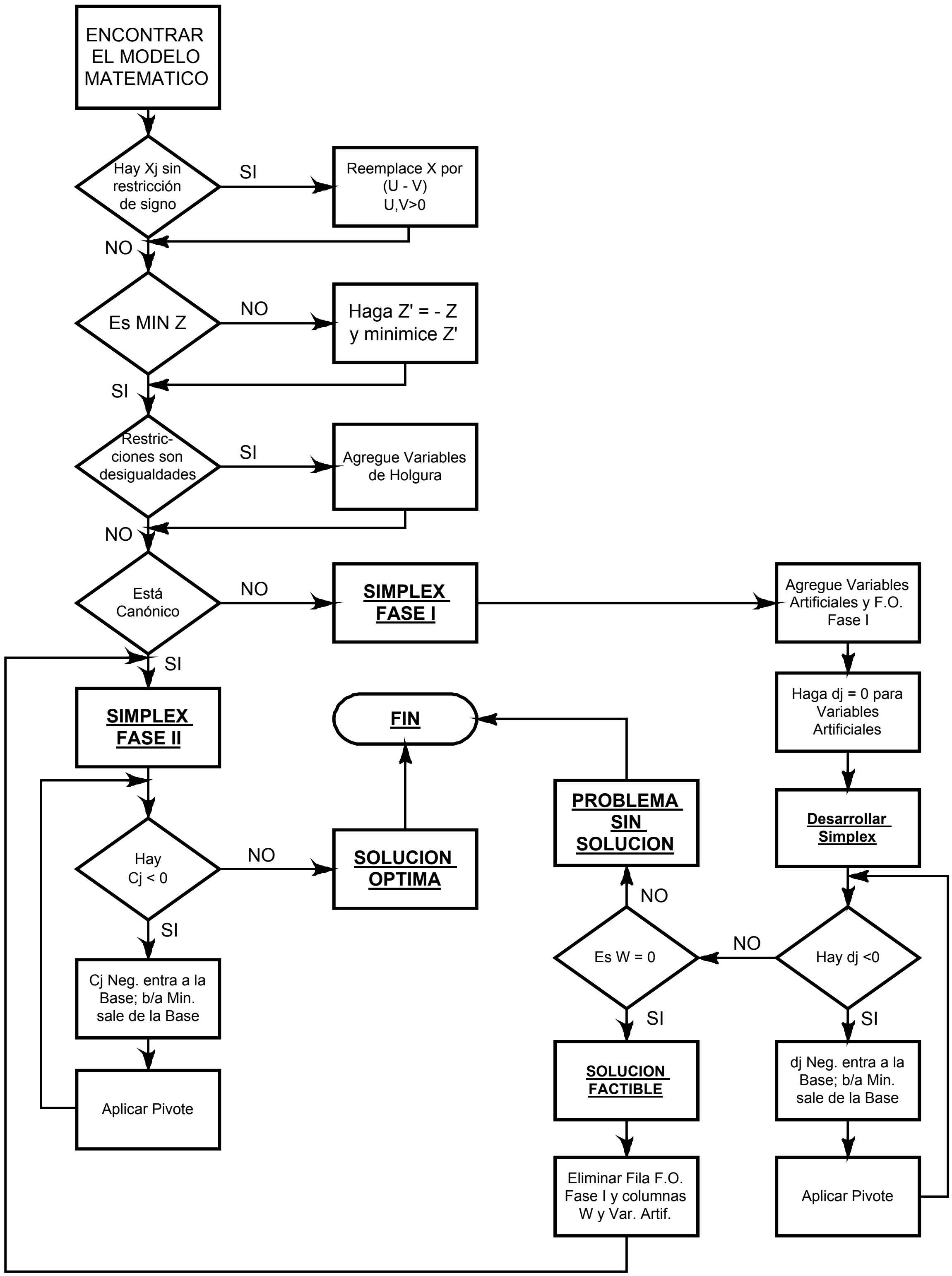
| | * | * | * | * | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_A$ | $X_B$ | $X_C$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | -Z' | $b_i$ | $b_i/a_{ie}$ |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | -5/12 | -1/3 | 1/60 | 0 | 750 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1000 | |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 5/12 | 1/3 | -1/60 | 0 | 250 | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1500 | |
| $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/12 | 2/3 | 7/60 | 1 | 12750 | |

Esta nueva y última tabla representa la solución óptima para el P.P.L. pues cumple con la condición de optimalidad.

La solución óptima única del PPL es:

**$X^*_A$=750, $X^*_B$=1.000, $X^*_C$=1.500, $H^*_1$=250, $H^*_2$, $H^*_3$ , y $H^*_4$=0, $Z'^*$= -12.750 ,
$Z^*$ = 12.750**

# DIAGRAMA DE FLUJO ALGORITMO SIMPLEX
# FASE I Y FASE II



## *E. DUALIDAD Y HOLGURAS COMPLEMENTARIAS*

Considérense los siguientes dos problemas de programación lineal :

PROBLEMA Nº 1

$$\begin{aligned}
&\text{MAX} && Z = 40X_1 - 53X_2 + 65X_3 \\
&\text{Sujeto a :} && 25X_1 + 12X_2 - 13X_3 \leq 120 \\
& && 7X_1 - 5X_2 + 20X_3 = 250 \\
& && -3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 56 \\
& && 25X_1 + 12X_2 + 15X_3 \geq 215 \\
& && X_1 , X_2 \geq 0 \, ; X_3 = \text{irrestricta en signo}
\end{aligned}$$

PROBLEMA Nº 2

$$\begin{aligned}
&\text{MIN} && Y = 120\Pi_1 + 250\Pi_2 + 56\Pi_3 + 215\Pi_4 \\
&\text{Sujeto a :} && 25\Pi_1 + 7\Pi_2 - 3\Pi_3 + 25\Pi_4 \geq 40 \\
& && 12\Pi_1 - 5\Pi_2 + 4\Pi_3 + 12\Pi_4 \geq -53 \\
& && -13\Pi_1 + 20\Pi_2 + 5\Pi_3 + 15\Pi_4 = 65 \\
& && \Pi_1 \geq 0 \, ; \Pi_3 , \Pi_4 \leq 0 \\
& && \Pi_2 = \text{irrestricta en signo}
\end{aligned}$$

Llamaremos al problema Nº 1 el problema ***PRIMAL*** y al problema Nº 2 el ***DUAL*** del anterior.

Es fácil percatarse que las relaciones entre el primal y su dual son las siguientes:

1. El número de variables del dual es igual al número de restricciones del primal y el número de restricciones del dual es igual al número de variables del primal.
2. El sentido de optimización del dual es el contrario al del primal.
3. Los coeficientes de las variables en la función objetivo del dual son los elementos del vector disponibilidad de recursos del primal ( $b_i$ ).
4. Los coeficientes de las variables en la k-ésima restricción del dual son los coeficientes de la k-ésima variable en cada una de las restricciones del primal.
5. El término libre de la k-ésima restricción del dual es el coeficiente de la k-ésima variable en la función objetivo del primal.
6. El comparador lógico en la k-ésima restricción del dual es de igualdad si y sólo si la k-ésima variable del primal es irrestricta en signo.
7. Para las restantes restricciones duales:

Si el problema primal es de maximización y la k-ésima variable primal es ≥0, la correspondiente restricción dual será un requerimiento ( ≥ ). Por el contrario, si la k-ésima variable primal es ≤0 la correspondiente restricción dual será una limitación (≤ ).
Si el problema primal es de minimización y la k-ésima variable primal es ≥0, la correspondiente restricción dual será una limitación (≤ ). Por el contrario, si la k-ésima variable primal es ≤0 la correspondiente restricción dual será un requerimiento (≥ ).

8. La k-ésima variable del dual será irrestricta en signo si y sólo si la k-ésima restricción del primal es una igualdad.
9. Para las restantes variables duales:
   Si la restricción primal es un requerimiento del tipo ≥ la correspondiente variable dual será negativa o cero ( ≤ 0); por el contrario, si la restricción primal es una limitación del tipo ≤ la correspondiente variable dual será positiva o cero ( ≥ 0).

## TEOREMA DUAL

Sea $X_j^*$ (j = 1, 2, 3, ………, n) el valor óptimo de las variables de decisión de un problema PRIMAL
y sea $\Pi_i^*$ (i = 1, 2, 3, ………, m) el valor óptimo de las variables de decisión de su problema DUAL; entonces siempre se cumplirá que :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j X_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \Pi_i^*}$$

En otras palabras, tanto el problema primal como su dual tienen el mismo valor óptimo de su función objetivo.

## TEOREMA DE LAS HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

Sea $X_j^*$ (j = 1, 2, 3, ………, n) el valor de las variables de decisión que da origen a ***una solución factible*** de un problema PRIMAL y sea $\Pi_i^*$ (i = 1, 2, 3, ………, m) el valor de las variables de decisión que da origen a ***una solución factible*** de su problema DUAL; entonces , ambas soluciones serán óptimas si se cumple que :

a)

$$\Pi_i^* * \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^* - b_i \right) = 0 \quad (\text{i} = 1, 2, 3, ..., \text{m})$$

b)

$$X_j^* * \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \Pi_i^* - c_j \right) = 0 \quad (\text{j} = 1, 2, 3, \ldots, \text{n})$$

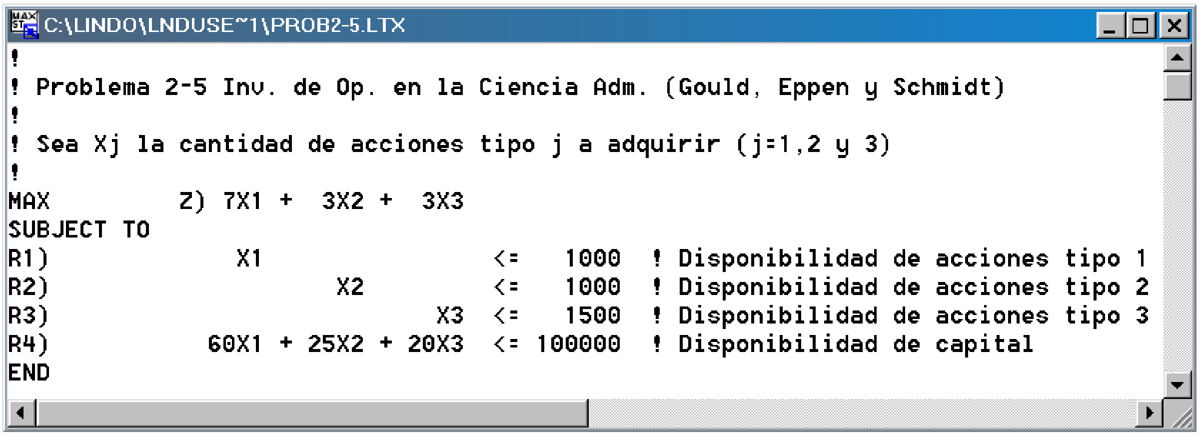
En otras palabras, cuando al reemplazar las variables de una restricción primal por su valor óptimo, la restricción se cumple en su sentido estricto (> o <), entonces se puede concluir que la correspondiente variable del dual es NULA.
En forma similar, cuando al reemplazar las variables de una restricción dual por su valor óptimo, la restricción se cumple en su sentido estricto (> o <), entonces se puede concluir que la correspondiente variable del primal es NULA.

## *F. EL SOFTWARE "LINDO" (Versión 6.1)*

**L** = Linear **IN** = Interactive **D** = Discrete **O** = Optimizer

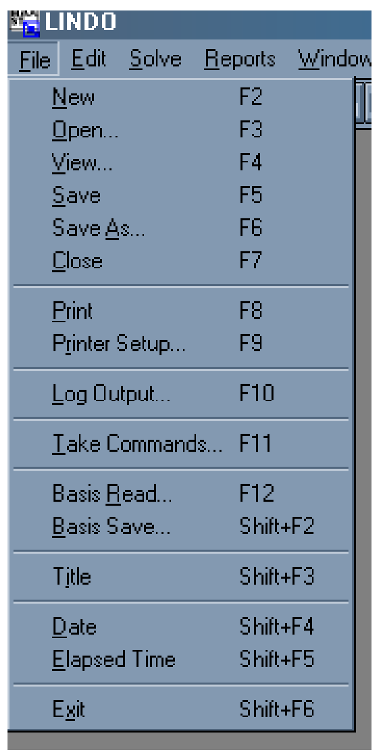
Optimizador Lineal, Discreto, Interactivo.

## 1. PRESENTACION GENERAL

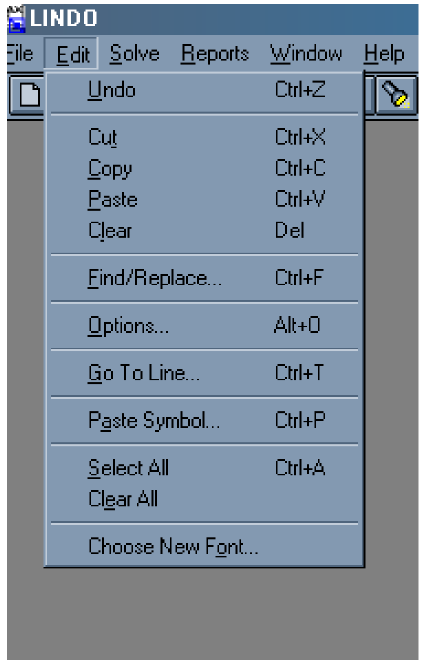



## 2. MENUS Y COMANDOS

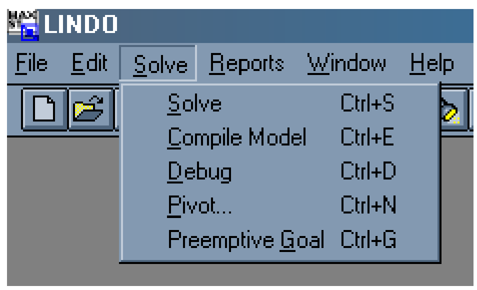
### *a) Menu File*



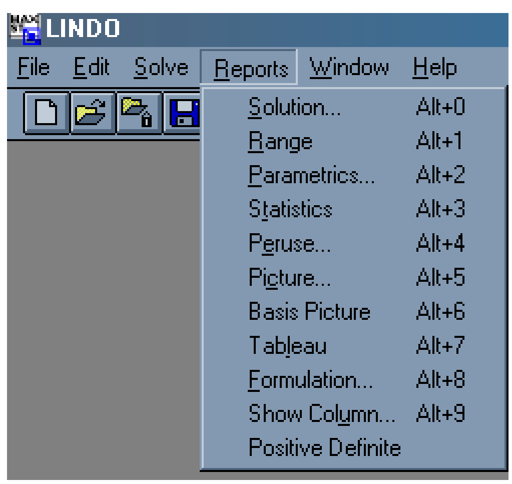
***b) Menu Edit***



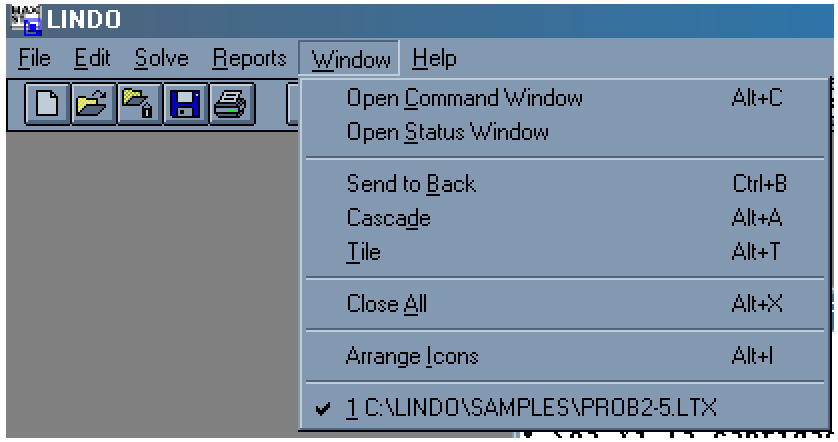

***c) Menu Solve***



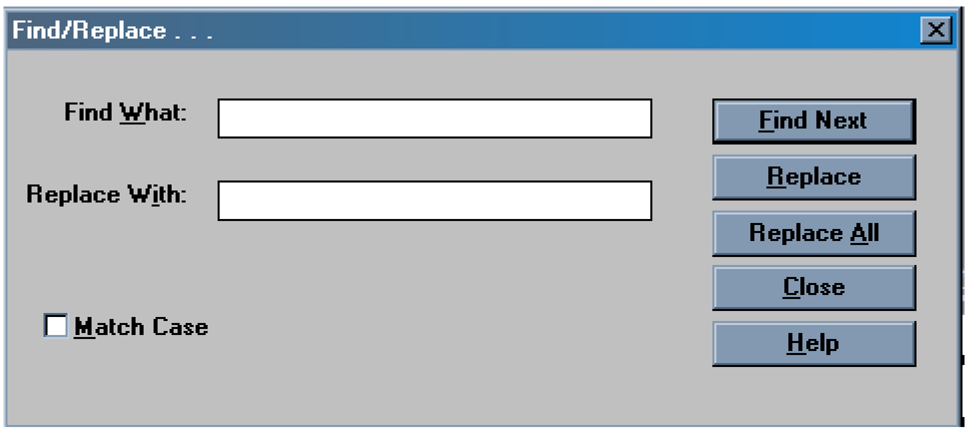

***d) Menu Reports***



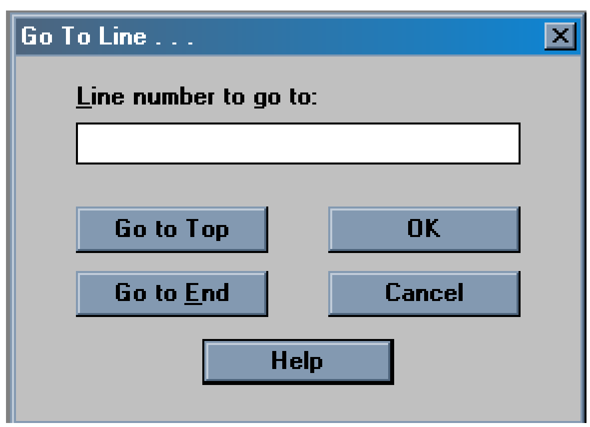
*e) Menu Window*



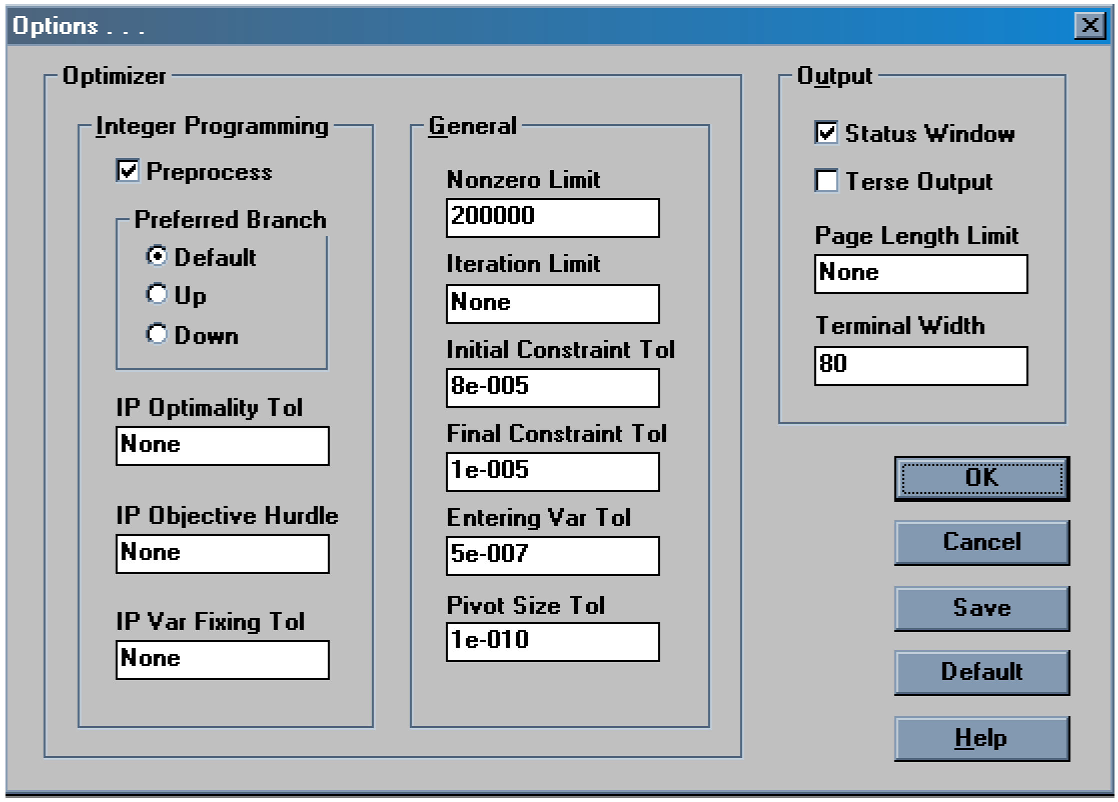

*f) Comando Find-Replace*



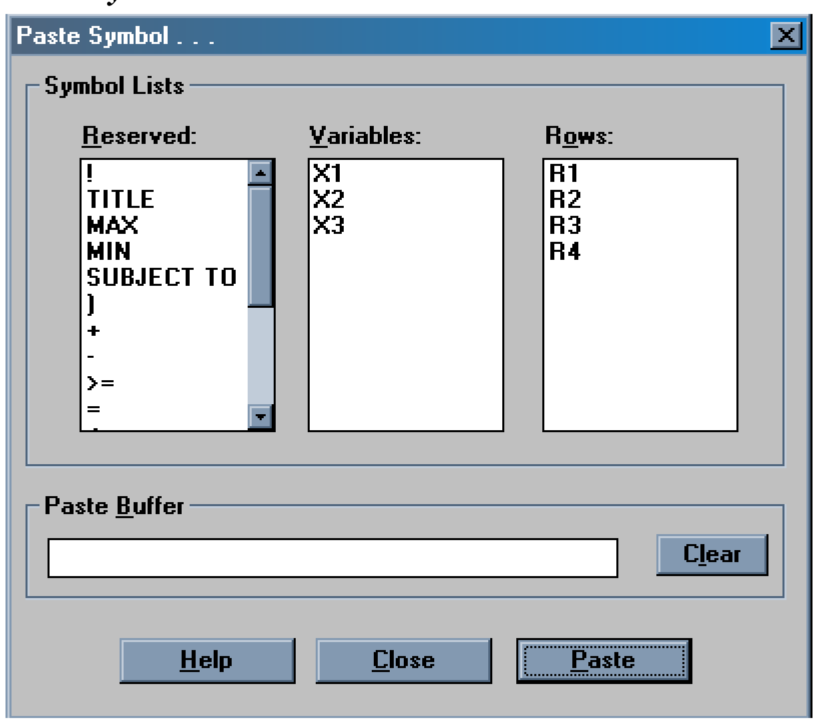

*g) Comando Go-to-line*



*h) Comando Options*




*i) Comando Paste Symbol*



### *j) Respuesta al Comando Tableau*

Reports Window

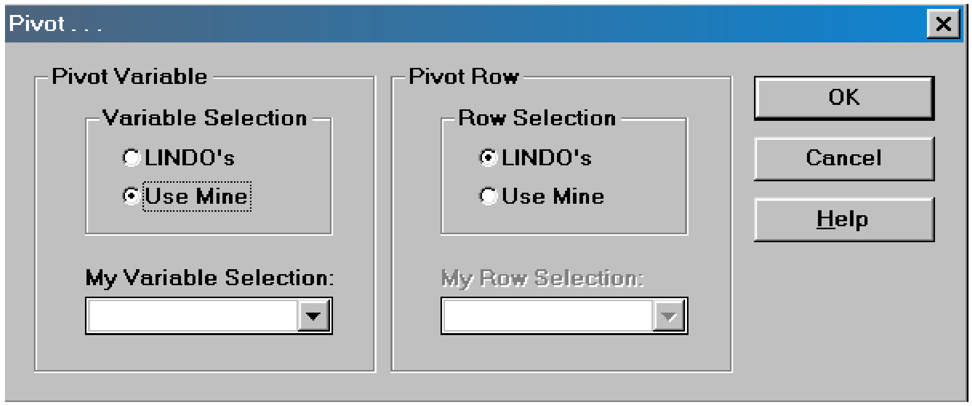
```
THE TABLEAU

    ROW  (BASIS)        X1        X2        X3   SLK    2   SLK    3   SLK    4
      Z ART         -7.000    -3.000    -3.000     0.000     0.000     0.000
     R1 SLK    2     1.000     0.000     0.000     1.000     0.000     0.000
     R2 SLK    3     0.000     1.000     0.000     0.000     1.000     0.000
     R3 SLK    4     0.000     0.000     1.000     0.000     0.000     1.000
     R4 SLK    5    60.000    25.000    20.000     0.000     0.000     0.000


    ROW   SLK    5
      Z     0.000     0.000
     R1     0.000  1000.000
     R2     0.000  1000.000
     R3     0.000  1500.000
     R4     1.000 *********
```

### *k) Respuesta al Comando Solution*

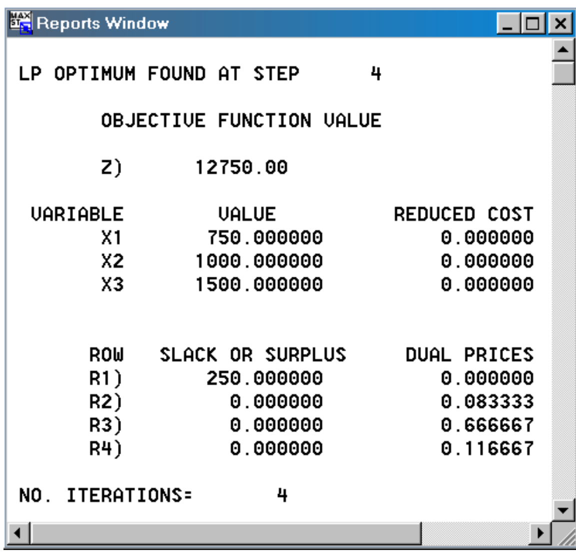
Reports Window

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        Z)      0.0000000E+00

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X1          0.000000         -7.000000
        X2          0.000000         -3.000000
        X3          0.000000         -3.000000


       ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       R1)       1000.000000          0.000000
       R2)       1000.000000          0.000000
       R3)       1500.000000          0.000000
       R4)     100000.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       0
```

### *l) Respuesta al Comando Pivot*




### *m) Respuesta al Comando Solve con análisis de sensibilidad*


Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

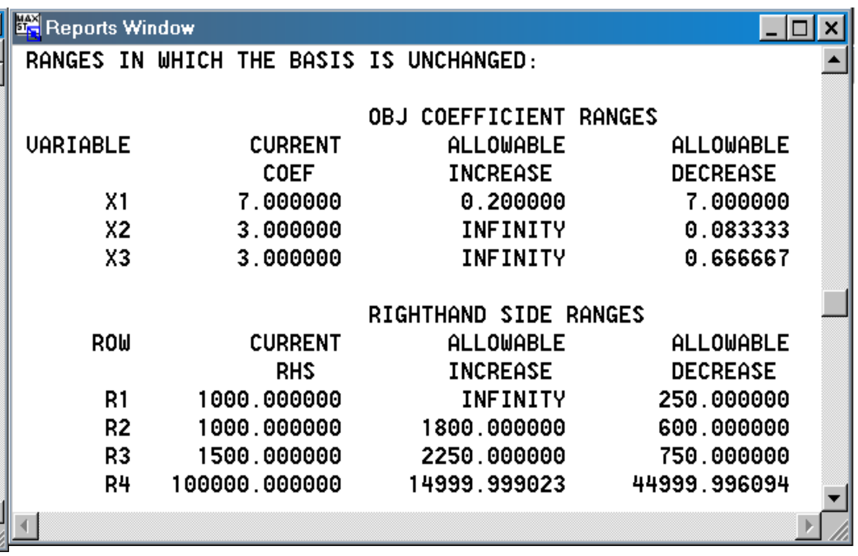
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

Z) 12750.00

| VARIABLE | VALUE | REDUCED COST |
|---|---|---|
| X1 | 750.000000 | 0.000000 |
| X2 | 1000.000000 | 0.000000 |
| X3 | 1500.000000 | 0.000000 |

| ROW | SLACK OR SURPLUS | DUAL PRICES |
|---|---|---|
| R1) | 250.000000 | 0.000000 |
| R2) | 0.000000 | 0.083333 |
| R3) | 0.000000 | 0.666667 |
| R4) | 0.000000 | 0.116667 |

NO. ITERATIONS= 4


Reports Window

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

| VARIABLE | CURRENT COEF | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|---|---|---|---|
| X1 | 7.000000 | 0.200000 | 7.000000 |
| X2 | 3.000000 | INFINITY | 0.083333 |
| X3 | 3.000000 | INFINITY | 0.666667 |

RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT RHS | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|---|---|---|---|
| R1 | 1000.000000 | INFINITY | 250.000000 |
| R2 | 1000.000000 | 1800.000000 | 600.000000 |
| R3 | 1500.000000 | 2250.000000 | 750.000000 |
| R4 | 100000.000000 | 14999.999023 | 44999.996094 |

### *n) About Lindo*

## 3. ANALISIS DE RESULTADOS CON SOFTWARE LINDO

### *a) PROBLEMA EJEMPLO N°1*

Winco vende cuatro tipos de productos. Los recursos necesarios para producir una unidad de cada producto y el precio de venta para cada producto se dan en la Tabla 1. En la actualidad se dispone de 4600 unidades de materia prima y de 5000 horas hombre de trabajo. Para cumplir con la demanda de los clientes se debe producir exactamente 950 unidades de producto, en cualquier combinación, siempre y cuando las unidades de producto tipo 4 sea a lo menos 450.
Formule un programa lineal que permita maximizar los ingresos por venta de Winco y solucíónelo con el software LINDO.

Tabla 1: Precios de venta y necesidad de recursos para producción de productos

| | Producto 1 | Producto 2 | Producto 3 | Producto 4 |
|---|---|---|---|---|
| Materia Prima | 2 | 3 | 4 | 7 |
| Horas Hombre | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Precio de Venta | US$4 | US$6 | US$7 | US$8 |

SOLUCION:

C:\LINDO\LNDUSE~1\A_R_EJ1.LTX

```
!
! Sea Xi = Cantidad de producto tipo i producido
!
MAX Z) 4 X1 + 6 X2 + 7 X3 + 8 X4
SUBJECT TO
R1)      X1 +   X2 +   X3 +   X4  =  950
R2)                           X4 >=  450
R3)    2 X1 + 3 X2 + 4 X3 + 7 X4 <= 4600
R4)    3 X1 + 4 X2 + 5 X3 + 6 X4 <= 5000
END
```

Reports Window

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        Z)      6500.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        50.000000          0.000000
        X2       450.000000          0.000000
        X3         0.000000          1.000000
        X4       450.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       R1)         0.000000          0.000000
       R2)         0.000000         -6.000000
       R3)         0.000000          2.000000
       R4)       350.000000          0.000000
```

Reports Window

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

| VARIABLE | CURRENT COEF | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|---|---|---|---|
| X1 | 4.000000 | 1.000000 | INFINITY |
| X2 | 6.000000 | INFINITY | 0.500000 |
| X3 | 7.000000 | 1.000000 | INFINITY |
| X4 | 8.000000 | 6.000000 | INFINITY |

RIGHTHAND SIDE RANGES

| ROW | CURRENT RHS | ALLOWABLE INCREASE | ALLOWABLE DECREASE |
|---|---|---|---|
| R1 | 950.000000 | 225.000000 | 16.666666 |
| R2 | 450.000000 | 90.000000 | 12.500000 |
| R3 | 4600.000000 | 50.000000 | 450.000000 |
| R4 | 5000.000000 | INFINITY | 350.000000 |

## ANALISIS DE LOS RESULTADOS

- ***"REDUCED COST"***

Los valores de Reduced Cost que se entregan en el resultado por el software LINDO, nos da información acerca de cómo **cambiando los coeficientes en la función objetivo** para las variables **no básicas**, se puede cambiar la solución óptima del PPL.

Para cualquier variable no básica $X_k$, el ***reduced cost*** para $X_k$ es la cantidad en la que puede **mejorarse** el coeficiente de $X_k$ en la función objetivo antes de que el PPL tenga una nueva solución óptima en la que $X_k$ será variable básica. (Nótese que se usa el término "mejorarse", lo que implica aumento si la F.O. es de maximización y disminución si es de minimización). Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica $X_k$ se mejora en exactamente su **reduced cost**, entonces el PPL tendrá soluciones óptimas alternativas y al menos en una de ellas $X_k$ será variable básica y en otra $X_k$ será no básica. Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica es mejorado mas allá de su **reduced cost**, entonces la nueva solución óptima del PPL tendrá a $X_k$ como variable básica.

El resultado óptimo de nuestro ejemplo muestra que X3 es variable no básica y tiene un ***reduced cost* = $1**. Esto implica que si se mejora el coeficiente de la variable X3 en la función objetivo (Es decir el precio de venta unitario del producto 3) en exactamente $1 (en vez de $7 sea $8), habrá soluciones óptimas alternativas y al menos en una de ellas X3 será variable básica. Si se aumenta el coeficiente de X3 en la función objetivo en más de $1, entonces la solución óptima del PPL tendrá a X3 como variable básica.

- ***"DUAL PRICES" y Análisis de Sensibilidad***

La columna ***Dual Prices*** indica el valor de los precios sombra de las restricciones del PPL.

Recordemos la definición de precio sombra que está hecha en base a un precio sombra positivo:
***El precio sombra de una restricción de un PPL es la cantidad en que mejoraría (Aumentaría si la F.O. es Max o disminuiría si la F.O. es Min) el valor óptimo de la función objetivo, cuando el término libre de la restricción es aumentado en una unidad.*** (En forma contraria, si se disminuye en una unidad el término libre de la restricción, el valor óptimo de la función objetivo empeorará en una cantidad igual al precio sombra).

***Signos de los Dual Prices (Precios Sombra)***
El precio sombra de una restricción del tipo ≥ será siempre negativo o cero, el de una restricción ≤ será positivo o cero y el de una restricción que es igualdad podrá tener cualquier valor, negativo, positivo o cero, es decir, irrestricta en signo. Esto aplica tanto para un PPL de maximización como de minimización. Para ilustrar esta realidad, observe que si se agregan puntos a la zona de soluciones factibles de un PPL, hecho que ocurre cuando se aumenta el término libre de una restricción ≤, su efecto es que el valor óptimo de la función objetivo mejora o queda igual y al quitar puntos a la zona, si se aumenta el término libre de una restricción ≥, el óptimo empeora o queda igual.

***Rango de validez de los precios sombra***
El precio sombra de una restricción es válido dentro un rango de variación específico de su término libre. Este rango se puede calcular con los antecedentes que se entregan en el análisis de sensibilidad del resultado óptimo, en la parte denominada ***"Righthand side ranges"*** (Rangos de los lados de la mano derecha, es decir, de los términos libres de las restricciones). Para cada término libre se indica su valor actual, la cantidad en que éste puede ser aumentado (Allowable increase) y la cantidad en que éste puede ser disminuido (Allowable decrease). El mejoramiento o empeoramiento del valor óptimo de la función objetivo será directamente proporcional a su precio sombra por la cantidad en que varíe el término libre de la restricción, siempre y cuando ésta variación mantenga el valor de éste último dentro del rango de validez antes calculado.

En nuestro Problema Ejemplo N°1, se indica que el precio sombra de la restricción R2 es (-6). Este precio sombra es negativo ya que la restricción es del tipo >= y su interpretación, en el contexto del problema es la siguiente: Por cada unidad de producto 4 que se requiera fabricar, por sobre los 450 productos, el valor óptimo de la función objetivo empeorará en $6. (Nótese que en este caso la F.O. empeora con un aumento del término libre y ello es porque el precio sombra es negativo). Por el contrario, si el término libre de la restricción R2 se disminuye, el valor óptimo de la función objetivo mejorará en $6 por cada unidad que se disminuya. El rango de valores del término libre de la restricción en el que este efecto del precio sombra es válido, se obtiene del análisis de sensibilidad como sigue:

$$(450 - 12.5) \leq b2 \leq (450 + 90)$$

$$437.5 \leq b2 \leq 540$$

En el caso de una restricción no activa, es decir aquella restricción que tiene holgura y que por lo tanto su precio sombra es nulo (0), el rango de variación del término libre de la restricción así calculado, indica los valores que puede tomar este término libre sin que el valor óptimo de la función objetivo ni el valor óptimo de las variables cambie. (Rango en el cuál la "*base*" no cambia). En nuestro ejemplo la restricción R4 tiene una holgura de 350 unidades y según el análisis de sensibilidad, su término libre puede variar entre 4650 e infinito sin que el valor óptimo de la función objetivo (6500) cambie, ni tampoco el valor óptimo de las variables de decisión.

- ***Rangos de los coeficientes de la Función Objetivo ("Obj Coefficient Ranges")***

Recordemos que en el análisis de sensibilidad de un PPL en dos variables calculamos el rango de valores en que podían variar los coeficientes de la F.O. de tal forma que la variación de pendiente que ello provoca no hiciese variar la ubicación del punto óptimo.

Con el software LINDO, ya sea para dos o para más variables, el rango de variación permitido para los coeficientes de la F.O., que permite que "la Base no cambie", es decir que las variables que son actualmente básicas sigan siendo básicas y no varíen su valor óptimo, se obtiene del análisis de sensibilidad en la sección *"Obj Coefficient Ranges"*.

En nuestro ejemplo N°1 la solución óptima se da para X1= 50, X2= 450, X4= 450 y SLK 5= 350. Estas son las variables básicas y su valor óptimo. Esta base no cambiará si, por ejemplo, el coeficiente de la variable X4 se aumenta en 1, 2, 3, y hasta 6 unidades.

### *b) PROBLEMA EJEMPLO N°2*

El siguiente ejemplo se deja para discusión de los alumnos en cuanto al análisis de sus resultados.

Trucker Inc. Debe producir 1000 automóviles. La compañía tiene cuatro plantas de producción. El costo de producir un automóvil en cada planta, junto con el consumo de horas hombre y las necesidades de materia prima se muestran en la Tabla 2.
El sindicato de trabajadores de la compañía ha demandado que en la planta 3 se produzcan a lo menos 400 automóviles.
La disponibilidad total de horas hombre y de materias primas, que puede ser usada en las plantas es de 4000 HH y 3300 unidades de materia prima.
Formule u programa lineal que permita a Trucker minimizar el costo de producir los mil automóviles.

Tabla 2: Costos y necesidad de recursos para producción de automóviles

| | Planta 1 | Planta 2 | Planta 3 | Planta 4 |
|---|---|---|---|---|
| Materia Prima | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Horas Hombre | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Costo (Miles de US$) | 15 | 10 | 9 | 7 |

SOLUCION:

```
C:\LINDO\LNDUSE~1\A_R_EJ2.LTX
!
! Sea Xi = Cantidad de autos producidos en la Planta i
!
MIN Z) 15 X1 + 10 X2 + 9 X3 + 7 X4
SUBJECT TO
R1)       X1 +    X2 +    X3 +    X4  = 1000
R2)                       X3         >=  400
R3)     2 X1 + 3 X2 + 4 X3 + 5 X4 <= 3300
R4)     3 X1 + 4 X2 + 5 X3 + 6 X4 <= 4000
END
```

```
Reports Window

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        Z)      11600.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1      400.000000          0.000000
        X2      200.000000          0.000000
        X3      400.000000          0.000000
        X4        0.000000          7.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       R1)        0.000000        -30.000000
       R2)        0.000000         -4.000000
       R3)      300.000000          0.000000
       R4)        0.000000          5.000000
```

```
Reports Window

 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       15.000000        INFINITY         3.500000
       X2       10.000000        2.000000         INFINITY
       X3        9.000000        INFINITY         4.000000
       X4        7.000000        INFINITY         7.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
       R1     1000.000000       66.666664       100.000000
       R2      400.000000      100.000000       400.000000
       R3     3300.000000        INFINITY       300.000000
       R4     4000.000000      300.000000       200.000000
```

# III. PROGRAMACION LINEAL ENTERA

Existen situaciones o sistemas en que los resultados decimales para las variables de decisión no hacen sentido, se necesitan valores enteros. Este capítulo resume la técnica utilizada para encontrar las soluciones óptimas teóricas en estas condiciones.

Se debe tener en cuenta que cuando se restringe las variables de decisión a tomar sólo valores enteros, la solución óptima entera que se encuentre será menos eficiente que la decimal, pero la mejor entera posible.

## *A. ALGORITMO DE BIFURCACION Y ACOTAMIENTO*

Es el método más eficiente para encontrar los valores óptimos enteros para las variables de decisión de un Modelo de Programación Lineal Entera.

En términos generales, el algoritmo de bifurcación y acotamiento es una metodología que consiste en dividir, progresivamente, un modelo de programación lineal, en modelos cuyas zonas de soluciones factibles son sub-conjuntos no traslapados de la zona de soluciones factibles del modelo original. Esta división se realiza en la práctica creando, a partir de un modelo dado, dos nuevos modelos que acoten, restrinjan, a una de las variables de valor óptimo decimal. El primer modelo se genera agregando una restricción que acote dicha variable a valores menores o iguales a la parte entera de la solución óptima y el segundo, agregando una restricción que acote la variable a valores mayores o iguales a la parte entera más uno de la solución óptima. Esta metodología se repite sucesivamente hasta encontrar la mejor solución óptima entera. En estas circunstancias se genera un árbol de modelos cuya cúspide es el modelo original, el que se ha expandido sucesivamente al efectuar la bifurcación por el acotamiento de las variables de valor óptimo decimal. Cada modelo queda representado por un nodo y cada nueva restricción por una rama que conecta un nodo con el siguiente.

Problema Ejemplo: ***P1***

$$\begin{aligned} &MAX \quad 8X_1 + 5X_2 \\ &\text{Sujeto a :} \quad 11X_1 + 6X_2 \le 66 \\ &\qquad X_1 + 10X_2 \le 45 \\ &\qquad \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ge 0, \quad \text{enteros} \end{aligned}$$

Al resolver este modelo de P.L. se llega a la solución óptima teórica: $X_1^* = 3{,}75$ $X_2^* = 4{,}125$ y $Z^* = 50{,}625$ y debemos reconocer que no existe solución factible que implique un valor mejor para la Función Objetivo.

Para encontrar una primera ***solución factible entera*** para el modelo, normalmente se recurre a una de dos prácticas: La aproximación del valor decimal de la variable al entero superior o inferior, dependiendo del valor decimal, o bien el truncamiento de la solución decimal de las variables de decisión a su parte entera.

Cualquiera de estas aproximaciones debe ser verificada en cuanto a su factibilidad, es decir, a que para esos valores enteros de las variables de decisión todas las restricciones del modelo se cumplan.
Si se aplica la primera aproximación al problema ejemplo, se tiene que $X_1 = 4$ y $X_2 = 4$ no es una solución factible para el modelo, ya que no se cumple la primera restricción. En cambio la aproximación por truncamiento $X_1 = 3$ y $X_2 = 4$ si es factible y da un valor de Z = 44, inferior al de la solución óptima decimal, como era lógico esperar.

Definiremos:

$U_k$ = Valor óptimo de la F.O. para el modelo del nodo k

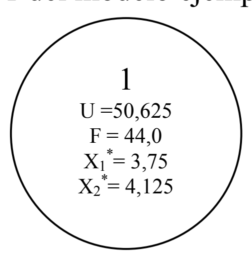
$U_1$ = Mejor cota superior actual

F = Mejor solución entera encontrada.

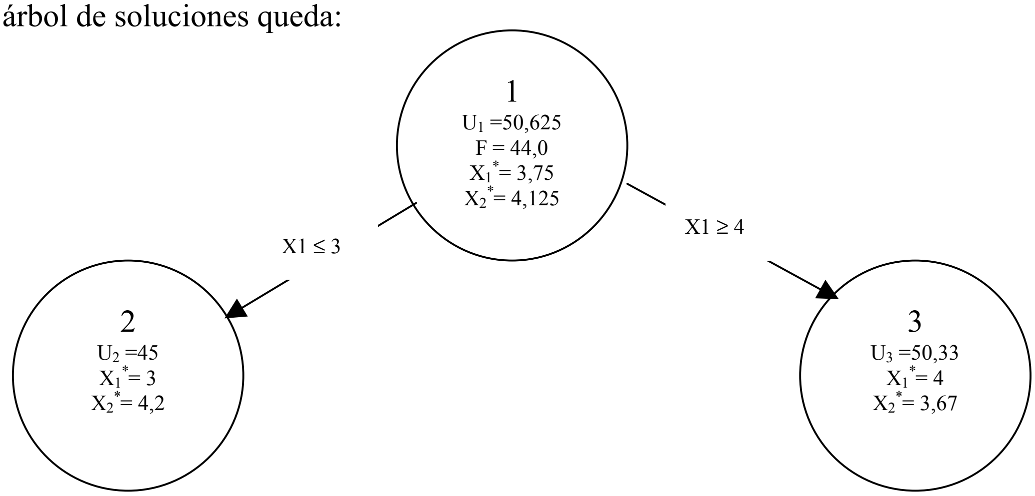
El proceso de bifurcación y acotamiento se detiene en un nodo específico cuando se presenta una de las siguientes circunstancias:

- El modelo del nodo k no tiene solución.
- El valor óptimo de la F.O. $U_k$ es menor o igual que el mejor valor para solución entera encontrado al momento, F. $(U_k \leq F)$
- La solución óptima del modelo del nodo es entera.

En estas circunstancias el nodo k=1 del modelo ejemplo sería:




A partir de este modelo se crean dos nuevos modelos, acotando como se indicó anteriormente cualquiera de las variables de decisión decimales, por ejemplo X1.
Con ello el árbol de soluciones queda:



***P1***

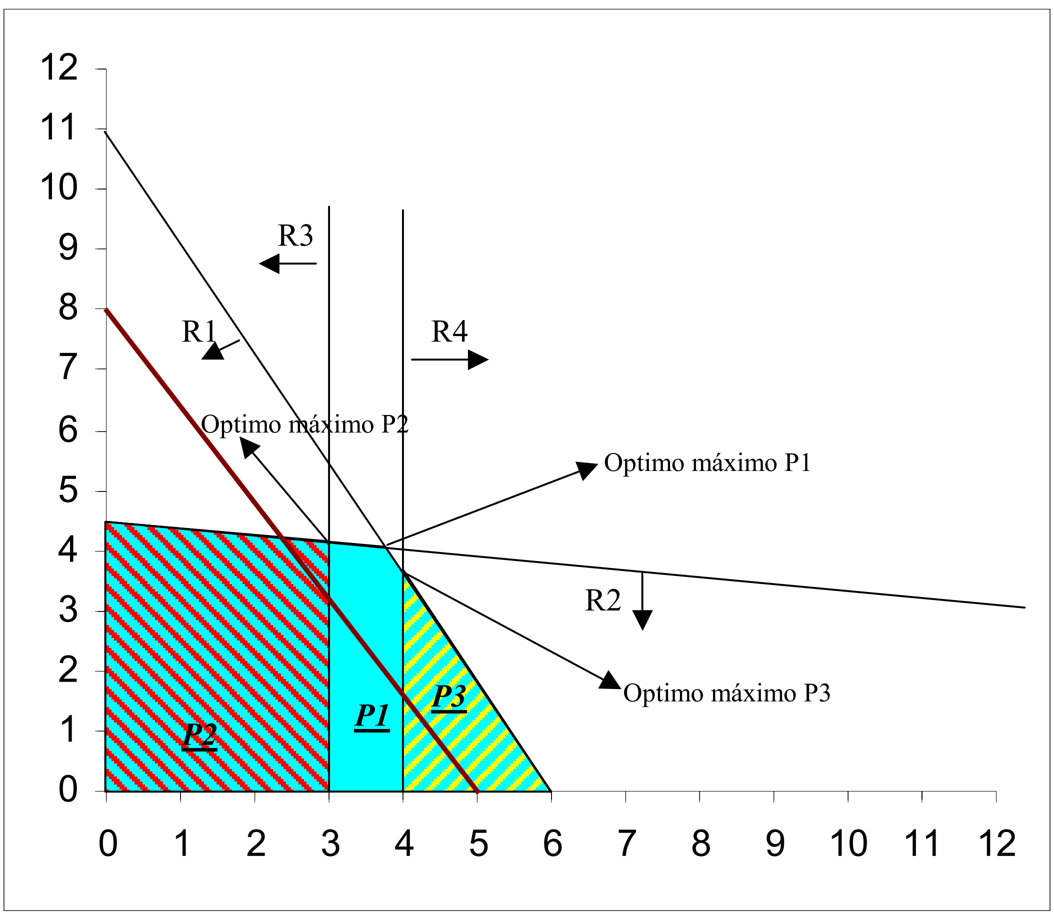
$$
\begin{array}{ll}
MAX & 8X_1 + 5X_2 \\
\text{Sujeto a :} & 11X_1 + 6X_2 \leq 66 \\
 & X_1 + 10X_2 \leq 45 \\
 & \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \geq 0, \ \text{enteros}
\end{array}
$$

***P2***

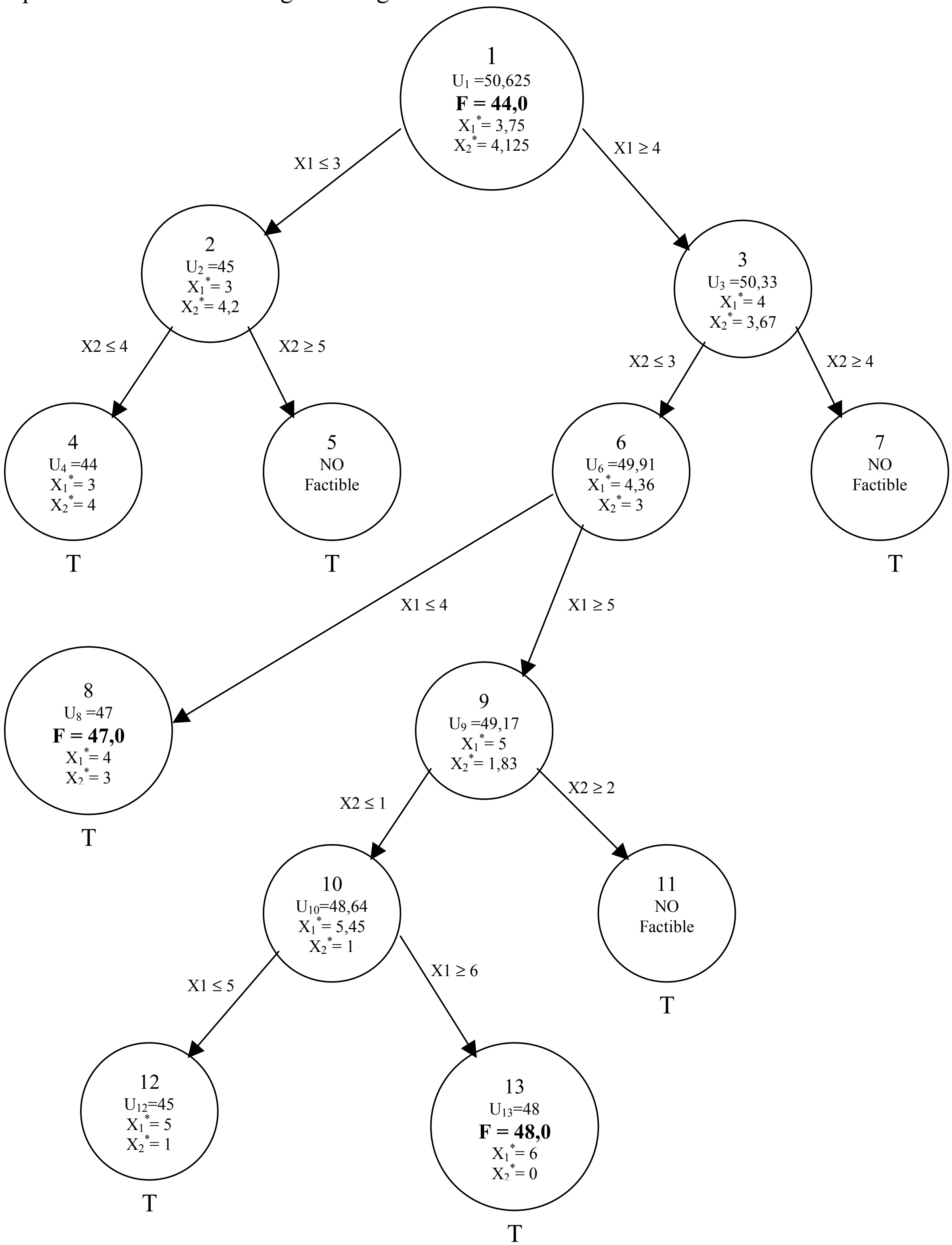
$$
\begin{array}{ll}
MAX & 8X_1 + 5X_2 \\
\text{Sujeto a :} & 11X_1 + 6X_2 \leq 66 \\
 & X_1 + 10X_2 \leq 45 \\
 & \mathrm{X1} \qquad \leq 3 \\
 & \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \geq 0, \ \text{enteros}
\end{array}
$$

***P3***

$$
\begin{array}{ll}
MAX & 8X_1 + 5X_2 \\
\text{Sujeto a :} & 11X_1 + 6X_2 \leq 66 \\
 & X_1 + 10X_2 \leq 45 \\
 & \mathrm{X1} \qquad \geq 4 \\
 & \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \geq 0, \ \text{enteros}
\end{array}
$$



Las respectivas soluciones no son con variables óptimas enteras y los valores Uk óptimos son mejores que F por lo que el proceso de ramificación y acotamiento continúa. El árbol del proceso se detalla en la siguiente figura:



En el árbol se puede notar que:

- Los nodos 5, 7 y 11 son terminales de la rama respectiva puesto que son modelos que no tienen solución factible.
- El nodo 4 es terminal porque representa un modelo con solución entera, que es la misma que logramos inicialmente por truncamiento de la solución decimal óptima del modelo original.
- El nodo 8 es igualmente terminal por representar una solución entera pero en este caso es mejor que la encontrada por truncamiento inicialmente y por lo tanto da origen a un nuevo valor de F y a partir de ese nivel las soluciones se deben comparar contra F = 47 en reemplazo de F = 44.
- El nodo 12 es terminal también por representar una solución entera. Sin embargo no se considera por tener un valor para la función objetivo menor que el F = 47 vigente.
- Por último el nodo 13 termina con una solución entera que resulta ser mejor que la encontrada en el nodo 8, por ello pasa a ser el nuevo F = 48 y en atención a que todas las ramas han terminado, el algoritmo concluye que la **Solución Optima Entera es: $X_1^* = 6$, $X_2^* = 0$ y $Z^* = 48$**

El resultado óptimo entero obtenido permite usarlo de ejemplo para destacar lo siguiente:

- ***Una solución redondeada no es necesariamente óptima, tampoco asegura estar cerca de la solución óptima y puede que no sea siquiera factible.***

## *B. USO DE VARIABLES ENTERAS BINARIAS*

Existen situaciones en las que la decisión a tomar es hacer o dejar de hacer algo es SI o NO. En estas circunstancias se deben definir las variables de decisión denominadas ***binarias*** que pueden tomar sólo dos valores posibles: 1 (Uno) si la decisión es SI y 0 (Cero) si la decisión es NO.

Los siguientes párrafos ilustran las aplicaciones más recurrentes en las que se usa este tipo de variables dicotómicas.

### 1. Problemas de cargo fijo

Suponga que un producto nuevo contribuirá con cinco dólares por unidad a la utilidad total del negocio y que se realiza un gasto único de 100 dólares para preparar la maquinaria para una batch de producción. El costo es cero si no se producen unidades.

Sea $X$ el número de unidades que se producirán. Entonces, podemos formular el problema para que:

$$\text{Utilidad} \qquad Z = \begin{cases} 5x - 100 & \text{si X} > 0 \\ 0 & \text{si X} = 0 \end{cases}$$

En la formulación lineal se introduce una nueva variable, ***Y***, que sólo toma los valores enteros de 0 y 1. Después se maximiza $Z = (5X - 100Y)$ con sujeción a las restricciones existentes, más la siguiente:

$X \leq MY$ donde $M$ es un número muy grande

Observe que cuando Y = 0, la segunda restricción hace que $X$ sea 0 y la contribución Z = ($5X$ - $100Y$) también es cero. Sin embargo, cuando $Y = 1$ no existe un límite práctico para $X$ ya que M es un número muy grande y además la cantidad de cargo fijo de 100 dólares se descuenta de la utilidad. Por lo tanto, la utilización de la variable binaria (cero/uno), "***Y***", permite formular este tipo de problema con restricciones lineales.

Los problemas del tipo de cargo fijo son comunes en los negocios. Por ejemplo, hay un costo de inversión para construir una planta antes de que pueda empezar la producción; por lo general hay costos fijos si se emprende un segundo turno o se abre un almacén nuevo, etc.

Observe en el ejemplo anterior que el valor de la función objetivo y las restricciones son *lineales*, es decir, comprenden sólo una constante multiplicada por una variable (no hay potencias ni productos de variables). Un error que en ocasiones se comete en las formulaciones de programación entera es que se emplean funciones no lineales. Por ejemplo, el problema de cargo fijo se podría formular como la maximización de Z = $5XY$ - $100Y$, donde $Y$ es una variable binaria como las anteriores. Observe que se cumplen los requisitos, ya que no hay beneficio si $Y = 0$ y el beneficio es $5X - 100$ si $Y = 1$. No obstante, el término $5XY$ no representa un problema válido de programación lineal entera ya que es una expresión cuadrática.

## 2. Problema de tamaño de lote

Un problema similar al anterior es aquel en el cual se requiere un nivel mínimo para emprender una actividad. Por ejemplo, una empresa puede tener la necesidad de comprar una cantidad mínima de 50 unidades de cierto producto. Sea $X$ el número de unidades que se compran; entonces, se debe modelar que $X = 0$ o bien $X \geq 50$.

Esta situación se puede formular utilizando una variable binaria ***Y*** con las siguientes restricciones:

$$X \leq MY \qquad (M \text{ es un número muy grande})$$
$$X \geq 50Y$$

Observe que si $Y = 0$, ambas restricciones hacen que $X$ deba ser 0. Por el contrario si $Y = 1$, por la segunda restricción $X$ debe ser por lo menos 50 y la primera restricción no restringe a X porque M es un número muy grande.

## 3. Selección de una o más alternativas entre varias

Algunas veces se necesita decidir por ejemplo, entre varias alternativas de inversión como máximo dos de ellas.
Sea X1, X2, X3, X4, X5 variables binarias que representan el invertir (uno) o no (cero) en el instrumento financiero correspondiente. Asuma que por razones de no incurrir en mucho riesgo se necesita que la decisión sea invertir en no más de dos de estas alternativas. Para representar esta situación se debe incluir una restricción como la siguiente:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 2$$

## 4. Restricciones mutuamente excluyentes ("Either – Or")

Algunas veces, en una situación de decisión, hay que mantener una restricción u otra (a lo menos una de ellas), pero no ambas. En términos generales se necesita que:

ya sea $\quad f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \leq 0$

o bien $\quad g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \leq 0$

deba cumplirse, pero en ningún caso ambas.

Por ejemplo:

Sea que deba cumplirse que: $\quad 5X_1 + 2X_2 \leq 10$

o bien que: $\quad 3X_1 - 4X_2 \leq 24$

pero no ambas

En la programación entera se puede manejar esta situación con una variable binaria "***Y***" si se usan las siguientes restricciones modificadas:

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10 + MY$$
$$3X_1 - 4X_2 \leq 24 + M(1 - Y)$$

Observe que si $Y = 0$, la primera restricción es efectiva, pero el término independiente de la segunda se hace muy grande y por lo tanto no es en la práctica efectiva. Por el contrario, si $Y = 1$, la segunda restricción limita pero no la primera, ya que $MY$ es muy grande.

## 5. Restricciones consecuenciales ("If – Then")

En otras oportunidades, en situaciones también de decisión, se desea asegurar que si una restricción $f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) > 0$ se cumple, otra restricción $g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \geq 0$ también deba cumplirse; sin embargo si $f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) > 0$ no se cumple, entonces $g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \geq 0$ puede o no cumplirse. Para asegurar lo anterior utilizamos la siguiente formulación de restricciones:

$$\mathbf{-g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \leq M\,Y}$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \leq M\,(1-Y)}$$

donde Y es una variable entera binaria y M es un número muy grande.

Por ejemplo:
Suponga que necesitamos que:

si $X_1 > 0$
entonces $X_1 - 4X_2 \leq 24$

lo que escrito de acuerdo a la regla del IF-THEN es:

si $\mathbf{X_1 > 0}$
entonces $\mathbf{-X_1 + 4X_2 + 24 \geq 0}$

En este caso $f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = \mathbf{X_1}$
y $g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = \mathbf{-X_1 + 4X_2 + 24}$

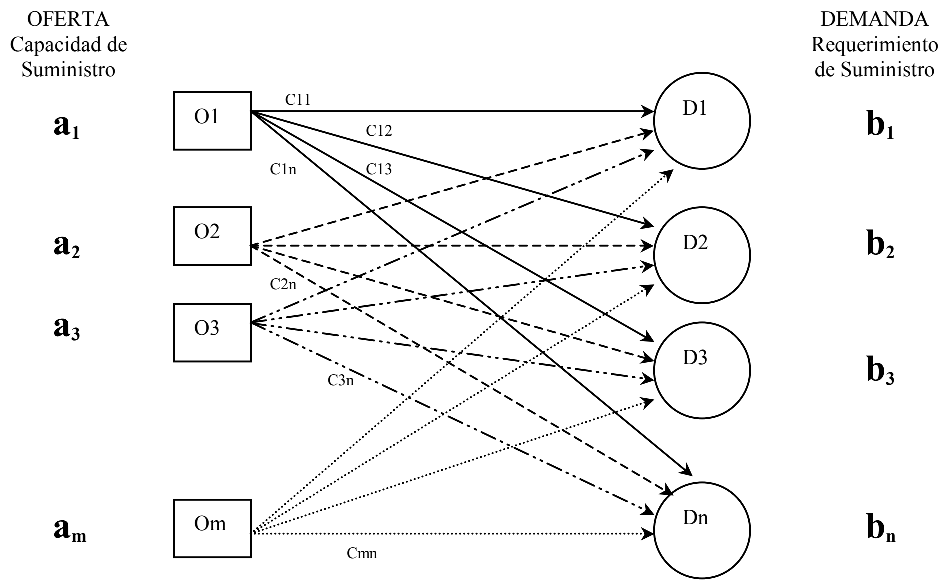
Las restricciones que se usan para lograr el efecto esperado serían, en este caso las siguientes:

$$\mathbf{X_1 - 4X_2 \leq M\,Y + 24}$$
$$\mathbf{X_1 \leq M\,(1-Y)}$$

donde Y es una variable entera binaria y M es un número muy grande.
Observe que si $X_1 > 0$ entonces $X_1 - 4X_2 \leq 24$ puede cumplirse sólo si $Y = 0$ Por otro lado, si $X_1 > 0$ no se satisface, en la segunda restricción se puede aceptar que Y sea 0 o bien 1 y la primera restricción podrá cumplirse (Y=0) o nó (Y=1).

# IV. MODELO DE TRANSPORTE

## A. INTRODUCCION




Cij = Costo unitario de transporte entre el origen i y el destino j

## B. MODELO GENERAL DE PROGRAMACION LINEAL

El modelo matemático general de un problema de transporte a ser solucionado por el método simplex es el siguiente:

Sea $X_{ij}$ = Cantidad de producto a transportar entre el origen i y el destino j

$$\text{F.O. MIN } \mathbf{Z} = c_{11}X_{11}+c_{12}X_{12}+c_{13}X_{13}+.....+c_{1n}X_{1n}+c_{21}X_{21}+c_{22}X_{22}+c_{23}X_{23}+...... +c_{2n}X_{2n}+......+c_{m1}X_{m1}+c_{m2}X_{m2}+c_{m3}X_{m3}+........+c_{mn}X_{mn}$$

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} +.....+ X_{1n} \leq a_1$ Capacidad de Suministros
$X_{21} + X_{22} + X_{23} +.....+ X_{2n} \leq a_2$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} +.....+ X_{3n} \leq a_3$
.......................................................................................
.......................................................................................
$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} +.....+ X_{mn} \leq a_m$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} +.....+ X_{m1} = b_1$ Satisfacción de la Demanda
$X_{12} + X_{22} + X_{32} +.....+ X_{m2} = b_2$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} +.....+ X_{m3} = b_3$
.......................................................................................
.......................................................................................
$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} +.....+ X_{mn} = b_n$

## *C. EL ALGORITMO DE TRANSPORTE*

El algoritmo de transporte permite solucionar problemas de transporte mediante un procedimiento de cálculo tabular que comprende básicamente las siguientes acciones:

### 1. Premisa básica

El algoritmo asume que todo problema de transporte a ser solucionado por este método está debidamente balanceado; es decir la OFERTA total es igual a la DEMANDA total:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Si la oferta total es mayor que la demanda total, para balancear el problema se debe crear un destino artificial $D_{(n+1)}$ con demanda también artificial e igual a la diferencia entre la oferta total y la demanda total y con costos de transporte nulos para el abastecimiento desde cualquiera de los orígenes hacia este destino artificial.

$$b_{(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \; ; \qquad C_{i(n+1)} = 0 \quad \forall i$$

Si por el contrario, la oferta total es menor que la demanda total, para balancear el problema se debe crear un origen artificial $O_{(m+1)}$ con oferta o capacidad de suministro también artificial e igual a la diferencia entre la demanda total y la oferta total y con costos de transporte nulos para el abastecimiento hacia cualquiera de los destinos.

$$a_{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \; ; \qquad C_{(m+1)j} = 0 \quad \forall j$$

### 2. Tabla de asignación para el transporte

Una vez balanceado el problema se debe construir una tabla de asignación para el transporte que tiene la siguiente forma general (Ej. 3 orígenes y 4 destinos):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{X_{11}}$ $C_{11}$ | $\mathbf{X_{12}}$ $C_{12}$ | $\mathbf{X_{13}}$ $C_{13}$ | $\mathbf{X_{14}}$ $C_{14}$ | $a_1$ $u_1$ |
| $\mathbf{X_{21}}$ $C_{21}$ | $\mathbf{X_{22}}$ $C_{22}$ | $\mathbf{X_{23}}$ $C_{23}$ | $\mathbf{X_{24}}$ $C_{24}$ | $a_2$ $u_2$ |
| $\mathbf{X_{31}}$ $C_{31}$ | $\mathbf{X_{32}}$ $C_{32}$ | $\mathbf{X_{33}}$ $C_{33}$ | $\mathbf{X_{34}}$ $C_{34}$ | $a_3$ $u_3$ |
| $b_1$ $v_1$ | $b_2$ $v_2$ | $b_3$ $v_3$ | $b_4$ $v_4$ | |

En esta tabla : $\mathbf{X_{ij}}$ = Cantidad de producto a transportar desde el origen i al destino j.
$C_{ij}$ = Costo unitario de transporte desde el origen i al destino j.
$b_j$ = Cantidad de producto demandada por el destino j.
$a_i$ = Capacidad de suministro (disponibilidad) del origen i.
$u_i$ = Multiplicador dual asociado al origen i.
$v_j$ = Multiplicador dual asociado al destino j.

## 3. Generación de una primera solución factible

Para encontrar una primera solución factible para el problema de transporte se puede usar cualquiera de los siguientes tres métodos:

***a) Método de la Esquina Nor-Oeste***

- Asigne la mayor cantidad posible de producto, que sea consistente con la cantidad ofrecida y la demandada, en el casillero superior izquierdo libre de la tabla (Casillero N-O).
- Actualice los valores de oferta y demanda en la fila y columna del casillero de la última asignación, restando en ambos la cantidad recién asignada.
- Elimine de futuras asignaciones los casilleros de la fila o columna para la cual el valor de oferta o demanda se anuló (Se hizo igual a cero).
- Repita los tres pasos anteriores hasta que todos los valores de oferta y demanda se hayan anulado.
- Para encontrar el valor de la función objetivo que la solución implica, debe efectuarse la sumatoria de los productos Cij*Xij de aquellos Xij mayores que cero (Variables Básicas).

***b) Método del Costo Mínimo***

- Asigne la mayor cantidad posible de producto, que sea consistente con la cantidad ofrecida y la demandada, en el casillero libre donde se encuentra el menor costo de toda la tabla.
- Actualice los valores de oferta y demanda en la fila y columna del casillero de la última asignación, restando en ambos la cantidad recién asignada.
- Elimine de futuras asignaciones los casilleros de la fila o columna para la cual el valor de oferta o demanda se anuló (Se hizo igual a cero).
- Repita los tres pasos anteriores hasta que todos los valores de oferta y demanda se hayan anulado.
- Para encontrar el valor de la función objetivo que la solución implica, debe efectuarse la sumatoria de los productos Cij*Xij de aquellos Xij mayores que cero (Variables Básicas).

***c) Método de VOGEL***

- Calcule a un costado y bajo la tabla, la diferencia entre los dos menores costos de cada fila y cada columna.
- En aquella fila o columna donde se produzca la mayor diferencia entre costos mínimos, elija el casillero libre de menor costo y asigne en él la mayor cantidad posible de producto, que sea consistente con la cantidad ofrecida y la demandada.
- Actualice los valores de oferta y demanda en la fila y columna del casillero de la última asignación, restando en ambos la cantidad recién asignada.

- Elimine de futuras asignaciones los casilleros de la fila o columna para la cual el valor de oferta o demanda se anuló (Se hizo igual a cero).
- Repita los cuatro pasos anteriores hasta que todos los valores de oferta y demanda se hayan anulado.
- Para encontrar el valor de la función objetivo que la solución implica, debe efectuarse la sumatoria de los productos Cij*Xij de aquellos Xij mayores que cero (Variables Básicas).

## 4. Determinación de la optimalidad

Encontrada una solución factible se debe determinar si ella es o no óptima según el siguiente procedimiento:

***a) Cálculo de los Multiplicadores Dual***

Los multiplicadores Dual relacionan las variables básicas con las no básicas y permiten el cálculo de los coeficientes de costo alternativo.
Como en todo problema de transporte a resolver por el algoritmo de transporte, la premisa de igualdad entre oferta y demanda hace que exista un grado de libertad, por la dependencia lineal de una de las restricciones con respecto a las (m+n-1) restantes; se hace uso de ese grado de libertad para asignar un valor arbitrario a cualquiera de los multiplicadores dual. (Se recomienda, por simplicidad, asignar valor cero a aquel multiplicador dual asociado a la fila o columna con la mayor cantidad de variables básicas).
A partir de este multiplicador dual, los restantes multiplicadores duales se calculan mediante la expresión que se indica, la que debe cumplirse para todo casillero de VARIABLE BASICA:

$$\boxed{C_{ij} - u_i - v_j = 0}$$

***b) Cálculo de los Coeficientes de Costo Alternativo***

Los coeficientes de costo alternativo indican la tasa de variación que experimentará la función objetivo, por cada unidad de producto que sea asignado a una variable actualmente NO BASICA.
Si el coeficiente de costo alternativo es mayor que cero, la función objetivo aumentará de valor; si es negativo disminuirá y si es igual a cero no variará.
Los coeficientes de costo alternativo $\overline{C}_{ij}$ se calculan para los casilleros de VARIABLES NO BASICAS, a partir de los multiplicadores dual, con la siguiente expresión:

$$\boxed{\overline{C}_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j}$$

*c)* ***Condición de Optimalidad***

Considerando la definición de los coeficientes de costo alternativo se puede concluir que para que una solución sea óptima ninguno de ellos puede ser negativo. Es decir, la condición de optimalidad es que:

$$\boxed{\overline{C}_{ij} \geq 0 \quad \forall \ (i, j)}$$

Si todos los coeficientes son estrictamente mayores que cero la solución óptima será única; sin embargo, si existe alguno de ellos igual a cero significará que existe una solución óptima alternativa.

## 5. Mejoramiento de una solución

Cuando existe algún coeficiente de costo alternativo negativo la solución no es óptima y debe ser mejorada con el siguiente procedimiento:

- Asigne el valor $\theta$ a la variable no básica asociada al coeficiente de costo alternativo mas negativo.
- A partir del casillero donde se asignó el valor $\theta$ encuentre un recorrido cerrado, de líneas rectas horizontales y verticales (no diagonales), cuyas esquinas sean casilleros de variables básicas.
- Siguiendo el recorrido, primero reste y luego sume, alternadamente, en cada esquina del mismo el valor $\theta$
- Encuentre el valor de $\theta$ analizando todos los casilleros donde se restó $\theta$ igualando a cero las expresiones numéricas de dichos casilleros. El valor de $\theta$ queda definido como el mínimo valor de todos los posibles.
- Genere una nueva tabla de asignación para el transporte, modificando los valores de las variables básicas luego de reemplazar la letra $\theta$ por el valor para ella encontrado.
- Esta nueva tabla representa una nueva solución cuya optimalidad debe ser igualmente determinada por el procedimiento antes indicado.

## 6. Problemas de Maximización

Para resolver problemas de transporte en los que la función objetivo es de maximización de un beneficio (ingresos o utilidades totales), se debe proceder de la siguiente manera:

*a)* ***Transformación de la matriz de utilidades o ingresos en matriz de Costos Equivalentes***

- Una vez balanceado el problema (Oferta = Demanda) y definida la matriz de utilidades o ingresos, se debe identificar en ella el elemento de mayor valor, denominándolo $U_{max}$.

- La matriz de costos equivalentes se genera a partir de la de utilidades, de tal forma que cada elemento $C_{ij}$ sea igual a la diferencia entre $U_{max}$ y cada $U_{ij}$.

$$\boxed{\vec{C}_{eq} = \left\{ C_{ij} = U_{max} - U_{ij} \right\}}$$

***b) Desarrollo del Algoritmo de Transporte***

Utilizando la matriz de costos equivalentes se desarrolla el algoritmo de transporte para minimización hasta obtener la o las soluciones óptimas correspondientes.

***c) Valorización de la función objetivo***

Para valorizar la función objetivo (Máximo) se debe utilizar la matriz de utilidades o ingresos original para la solución óptima encontrada.

## 7. Problema ejemplo [2]

La Johnson Electric produce motores eléctricos pequeños para cuatro fabricantes de instrumentos, en cada una de sus tres plantas. Los costos de producción por unidad varían según las ubicaciones debido a diferencias en el equipo de producción y en el rendimiento de los obreros. Los costos de producción por unidad y la capacidad mensual de producción (oferta) se indican en la Tabla 1.
Los pedidos de clientes que deben producirse el siguiente mes se muestran en la Tabla 2.
El costo de abastecimiento de estos clientes varía de una planta a otra. El costo de transporte por unidad aparece en la Tabla 3.
La Johnson debe decidir cuantas unidades se debe producir en cada planta y qué porción de la demanda de cada cliente se surtirá desde cada una de ellas. Se desea minimizar el costo total de producir y transportar los motores para los clientes.
Resuelva este problema mediante el algoritmo de transporte considerando los siguientes dos casos:

a. Se utiliza la capacidad total de producción de las tres plantas.
b. Se produce sólo la cantidad de motores necesaria para satisfacer la demanda.

Tabla 1

| Planta | Costo Prod. por unidad | Capacidad mensual de Producción |
|---|---|---|
| A | $ 17 | 800 |
| B | $ 20 | 600 |
| C | $ 24 | 700 |

Tabla 2

| Cliente | Demanda |
|---|---|
| 1 | 300 |
| 2 | 500 |
| 3 | 400 |
| 4 | 600 |

Tabla 3

| | Hacia | | | |
|---|---|---|---|---|
| Desde | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A | $3 | $2 | $5 | $7 |
| B | $6 | $4 | $8 | $3 |
| C | $9 | $1 | $5 | $4 |

[2] Problema 7-11, Pag. 323, Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa; Gould, Eppen y Schmidt

***Solución Caso a.***

**BUSQUEDA DE UNA PRIMERA SOLUCION FACTIBLE**

***Método de la Esquina N-O***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 22 | 24 | 17 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | 23 | 20 | 600 |
| 33 | 25 | 29 | 28 | 24 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

$Z_{N\text{-}O}$ =..........................................................

***Método del Costo Mínimo***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 22 | 24 | 17 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | 23 | 20 | 600 |
| 33 | 25 | 29 | 28 | 24 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

$Z_{CM}$ =..........................................................

***Método de VOGEL***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 22 | 24 | 17 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | 23 | 20 | 600 |
| 33 | 25 | 29 | 28 | 24 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

$Z_{VOGEL}$ =..............................................................

**DETERMINACION DE LA OPTIMALIDAD DE LA SOLUCION Y MEJORAMIENTO DE LA SOLUCION**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***300*** 20 | ***100*** 19 | ***400*** 22 | 24 | 17 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | ***600*** 23 | 20 | 600 |
| 33 | ***400*** 25 | 29 | 28 | ***300*** 24 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 22 | 24 | 17 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | 23 | 20 | 600 |
| 33 | 25 | 29 | 28 | 24 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

Caso b. Cuando se desea producir sólo lo demandado

***Método de VOGEL***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 22 | 24 | 0 | 800 |
| 26 | 24 | 28 | 23 | 0 | 600 |
| 33 | 25 | 29 | 28 | 0 | 700 |
| 300 | 500 | 400 | 600 | 300 | |

$Z_{VOGEL}$ =...........................................................

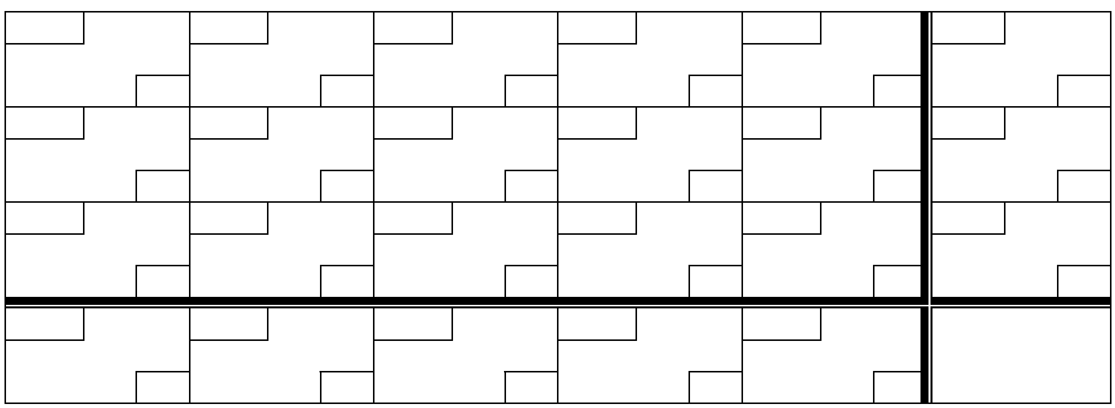
## 8. Problema ejemplo de maximización

Una empresa tiene tres bodegas con 200, 300 y 500 unidades de un producto en stock.
Los productos deben ser distribuidos a 5 clientes que han solicitado las siguientes cantidades de producto: 150, 200, 250, 100 y 300 unidades, respectivamente.

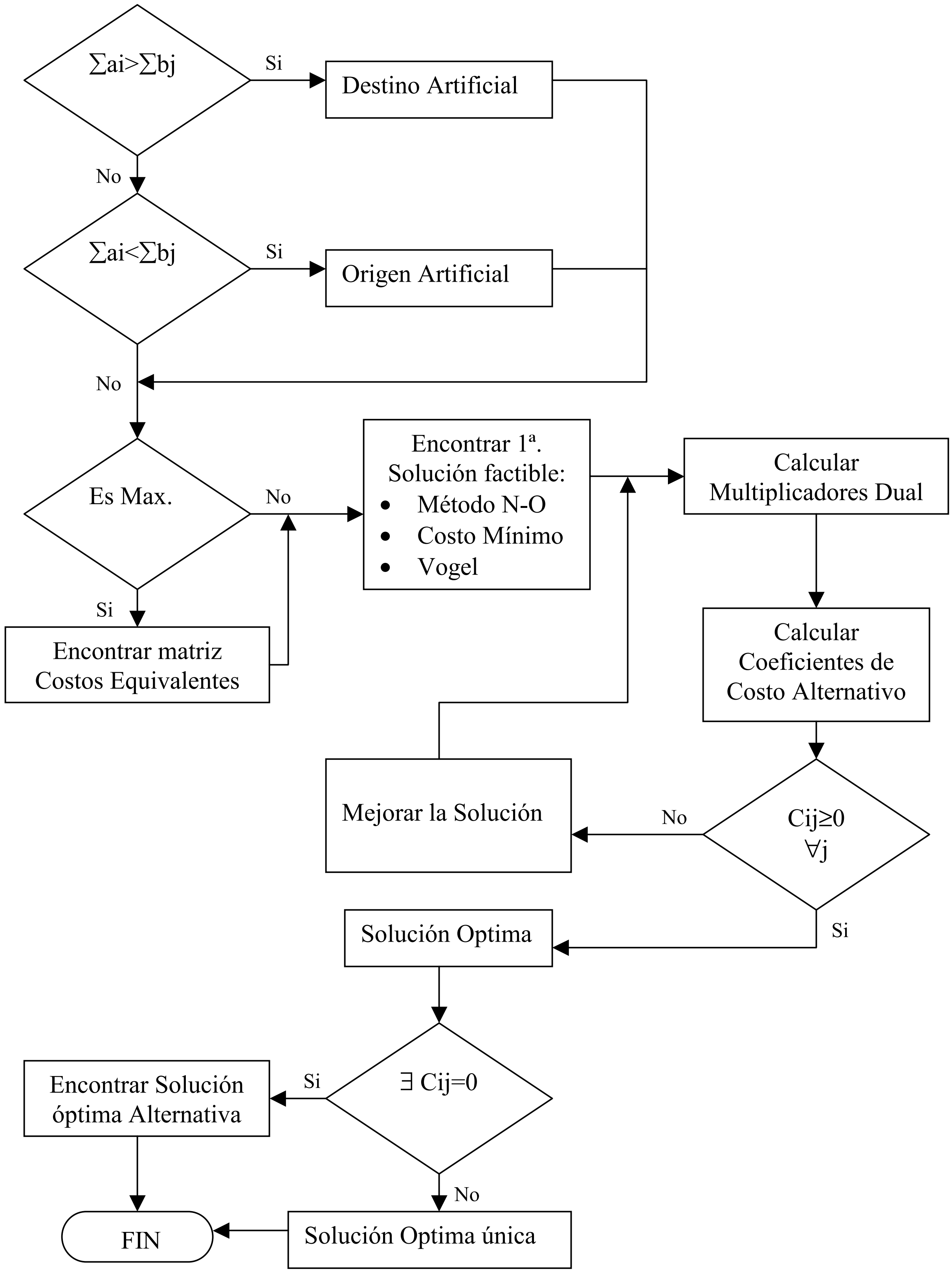
Considerando los precios de venta pactados con cada cliente y los costos de producción y transporte de los mismos, la utilidad por unidad de producto que se obtiene de acuerdo a la decisión de despacho de los productos a cada cliente es la siguiente:

| Hacia<br>Desde | Cliente 1 | Cliente 2 | Cliente 3 | Cliente 4 | Cliente 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bodega 1 | 40 | 60 | 50 | 70 | 80 |
| Bodega 2 | 50 | 60 | 50 | 40 | 60 |
| Bodega 3 | 35 | 80 | 90 | 60 | 50 |

Resuelva este problema utilizando el algoritmo de transporte.



# DIAGRAMA DE FLUJO ALGORITMO DE TRANSPORTE



# V. MODELO DE ASIGNACION

El modelo de asignación es un caso especial de programación lineal que trata la siguiente problemática:
Se tienen **"n"** trabajos que realizar y **"n"** operarios disponibles para ejecutarlos.
Debido a diferencias en las habilidades de los operarios y por lo tanto en su rendimiento, así como a diferencias de sueldos, preparación, experiencia, etc., el costo de asignar un trabajo a un operario es distinto al que se incurre si es asignado a otro. (Costo en tiempo, en dinero, etc.).
El modelo de asignación obtiene la solución óptima (mínimo) de distribución de los trabajos entre los operarios.

## *A. MODELO MATEMATICO GENERAL*

Antes de plantear el modelo matemático general es menester considerar que este modelo tiene solución sólo si el número de trabajos es igual al número de operarios. De no ser así se deben crear, ya sea trabajos u operarios artificiales según sea el caso, con costos de asignación nulos.
El modelo matemático general de programación lineal es el siguiente:

Sea Xij = Variable entera binaria, 1 Si el trabajo i es asignado al operario j
0 Si el trabajo i NO es asignado al operario j

F.O. MIN **Z** = $c_{11}X_{11}+c_{12}X_{12}+c_{13}X_{13}+.....+c_{1n}X_{1n}+c_{21}X_{21}+c_{22}X_{22}+c_{23}X_{23}+......$
$+c_{2n}X_{2n}++......+c_{n1}X_{n1}+c_{n2}X_{n2}+c_{n3}X_{n3}+........+c_{nn}X_{nn}$

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} +.....+ X_{1n} = 1$ Cada trabajo puede ser desarrollado por sólo un operario.
$X_{21} + X_{22} + X_{23} +.....+ X_{2n} = 1$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} +.....+ X_{3n} = 1$
..........................................................................
..........................................................................
$X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} +.....+ X_{nn} = 1$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} +.....+ X_{n1} = 1$ Cada operario puede ser asignado a sólo un trabajo.
$X_{12} + X_{22} + X_{32} +.....+ X_{n2} = 1$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} +.....+ X_{n3} = 1$
..........................................................................
..........................................................................
$X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} +.....+ X_{nn} = 1$

## B. EL METODO HUNGARO

Para resolver problemas de asignación se ha diseñado una metodología especial denominada "Método Húngaro" como sigue:

### 1. Acondicionamiento de la matriz de costos

- Designe a la matriz de costos original como $C_0$.
- En la matriz de costos $C_0$ identifique el menos elemento de cada fila.
- Genere una nueva matriz de costos $C_1$ a partir de la matriz de costos $C_0$, restando a todos los elementos de una fila el menor elemento de ella.
- En la matriz de costos $C_1$ identifique el menos elemento de cada columna.
- Genere una nueva matriz de costos $C_2$ a partir de la matriz de costos $C_{1|}$, restando a todos los elementos de una columna el menor elemento de ella.

Los pasos anteriores permiten que en la matriz de costos $C_2$ hayan a lo menos un cero por cada fila y por cada columna y pueden realizarse en orden inverso, es decir, restar primero el menor elemento de cada columna y luego el menor elemento de cada fila.

### 2. Proceso de asignación

- Calcule a un costado y bajo la matriz de costos $C_2$.la cantidad de ceros que existe por fila y por columna.
- En aquella fila o columna con la menor cantidad de ceros elija uno de esos ceros como posición de asignación destacándolo en un marco.
- Elimine los restantes ceros de la misma fila o columna del cero recién enmarcado tarjándolos con una cruz.
- Repita los tres pasos anteriores hasta que todos los ceros estén ya sea enmarcados o tarjados.
- Si al término del proceso de asignación existen **"n"** ceros enmarcados se habrá encontrado la solución óptima del problema.
- La solución óptima queda definida por una matriz de asignación $\mathbf{X}$ cuyos elementos $X_{ij}$ son iguales a uno en las posiciones donde existen ceros enmarcados y son iguales a cero en todo el resto de las posiciones.
- Para valorar la función objetivo óptima se deben sumar los elementos de la matriz de costos original $C_0$ que estén en la misma posición relativa que los ceros enmarcados, es decir, en la misma posición relativa que los elementos unidad de la matriz de asignación.

## 3. Mejoramiento de una solución

Cuando al término del proceso de asignación no existen **"n"** ceros enmarcados quiere decir que la solución no es siquiera factible y debe por tanto mejorarse. Para ello se sigue el siguiente procedimiento:

- Destaque con un asterisco aquellas FILAS sin ceros enmarcados.
- En las filas previamente destacadas identifique las columnas que tienen ceros tarjados y destáquelas con un asterisco.
- En las columnas previamente destacadas identifique las filas que tienen ceros enmarcados y destáquelas con un asterisco.
- Repita los dos pasos anteriores hasta que ya no sea posible destacar nuevas filas ni nuevas columnas.
- Trace una línea por sobre cada FILA NO DESTACADA y por sobre cada COLUMNA DESTACADA.
- De entre los elementos no cubiertos por línea identifique el menor de ellos y denomínelo $C_{min}$.
- Genere una nueva matriz de costos $C_k$ tal que el elemento $C_{min}$ ha sido restado en todos los elementos no cubiertos por línea, ha sido sumado en aquellas posiciones donde existen cruces de línea y el resto de los elementos ha permanecido sin variación.
- Con esta nueva matriz de costos repita el proceso de asignación a partir de la contabilización de ceros por fila y por columna.

## 4. Problemas de Maximización

Para resolver problemas de asignación en los que la función objetivo es de maximización de un beneficio (ingresos o utilidades totales), se debe proceder de la siguiente manera:

***a) Transformación de la matriz de utilidades o ingresos en matriz de Costos Equivalentes***

- Una vez definida la matriz de utilidades o ingresos, se debe identificar en ella el elemento de mayor valor, denominándolo $U_{max}$.
- La matriz de costos equivalentes se genera a partir de la de utilidades, de tal forma que cada elemento $C_{ij}$ sea igual a la diferencia entre $U_{max}$ y cada $U_{ij}$.

$$\boxed{\vec{C}_{eq} = \left\{ C_{ij} = U_{max} - U_{ij} \right\}}$$

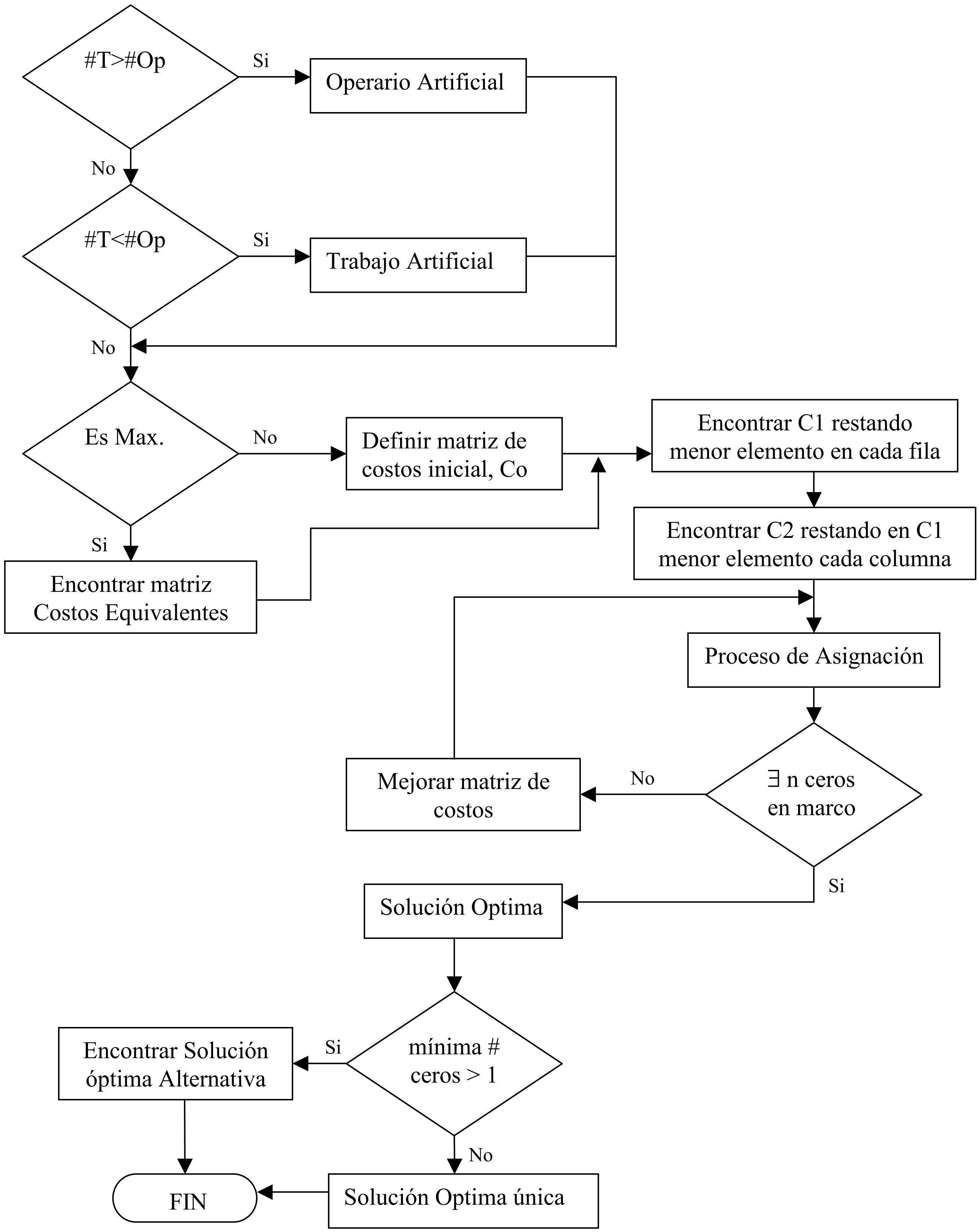
***b) Desarrollo del Método Húngaro***

Utilizando la matriz de costos equivalentes como la matriz $C_0$ inicial, se desarrolla el método Húngaro para minimización hasta obtener la o las soluciones óptimas correspondientes.

***c) Valorización de la función objetivo***

Para valorizar la función objetivo (Máximo) se debe utilizar la matriz de utilidades o ingresos original para la solución óptima encontrada.

# DIAGRAMA DE FLUJO ALGORITMO DE ASIGNACION



## 5. Problemas Ejemplo

### ***Problema 1***

El departamento de mantención debe realizar 3 trabajos de reparación de maquinarias y equipos.
Se cuenta con cuatro grupos de técnicos, cada uno con diferente instrumental y diferentes habilidades para realizar los tres trabajos. Debido a estas diferencias el tiempo estimado de desarrollo de cada mantención será diferente dependiendo del grupo al cual sea asignado cada trabajo. En la tabla se muestra la cantidad de horas que se estima tomará la realización de cada trabajo según el grupo al que se le asigne.
Use el método húngaro para determinar la asignación óptima de los tres trabajos, es decir, aquella que minimice el tiempo total de ejecución de todas las mantenciones.

| | Trabajo | | |
|---|---|---|---|
| Grupo de mantención | 1 | 2 | 3 |
| A | 24 | 45 | 25 |
| B | 33 | 48 | 23 |
| C | 24 | 52 | 20 |
| D | 30 | 56 | 21 |

***Problema 2***[3]

Se Planea la venta de cinco lotes de terreno y se han recibido ofertas individuales de cuatro clientes. Debido a la cantidad de capital que se requiere, estas ofertas se han hecho en el entendimiento de que ninguno de los cuatro clientes comprará mas de un lote. Las ofertas se muestran en la Tabla 1. Se desea decidir a que comprador asignar cada lote de tal forma que se maximice el ingreso total a partir de estas ofertas. Use el método húngaro para encontrar la solución óptima de este problema

Tabla 1

| | Lote | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Comprador | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| A | 16 | 15 | 25 | 19 | 20 |
| B | 19 | 17 | 24 | 15 | 25 |
| C | 15 | 15 | 18 | 0 | 16 |
| D | 19 | 0 | 15 | 17 | 18 |

[3] Problema 7-16 Pag. 325, Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa, Gould, Eppen y Schmidt, 3ª Ed.,1992

# VI. MODELOS EN REDES

## A. MALLA PERT Y METODO CPM

Una malla PERT (Program Evaluation Review Technique) permite planificar y controlar el desarrollo de un proyecto.
Normalmente para desarrollar un proyecto específico lo primero que se hace es determinar, en una reunión multidisciplinaria, cuales son las actividades que se deberá ejecutar para llevar a feliz término el proyecto, cuál es la precedencia entre ellas y cuál será la duración esperada de cada una.
Para definir la precedencia entre actividades se requiere de una cierta cuota de experiencia profesional en el área, en proyectos afines.

### 1. Duración de una Actividad

Para estimar la duración esperada de cada actividad es también deseable tener experiencia previa en la realización de tareas similares. En planificación y programación de proyectos se estima que la duración esperada de una actividad es una "variable aleatoria de distribución de probabilidad Beta Unimodal" de parámetros (a,m,b) donde :
a = Duración optimista
m = Duración más probable
b = Duración pesimista.
hEl valor esperado en esta distribución está se expresa en la siguiente fómula:
$\bar{t} = \frac{a+4m+b}{6}$, cuya variabilidad está dada por: una varianza $\sigma^2 = \left[\frac{b-a}{6}\right]^2$ y una desviación estándar $\sigma = \frac{b-a}{6}$

En un dibujo de una malla PERT podemos distinguir nodos y arcos. Los nodos representan instantes en el tiempo. Específicamente, representan el instante de inicio de una o varias actividades y simultáneamente el instante de término de otras varias actividades. Los arcos por su parte representan las actividades, tienen un nodo inicial y otro de término donde llega en punta de flecha. Asociada a cada arco está la duración esperada de la actividad.

### 2. Dibujo de una malla PERT

Existen dos metodologías aceptadas para dibujar una malla PERT, la de "Actividad en el Arco" y las de "Actividad en el Nodo", siendo ésta última la mas utilizada en la actualidad en atención a que es la que usan la mayoría de las aplicaciones computacionales especialistas en este tema.

Cada nodo contiene la siguiente información sobre la actividad:
- Nombre de la actividad
- Duración esperada de la actividad (t)

- Tiempo de inicio más temprano (ES = Earliest Start)
- Tiempo de término más temprano (EF = Earliest Finish)
- Tiempo de inicio más tardío (LS = Latest Start)
- Tiempo de término más tardío (LF = Latest Finish)
- Holgura de la Actividad (H)

La información se distribuye de la siguiente manera:

<table>
<tr><td>Act.</td><td colspan="2">t</td><td>H</td></tr>
<tr><td colspan="2">ES</td><td colspan="2">EF</td></tr>
<tr><td colspan="2">LS</td><td colspan="2">LF</td></tr>
</table>

Por convención los arcos se dibujan siempre con orientación hacia la derecha, hacia el nodo de término del proyecto, nunca retrocediendo.

El dibujo de una malla PERT se comienza en el nodo de inicio del proyecto. A partir de él se dibujan las actividades que no tienen actividades precedentes, o sea, aquellas que no tienen que esperar que otras actividades terminen para poder ellas iniciarse.
A continuación se dibujan las restantes actividades cuidando de respetar la precedencia entre ellas.
Al terminar el dibujo de la malla preliminar, existirán varios nodos ciegos, nodos terminales a los que llegan aquellas actividades que no son predecesoras de ninguna otra, es decir aquellas que no influyen en la fecha de inicio de ninguna otra, estas son las actividades terminales y concurren por lo tanto al nodo de término del proyecto.

## 3. Cálculo de los tiempos de inicio y término más tempranos

El tiempo de inicio más temprano "ES" (Earliest Start) y de término mas temprano "EF" (Earliest finish) para cada actividad del proyecto, se calculan desde el nodo de inicio hacia el nodo de término del proyecto según la siguiente relación:

$$EF = ES + t$$

Donde (t) es el tiempo esperado de duración de la actividad y donde ES queda definida según la siguiente regla:

- ***Regla del tiempo de inicio más temprano:***

El tiempo de inicio más temprano, ES, de una actividad específica, es igual al **mayor** de los tiempos **EF** de todas las actividades que la preceden directamente.
El tiempo de inicio más temprano de las actividades que comienzan en el nodo de inicio del proyecto es cero (0).

**4. Duración esperada del proyecto**

La duración esperada del proyecto (T) es igual al mayor de los tiempos EF de todas las actividades que desembocan en el nodo de término del proyecto.

**5. Cálculo de los tiempos de inicio y término más tardíos**

El tiempo de inicio más tardío "LS" (Latest Start) y de término mas tardío "LF" (Latest finish) para cada actividad del proyecto, se calculan desde el nodo de término retrocediendo hacia el nodo de inicio del proyecto según la siguiente relación:

$$LS = LF - t$$

Donde (t) es el tiempo esperado de duración de la actividad y donde LF queda definida según la siguiente regla:

- ***Regla del tiempo de término más tardío:***

El tiempo de término más tardío, LF, de una actividad específica, es igual al **menor** de los tiempos **LS** de todas las actividades que comienzan exactamente después de ella.
El tiempo de término más tardío de las actividades que terminan en el nodo de término del proyecto es igual a la duración esperada del proyecto (T).

**6. Holguras, actividades críticas y rutas críticas**

- ***Holgura***

Se denomina holgura de una actividad, al tiempo que tiene ésta disponible para, ya sea, atrasarse en su fecha de inicio, o bien alargarse en su tiempo esperado de ejecución, sin que ello provoque retraso alguno en la fecha de término del proyecto.
La holgura de una actividad se calcula de la siguiente forma:

$$H = LF - EF \quad \text{o bien}$$
$$H = LS - ES \quad .$$

- ***Actividades críticas***

Se denomina actividades críticas a aquellas actividades cuya holgura es nula y que por lo tanto, si se retrasan en su fecha de inicio o se alargan en su ejecución mas allá de su duración esperada, provocarán un retraso exactamente igual en tiempo en la fecha de término del proyecto.

- ***Rutas críticas***

Se denomina rutas críticas a los caminos continuos entre el nodo de inicio y el nodo de término del proyecto, cuyos arcos componentes son todos actividades críticas.
Las rutas críticas se nombran por la secuencia de actividades críticas que la componen o bien por la secuencia de nodos por los que atraviesa.
Nótese que un proyecto puede tener más de una ruta crítica pero a lo menos tendrá siempre una.

## 7. Variabilidad de la duración de un proyecto

La duración esperada del proyecto (T) es una variable aleatoria proveniente de la suma de otras variables aleatorias, las duraciones esperadas de las actividades de la o las rutas críticas del proyecto y por lo tanto su variabilidad dependerá de la variabilidad de todas las actividades críticas del proyecto.

Se tiene entonces que la varianza y la desviación estándar de la duración esperada del proyecto está dada por:

$$\sigma_T^2 = \sum \textbf{Varianzas de todas las Actividades críticas del proyecto}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2}$$

## 8. Cálculo de probabilidades

Asumiendo que la duración esperada de una actividad es una variable aleatoria independiente, podemos también suponer que la duración esperada del proyecto es una variable aleatoria de distribución aproximadamente normal y por lo tanto podemos calcular algunas probabilidades haciendo uso de una tabla de distribución normal, tomando en consideración las siguientes relaciones:

La probabilidad de que el proyecto se termine antes de una duración dada $t_0$ está dada por:

$$P\{T \leq t_0\} = P\{Z \leq z_0\}$$

donde $z_0$ es el valor de entrada a una tabla de distribución normal y que se calcula según:

$$z_0 = \frac{t_0 - T}{\sigma_T}$$

## *B. ALGORITMO DE DETERMINACIÓN DE LA RUTA MAS CORTA*

Un caso típico de optimización lo constituye el determinar la ruta más corta entre un nodo origen y cada uno de los restantes nodos de una red, lo que permitirá reducir costos, por ejemplo, en una red de distribución de productos o en la elección de una política de reemplazo de equipos o maquinaria.
En esta aplicación de modelos en redes, los nodos representan ya sea lugares físicos (Ubicación de bodegas y clientes) o bien instantes en el tiempo (inicio o término de un año) y los arcos representan en general costos entre los nodos interconectados, como la distancia entre ellos en longitud o tiempo o el costo en dinero entre el inicio de un año y el término del mismo.
La metodología de solución de estos problemas es la denominada "de las etiquetas":

1. Cada nodo se etiquetará con una etiqueta (a,b), donde a = la distancia hasta el origen y b = el nodo anterior en la ruta seguida desde el origen.
2. Etiquetar el nodo origen con la etiqueta (0,H) y transformar el nodo en ***nodo de etiqueta permanente***, achurándolo.
3. Considere todos los nodos que están conectados directamente, por un solo arco, con nodos de etiqueta permanente y otorgue a cada uno de ellos la correspondiente etiqueta que con respecto a ese nodo le corresponde, etiquetas que son de carácter provisorio.
4. De entre todos los nodos con etiqueta provisoria, seleccione aquel con la menor componente de distancia "a" para transformarlo en nodo de etiqueta permanente, achurándolo.
5. Repita los pasos 3 y 4 hasta que todos los nodos tengan etiqueta permanente.
6. Para determinar la ruta más corta a un nodo específico instálese sobre ese nodo: La componente "a" de la etiqueta le indicará cual es la distancia mas corta desde ese nodo hasta el origen y la componente b el nodo hacia el cuál tiene que regresar para determinar, retrocediendo, la ruta que determina esa distancia mínima.

Nótese que un nodo puede tener asociada más de una etiqueta pero que sólo estará vigente aquella con la menor componente de distancia "a". Si tienen la misma componente de distancia todos estarán vigentes y determinarán la existencia de rutas mas cortas alternativas.

## *C. ALGORITMO DE DETERMINACIÓN DEL ARBOL MINIMO DE COMUNICACIONES*

Otro caso común de optimización de los modelos en redes lo constituye el determinar el árbol mínimo de comunicaciones entre los nodos de una red. Se trata de encontrar que arcos, del total de arcos posibles de implementar, se implementarán para poder asegurar que siempre sea posible trasladarse de un nodo a otro de la red, esto, al mínimo costo total posible.
En esta aplicación de modelos en redes, los nodos representan lugares físicos y los arcos la distancia entre ellos en longitud.
Existen dos metodologías de solución de estos problemas el método gráfico y el método tabular.

- *Método Gráfico*

1. Comience con cualquier nodo designándolo como ***nodo conectado***, achurándolo.
2. Considere todos los arcos que unen directamente nodos conectados con nodos no conectados, elija aquel arco con la menor componente de distancia como s***egmento de conexión*** y el nodo terminal como nuevo nodo conectado, achurándolo.
3. Repita el paso dos hasta que todos los nodos estén conectados (Achurados).
4. El árbol mínimo de comunicaciones queda determinado por los segmentos de conexión identificados en el proceso.

- *Método Tabular*

1. Comience con cualquier nodo designándolo como ***nodo conectado*** haciendo un ticket en la línea correspondiente al nodo y una cruz en la columna correspondiente al mismo nodo.
2. Elimine todas las componentes de distancia bajo la columna con cruz.
3. Considere todas las componentes de distancia que están en las líneas con ticket y elija la menor componente destacándola en un círculo.
4. Elimine las restantes componentes de distancia en la columna del elemento recién circundado, haga una cruz en el encabezado de esa columna y un ticket en la línea del mismo número de esa columna.
5. Repita los pasos tres y cuatro hasta que todas las líneas estén con ticket y todas las columnas con cruz.
6. El árbol mínimo de comunicaciones se dibuja interconectando los nodos de la red con los arcos que las coordenadas de cada elemento en círculo determinan.