

CAPITULO 6: PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Comúnmente se han considerado como un caso particular de los problemas lineales los problemas de transporte y de asignación. Pero hemos de notar que se trata en realidad de problemas de programación entera, dado que las variables que aparecen en estos problemas son variables que han de tomar valores enteros.

Este tipo de problemas los vamos a tratar como problemas especiales de programación lineal, dado que su estructura especial ha hecho que se desarrollen algoritmos específicos para este tipo de problemas, más eficientes que el método simplex. No obstante, estamos más interesados en plantear su estructura que en su resolución particular. Para ello recurriremos al uso del algoritmo de simplex, aunque indicaremos diferentes programas de software donde encontrar los algoritmos particulares para este tipo de problemas.

6.1 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

La primera referencia escrita de este problema se remonta a 1781, cuando el matemático francés Gaspard Monge describe el problema de la construcción y abastecimiento de fortificaciones militares de los ejércitos de Napoleon. Monge era entonces general de los ejércitos napoleónicos. Para resolver este problema usó el método de “cortar y llenar”, es decir, ir abasteciendo las diferentes trincheras desde los depósitos de material existentes.

Formalmente, este problema aparece en 1941 cuando F.L. Hitchcock publica una solución analítica para este problema, aunque su desarrollo se produce a finales de los años 40, cuando Koopmans (un joven holandés) realiza su tesis doctoral sobre los problemas de embarque de la marina holandesa.

A partir de ese momento el campo de aplicación del problema del transporte empieza a crecer de una forma muy rápida, no solo en aplicaciones militares, sino también en el campo de la producción, la distribución, las finanzas, etc.

6.2 MODELIZACION DEL PROBLEMA: HIPOTESIS BASICAS.

Se trata de uno de los primeros problemas que se formularon como problemas de programación entera. El problema consiste en lo siguiente:

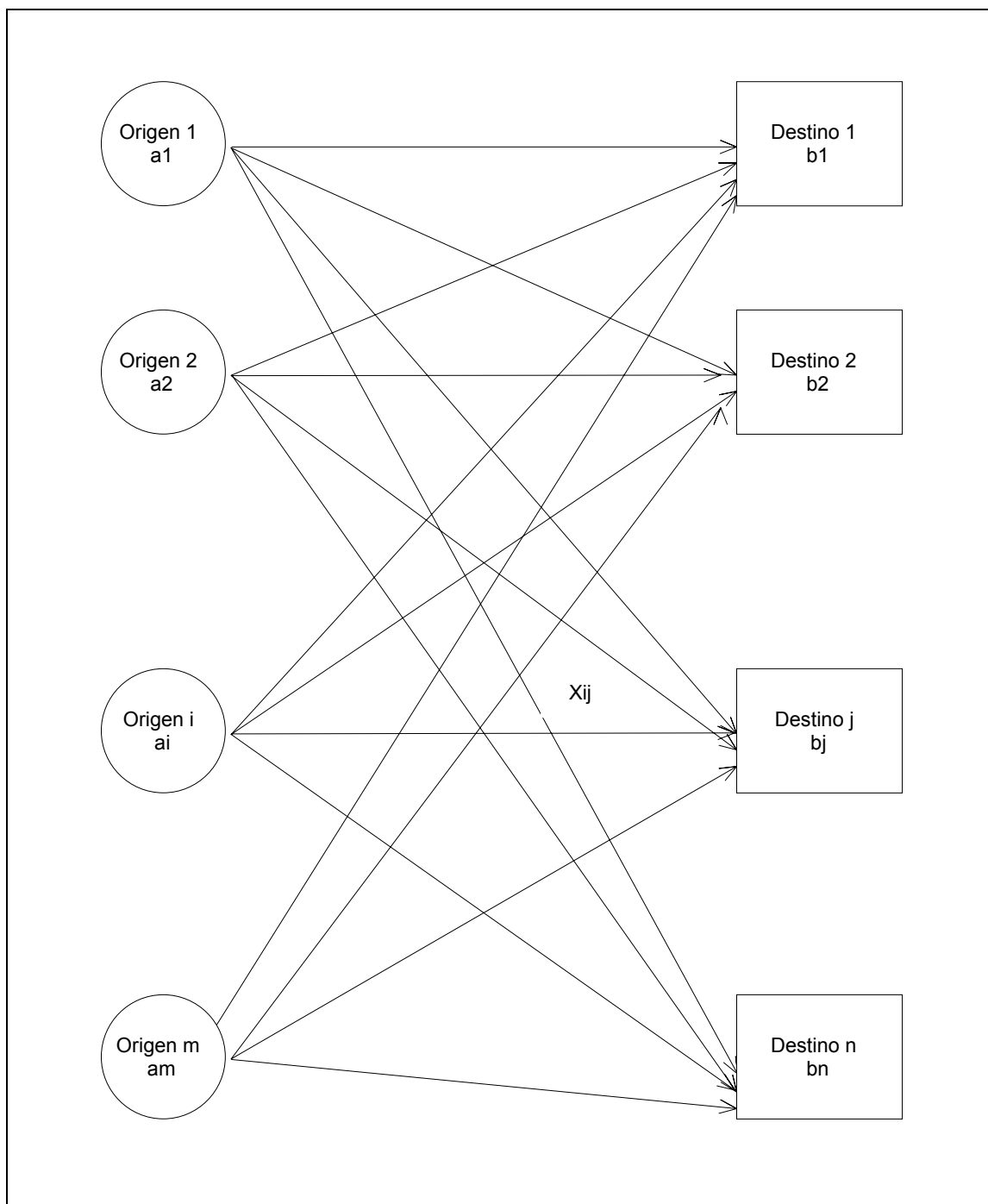
Supongamos que tenemos m orígenes (almacenes) que tienen que suministrar a n destinos (centros de consumo) un cierto producto. La capacidad de oferta de cada origen i ($i=1, \dots, m$) es a_i ($a_i > 0$), mientras que la demanda de cada destino j ($j=1, \dots, n$) es b_j , ($b_j > 0$).

El coste de enviar una unidad de producto del origen i al destino j es c_{ij} .

El problema consiste en determinar cuantas unidades de producto deben enviarse desde el origen i al destino j , de forma que se minimice el coste de envío, y por descontado, garantizando la demanda de los destinos y no excediendo de la capacidad de los orígenes.

A las variables de decisión X_{ij} representan la cantidad enviada desde el almacén i al centro de consumo j , estas variables de decisión han de ser no negativas y enteras. En lo sucesivo, y para el planteamiento formal del problema vamos a obviar la condición de integridad de las variables, ya que bajo determinadas condiciones podemos garantizar la existencia de una solución entera para el problema resolviéndolo como un problema lineal.

Este problema se puede comprender mejor con la ayuda del gráfico siguiente, en donde se han representado los orígenes y los destinos:



Por tanto, el problema se puede plantear matemáticamente como:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

En este problema, el primer conjunto de restricciones ($\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$) nos está indicando que los envíos totales de cada uno de los i orígenes no puede exceder de la cantidad disponibles en cada uno de los i almacenes. Por ejemplo, consideremos el origen 3. Para este origen la ecuación correspondiente sería la siguiente:

$$x_{31} + x_{32} + \dots + x_{3n} \leq a_3$$

en donde x_{31} representa la cantidad enviada desde el origen 3 hasta el almacén 1, x_{32} es la cantidad enviada desde el origen 3 hasta el almacén 2, y así sucesivamente. El término independiente a_3 representa la cantidad total disponible en el origen 3, la cual -por supuesto- no puede sobrepasarse.

El segundo conjunto de restricciones del problema ($\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j$) está indicando que la cantidad recibida por cada uno de los j destinos no puede ser inferior a la demanda del mismo. Estas ecuaciones tienen una interpretación similar a la dada anteriormente.

La simple observación de la estructura del problema nos indica que la suma de disponibilidades en los orígenes debe ser mayor (o igual) que la suma de demandas de

los destinos. En el caso contrario, es decir $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ no se podrán satisfacer todas las demandas.

$$\text{Min } Z = c x$$

s.a:

$$A x = d$$

$$x \geq 0.$$

6.3 PROPIEDADES MATEMÁTICAS DEL PROBLEMA.

De este problema, podemos enunciar una serie de condiciones que garantizan diversas propiedades. Estas son muy similares a las que hemos analizado anteriormente para la matriz M de incidencia nodo-arco.

Condición 1: Una condición necesaria y suficiente para que un problema de transporte tenga solución es que la oferta total sea igual a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = M$$

En el caso que en un problema determinado no se cumpla esta condición, es decir, la cantidad disponible sea superior a la cantidad demanda entonces podemos recurrir a incluir un destino ficticio que recoja este exceso. O bien, en el caso contrario, cuando la demanda sea superior a la oferta, incluiremos un origen ficticio.

Con esto una solución factible es $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}$, para todo i, j , ya que $x_{ij} \geq 0$, y se cumplen todas las restricciones.

Además esta condición garantiza la no degeneración de las soluciones obtenidas.

Condición 2: El problema de transporte tiene una solución factible acotada, si los a_i y b_j lo están.

Condición 3: La matriz A de coeficientes, de orden $m+n$ (filas) y $n*m$ (columna), tiene un rango igual a $n+m-1$.

Condición 4: La matriz A es una matriz *unimodular*, lo que significa, que cualquier submatriz cuadrada de A de orden $n+m-1$ tiene un determinante con un valor igual a 0 o a ± 1 .

Esta cuarta condición nos permite garantizar que si los a_i y los b_j son enteros no negativos, los valores de las variables en toda solución factible básica y entonces, existe por lo menos una solución factible básica óptima que es entera.

Por tanto, a partir de esta condición ya no es necesario introducir la condición de integridad de las variables para obtener una solución óptima entera.

Estas condiciones son las que han permitido desarrollar nuevos algoritmos más eficientes que el método simplex, es decir, algoritmos que emplean menos tiempo y menos iteraciones en resolver el problema. No obstante, como ya hemos comentado con anterioridad para resolver los problemas que plantearemos a continuación usaremos un programa lineal.

6.4 EJEMPLO DE APLICACION

Vamos a ilustrar el procedimiento con el siguiente ejemplo sencillo:

Una determinada empresa que posee dos plantas de producción en Sevilla y Santander con una capacidad de almacenamiento de 350 y 600 Toneladas, respectivamente. Tiene que suministrar sus productos a tres clientes situados en Madrid, Barcelona y Valencia. La demanda de estos clientes es de 325, 300 y 275 Toneladas, respectivamente.

La distancia desde Sevilla a Madrid es de 538 Km., a Barcelona de 1046 Km. y a Valencia de 439 Km. La distancia de Santander a Madrid es de 393 Km., a Barcelona de 693 Km. y a Valencia de 673 Km. Debido a que se trata de un producto que requiere unos transportes especiales, el coste del transporte por kilometro y tonelada es de 5 pesetas.

La empresa se plantea cual debe ser la cantidad a transportar desde cada almacén a cada uno de los clientes, de forma que el coste del transporte sea mínimo.

Este problema, es un ejemplo típico de transporte, aunque podemos observar que las ofertas desde los almacenes son superiores a las demandas, en este caso podríamos plantear un destino ficticio, o bien plantear el problema en términos de desigualdades. En nuestro caso hemos preferido esta segunda alternativa.

El modelo se ha planteado a través de un fichero de datos en formato GMS de la siguiente forma: ([pulsar aquí](#))

```
*EJEMPLO DE APLICACION DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE
* USO DE LA FORMULACION TRADICIONAL

OPTION LIMROW =100;

SETS
    I          ORIGENES          /SEV, SAN/
    J          DESTINOS          /MAD, BAR, VAL/;

PARAMETERS
    A(I)       CANTIDAD DISPONIBLE
    / SEV      350
    SAN        600/
    B(J)       DEMANDA EN DESTINO
    / MAD      325
    BAR        300
    VAL        275/;

TABLE D(I,J) DISTANCIA EN KILOMETROS
      MAD      BAR      VAL
SEV    538     1046     439
SAN    393     693      673 ;

SCALAR F          COSTE POR KILOMETRO      /5/;

PARAMETER C(I,J)  COSTE DE TRANSPORTE ;
      C(I,J) = F * D(I,J);

VARIABLES
X(I,J)
Z;
POSITIVE VARIABLES X;

EQUATIONS
OBJ
OFERTA(I)
DEMANDA(J);

OBJ.. Z =E= SUM((I,J), C(I,J)*X(I,J) );
OFERTA(I).. SUM(J, X(I,J) ) =L= A(I);
DEMANDA(J)..SUM(I, X(I,J) ) =G= B(J);

MODEL TRANS1 /ALL/;

SOLVE TRANS1 USING LP MINIMIZING Z;

DISPLAY X.L, Z.L;
```

La solución al problema anterior viene dada por el siguiente fichero LST, en donde queremos resaltar las ecuaciones que conforman el problema, y analizar que se ajustan a la formulación tradicional

```

Equation Listing      SOLVE TRANS1 USING LP FROM LINE 45

---- OBJ  =E=

OBJ..  - 2690*X(SEV,MAD) - 5230*X(SEV,BAR) - 2195*X(SEV,VAL) -
1965*X(SAN,MAD) - 3465*X(SAN,BAR) - 3365*X(SAN,VAL) + Z =E= 0 ;

---- OFERTA  =L=

OFERTA(SEV)..  X(SEV,MAD) + X(SEV,BAR) + X(SEV,VAL) =L= 350 ;
OFERTA(SAN)..  X(SAN,MAD) + X(SAN,BAR) + X(SAN,VAL) =L= 600 ;

---- DEMANDA  =G=

DEMANDA(MAD)..  X(SEV,MAD) + X(SAN,MAD) =G= 325 ;
DEMANDA(BAR)..  X(SEV,BAR) + X(SAN,BAR) =G= 300 ;
DEMANDA(VAL)..  X(SEV,VAL) + X(SAN,VAL) =G= 275 ;

```

Como podemos observar las ecuaciones de oferta representan que la cantidad enviada de cada uno de los orígenes a cada uno de los destinos no puede superar las existencias de los almacenes.

Las ecuaciones de demanda, por su parte, representan que la cantidad recibida por cada uno de los almacenes desde cada uno de los orígenes tiene que ser, por lo menos, igual o superior a la demanda de cada uno de los destinos.

La solución se recoge en el siguiente cuadro, aunque hay que advertir que la solución se recoge dos veces, una en el formato del fichero de salida y la segunda mediante la opción DISPLAY:

S O L V E		S U M M A R Y			
MODEL	TRANS1	OBJECTIVE	Z		
TYPE	LP	DIRECTION	MINIMIZE		
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	45		
**** SOLVER STATUS		1 NORMAL COMPLETION			
**** MODEL STATUS		1 OPTIMAL			
**** OBJECTIVE VALUE		2299875.0000			
RESOURCE USAGE, LIMIT		2.630	1000.000		
ITERATION COUNT, LIMIT		7	10000		
Optimal solution found.					
Objective :		2299875.000000			
----- EQU OBJ		LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
		.	.	.	1.000
----- EQU OFERTA					
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL	
SEV	-INF	300.000	350.000	.	
SAN	-INF	600.000	600.000	-725.000	
----- EQU DEMANDA					
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL	
MAD	325.000	325.000	+INF	2690.000	
BAR	300.000	300.000	+INF	4190.000	
VAL	275.000	275.000	+INF	2195.000	
----- VAR X					
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL	
SEV.MAD	.	25.000	+INF	.	
SEV.BAR	.	.	+INF	1040.000	
SEV.VAL	.	275.000	+INF	.	
SAN.MAD	.	300.000	+INF	.	
SAN.BAR	.	300.000	+INF	.	
SAN.VAL	.	.	+INF	1895.000	
----- VAR Z		LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
		-INF	2.2999E+6	+INF	.
E x e c u t i o n					
----- 47 VARIABLE X.L					
	MAD	BAR	VAL		
SEV	25.000		275.000		
SAN	300.000	300.000			
----- 47 VARIABLE Z.L = 2299875.000					

Como podemos observar el almacén de Sevilla queda con 50 Ton. de excedentes, siendo el coste del transporte de casi 2,3 millones de pesetas.

Otro planteamiento de este problema es abordarlo como un problema de redes. Considerando el ejemplo anterior, podemos identificar 5 vértices de la red (dos orígenes y tres destinos) estos vértices están unidos por 6 arcos que enlazan cada uno de los orígenes con cada uno de los destinos.

Así tendremos los vértices siguientes:

Sevilla - Madrid

Sevilla - Barcelona

Sevilla - Valencia

Santander - Madrid

Santander - Barcelona

Santander - Valencia.

Para la representación de este problema, debemos determinar la matriz de incidencia nodo-arco, en la que como recordamos el nodo origen contiene -1 mientras que el nodo de destino contiene 1.

Los orígenes los representamos con cantidades negativas, mientras que los destinos los representamos con cantidades positivas, por tanto, este problema tiene entonces la representación de un problema lineal con una matriz técnica o matriz de incidencias M y un único vector de términos independientes.

La formulación del problema la hemos recogido en el siguiente fichero de datos ([pulsar aquí](#)):

```

*EJEMPLO DE APLICACION DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE
* USO DE LA FORMULACION COMO UNA RED

OPTION LIMROW =100;

SETS
    I      NODOS    /SEV, SAN, MAD, BAR, VAL/
    J      ARCOS    /SEV-MAD, SEV-BAR, SEV-VAL, SAN-MAD, SAN-BAR,
SAN-VAL /;

PARAMETERS
    A(I)    RECURSOS
        /SEV    -350
        SAN     -600
        MAD     325
        BAR     300
        VAL     275 /
    C(J)    COSTE DE LOS ARCOS
        /SEV-MAD 2690
        SEV-BAR  5230
        SEV-VAL  2195
        SAN-MAD  1965
        SAN-BAR  3465
        SAN-VAL  3365/;

TABLE    M(I,J)  MATRIZ DE INCIDENCIA
        SEV-MAD SEV-BAR SEV-VAL SAN-MAD SAN-BAR SAN-VAL
SEV      -1      -1      -1
SAN      -1      -1      -1
MAD      1
BAR      1
VAL      1
        1;

VARIABLES
X(J)
Z;
POSITIVE VARIABLES X;

EQUATIONS
OBJ
RESTRIC(I);

OBJ.. Z =E= SUM(J, C(J)*X(J) );
RESTRIC(I).. SUM(J, M(I,J)*X(J) ) =G= A(I);

MODEL TRARED /ALL/;

SOLVE TRARED USING LP MINIMIZING Z;

DISPLAY X.L, Z.L;

```

Al igual que en el caso anterior vamos a recoger por separado las ecuaciones del problema y la solución del mismo.

Las ecuaciones son:

```
Equation Listing      SOLVE TRARED USING LP FROM LINE 48

---- OBJ  =E=

OBJ..  - 2690*X(SEV-MAD) - 5230*X(SEV-BAR) - 2195*X(SEV-VAL) -
1965*X(SAN-MAD) - 3465*X(SAN-BAR) - 3365*X(SAN-VAL) + Z =E= 0 ;

---- RESTRIC  =G=

RESTRIC(SEV)..  - X(SEV-MAD) - X(SEV-BAR) - X(SEV-VAL) =G= -350 ;
RESTRIC(SAN)..  - X(SAN-MAD) - X(SAN-BAR) - X(SAN-VAL) =G= -600 ;
RESTRIC(MAD)..  X(SEV-MAD) + X(SAN-MAD) =G= 325 ;
RESTRIC(BAR)..  X(SEV-BAR) + X(SAN-BAR) =G= 300 ;
RESTRIC(VAL)..  X(SEV-VAL) + X(SAN-VAL) =G= 275 ;
```

Podemos comparar estas ecuaciones con las planteadas anteriormente y comprobar que son las mismas ecuaciones.

La solución es:

```

                S O L V E      S U M M A R Y

MODEL   TRARED      OBJECTIVE   Z
TYPE    LP          DIRECTION  MINIMIZE
SOLVER  CPLEX       FROM LINE  48

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE    2299875.0000

RESOURCE USAGE, LIMIT      4.010      1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT    7          10000

Optimal solution found.

Objective :      2299875.000000

----- EQU OBJ              LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
                               .          .          .          1.000

----- EQU RESTRIC

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SEV -350.000 -300.000   +INF      .
SAN -600.000 -600.000   +INF     725.000
MAD  325.000  325.000   +INF    2690.000
BAR  300.000  300.000   +INF    4190.000
VAL  275.000  275.000   +INF    2195.000

----- VAR X

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SEV-MAD      .      25.000   +INF      .
SEV-BAR      .          .   +INF    1040.000
SEV-VAL      .     275.000   +INF      .
SAN-MAD      .     300.000   +INF      .
SAN-BAR      .     300.000   +INF      .
SAN-VAL      .          .   +INF    1895.000

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
----- VAR Z      -INF    2.2999E+6   +INF      .

E x e c u t i o n

-----      50 VARIABLE  X.L

SEV-MAD  25.000,      SEV-VAL  275.000,      SAN-MAD  300.000,      SAN-BAR
300.000

-----      50 VARIABLE  Z.L                      =  2299875.000

```

Este ejemplo se puede, obviamente, generalizar al caso de un mayor número de orígenes y de destinos.

6.5 ANALISIS DE SENSIBILIDAD DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

En los problemas de transporte, como en todos los problemas de programación lineal es posible hacer análisis de sensibilidad de algunos de los coeficientes que aparecen en el modelo. Así se pueden analizar los términos independientes de las restricciones y los coeficientes de la función objetivo.

Como ya conocemos, el análisis de sensibilidad nos informa del intervalo o rango de posible variación de estos coeficientes de forma que la solución actual se mantenga como solución óptima.

El análisis de sensibilidad se puede realizar con GAMS y, al mismo tiempo que realiza el cálculo de la solución óptima, obtiene el intervalo de variación para los coeficientes. En GAMS se puede obtener directamente el rango para los términos independientes, y cuando en el siguiente epígrafe estudiemos la dualidad se podrá realizar el análisis de los coeficientes de la función objetivo.

Para hacer el análisis de sensibilidad de los RHS, lo único que hay que hacer es adicionar al fichero original una serie de instrucciones en donde se explicita lo que deseamos realizar.

Así el fichero GMS es este caso sería: ([pulsar aquí](#))

```

*EJEMPLO DE APLICACION DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

OPTION LIMROW =100;

SETS
    I          ORIGENES          /SEV, SAN/
    J          DESTINOS          /MAD, BAR, VAL/;

PARAMETERS
    A(I)       CANTIDAD DISPONIBLE
    / SEV      350
    SAN        600/
    B(J)       DEMANDA EN DESTINO
    / MAD      325
    BAR        300
    VAL        275/;

TABLE D(I,J) DISTANCIA EN KILOMETROS
    MAD      BAR      VAL
SEV      538      1046      439
SAN      393      693      673 ;

SCALAR F          COSTE POR KILOMETRO      /5/;

PARAMETER C(I,J) COSTE DE TRANSPORTE ;
    C(I,J) = F * D(I,J);

VARIABLES
    X(I,J)
    Z;
POSITIVE VARIABLES X;

EQUATIONS
    OBJ
    OFERTA(I)
    DEMANDA(J);

OBJ.. Z =E= SUM((I,J), C(I,J)*X(I,J) );
OFERTA(I).. SUM(J, X(I,J) ) =L= A(I);
DEMANDA(J)..SUM(I, X(I,J) ) =G= B(J);

MODEL TR1 /ALL/;

OPTION LP = CPLEX;
TR1.DICTFILE = 4;
TR1.OPTFILE = 1;

SOLVE TR1 USING LP MINIMIZING Z;

DISPLAY X.L, Z.L;

```

Como puede observarse la diferencia son las líneas resaltadas en negrilla en el fichero anterior. Además cabe definir el fichero de opciones (**TR1.OPTFILE = 1;**) el fichero sería el siguiente: ([pulsar aquí](#))

```

objrng all
rhsrng all

```

Con ello en el fichero LST, obtenemos las siguientes soluciones para los intervalos:

EQUATION NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-----	-----	-----	-----
OBJ	-INF	0	+INF
OFERTA (SEV)	300	350	+INF
OFERTA (SAN)	550	600	625
DEMANDA (MAD)	300	325	375
DEMANDA (BAR)	275	300	350
DEMANDA (VAL)	0	275	325
VARIABLE NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-----	-----	-----	-----
X (SEV, MAD)	-725	0	1040
X (SEV, BAR)	-1040	0	+INF
X (SEV, VAL)	-2195	0	1895
X (SAN, MAD)	-1040	0	725
X (SAN, BAR)	-4190	0	1040
X (SAN, VAL)	-1895	0	+INF
Z	2.22e-016	1	+INF

La interpretación de los resultados es inmediata. Es decir, la solución actual

E x e c u t i o n				
----	51	VARIABLE	X.L	
		MAD	BAR	VAL
SEV	25.000			275.000
SAN	300.000	300.000		
----	51	VARIABLE	Z.L	= 2299875.000

seguirá siendo válida mientras los términos independientes sean:

La oferta de Sevilla este comprendida entre: 300 y +INF.

La oferta de Santander este comprendida entre: 550 y 625.

La demanda de Madrid este comprendida entre 300 y 375.

La demanda de Barcelona este comprendida entre 275 y 350.

La demanda de Valencia este comprendida entre 0 y 325.

Con relación a los coeficientes de la función objetivo, tenemos que sustituir los valores originales:

VARIABLE NAME -----	LOWER -----	CURRENT -----	UPPER -----
X (SEV, MAD)	1965	2690	3730
X (SEV, BAR)	4190	5230	+INF
X (SEV, VAL)	0	2195	4090
X (SAN, MAD)	925	1965	2690
X (SAN, BAR)	-725	3465	4505
X (SAN, VAL)	1470	3365	+INF

6.6 DUALIDAD EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Al igual que todo problema de programación lineal, es posible analizar la dualidad en el problema del transporte.

Como en todo problema de programación lineal podemos plantear el programa dual asociado. El problema general de transporte que hemos planteado anteriormente es:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

Reordenando el signo de las ecuaciones de forma que todas ellas sean de la forma mayor-igual ($\geq$), con lo que obtenemos un programa dual simétrico, tenemos:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$-\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq -a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

El programa dual asociado será:

$$\text{Max } \sum_{j=1}^n b_j P_j - \sum_{i=1}^m a_i U_i$$

s.a:

$$P_j - U_i \leq c_{ij} \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

$$P_j \geq 0, \quad U_i \geq 0$$

Como se recordará las variables duales asociadas a las diferentes restricciones representan los precios sombra o precios internos de los recursos disponibles.

En el problema del transporte las restricciones se relacionan, o bien con las condiciones de oferta del producto desde la fabrica, o bien con las condiciones de demanda de los almacenes o mercados. Por lo tanto, en el problema de transporte las variables duales P_j representan los precios asignados al producto en cada destino j , mientras que la variable U_i es el precio atribuido o valor del producto, ya embarcado, en el origen i . De modo alternativo, el valor de la variable U_i mide la ventaja comparativa de ubicación de la fabrica i , por lo que estos precios se denominan también como *alquileres de ubicación*, en terminología de Koopmans.

Desde este punto de vista, la función objetivo y las restricciones duales adquieren mayor significado en la interpretación económica del problema del

transporte. El objetivo consiste en maximizar una diferencia entre sumas de productos, entre el ingreso total ($\sum_{j=1}^n b_j P_j$) - suma de los precios atribuidos a los productos por la demanda del mercado- y los gastos totales ($\sum_{i=1}^m a_i U_i$) - suma de los alquileres atribuidos a la ubicación por la oferta de las fabricas -.

Las restricciones duales:

$$P_j - U_i \leq c_{ij} \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

indican que la ventaja de enviar desde cualquier fabrica hasta cualquiera de los mercados es la diferencia entre los correspondientes precio y alquiler de ubicación. Como mucho esta diferencia debe ser igual al coste unitario de transporte, esto se ve más claro si reordenamos los términos de forma que:

$$P_j \leq c_{ij} + U_i$$

con lo que el precio debe ser menor que la suma del coste de transporte más el alquiler de la ubicación.

En una ruta determinado de transporte, cuando el precio atribuido de mercado es menor que la suma del alquiler de ubicación más el coste unitario de transporte a lo largo de esa ruta, seria poco eficiente, desde el punto de vista económico, realizar un envío por esa ruta. En caso contrario cuando el precio es igual a la suma de ambas cantidades, entonces esa ruta si es viable económicamente.

Por ultimo queremos resaltar que estas interpretaciones también se deducen de forma inmediata de las condiciones de holgura complementaria, que exige que:

$$x_{ij} \left[P_j - (U_i + c_{ij}) \right] = 0$$

Por tanto, a partir de estas condiciones de holgura complementaria, junto al signo de las variables duales, podemos deducir las siguientes conclusiones:

- a) Si $P_j = U_i + c_{ij}$ entonces $x_{ij} > 0$
b) Si $P_j < U_i + c_{ij}$ entonces $x_{ij} = 0$

En términos económicos de Koopmans, podemos afirmar que para cada ruta en uso ($x_{ij} > 0$) está rindiendo una utilidad cero, mientras que las rutas que no estén en uso ($x_{ij} = 0$) la utilidad será menor que cero.

Vamos a analizar las variables duales del problema anterior:

Los *alquileres* de los almacenes son los siguientes (valores duales de las ecuaciones de oferta):

Sevilla	0
Santander	725

El *valor del producto* en el mercado es (valores duales de las ecuaciones de demanda):

Madrid	2690
Barcelona	4190
Valencia	2195

Vamos a comparar los costes de las diferentes rutas con los alquileres y los valores de mercado a fin de determinar la utilidad de las diferentes rutas:

Ruta	Coste	Alquiler	$c_{ij} + U_i$	P_j	Diferencia
Sevilla-Madrid	2690	0	2690	2690	0
Sevilla-Barcelona	5230	0	5230	4190	1040
Sevilla-Valencia	2195	0	2195	2195	0
Santander-Madrid	1965	725	2690	2690	0
Santander-Barcelona	3465	725	4190	4190	0
Santander-Valencia	3365	725	4090	2195	1895

Obsérvese que el valor de la columna diferencias es precisamente el valor de las variables duales asociadas a cada una de las rutas (marginal del valor de las variables).

También podemos plantear y resolver el dual. Para ello el fichero GMS (incluye la posibilidad del análisis de sensibilidad) es ([pulsar aquí](#)):

```
*DUALIDAD DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE
*OPTION LIMROW =100;
SETS
    I          ORIGENES          /SEV, SAN/
    J          DESTINOS          /MAD, BAR, VAL/;
PARAMETERS
    A(I)       CANTIDAD DISPONIBLE
    / SEV      350
    SAN        600/
    B(J)       DEMANDA EN DESTINO
    / MAD      325
    BAR        300
    VAL        275/;
TABLE D(I,J) DISTANCIA EN KILOMETROS
    MAD      BAR      VAL
SEV    538    1046    439
SAN    393    693     673 ;
SCALAR F      COSTE POR KILOMETRO /5/;
PARAMETER C(I,J) COSTE DE TRANSPORTE ;
C(I,J) = F * D(I,J);
VARIABLES P(J), U(I), G;
POSITIVE VARIABLES P,U;
EQUATIONS
OBJ, UNO(I,J);

OBJ.. G =E= SUM(J,B(J)*P(J)) -SUM(I, A(I)*U(I));
UNO(I,J).. P(J)-U(I) =L= C(I,J);

MODEL DUALTR1 /ALL/;
OPTION LP = CPLEX;
DUALTR1.DICTFILE = 4;
DUALTR1.OPTFILE = 1;
SOLVE DUALTR1 USING LP MAXIMIZING G;
DISPLAY U.L, P.L, G.L;
```

La solución y el rango de sensibilidad del problema es:

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	DUALTR1	OBJECTIVE	G
TYPE	LP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	33
**** SOLVER STATUS 1 NORMAL COMPLETION			
**** MODEL STATUS 1 OPTIMAL			
**** OBJECTIVE VALUE 2299875.0000			
RESOURCE USAGE, LIMIT		1.870	1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT		4	10000
User supplied options:			
objrng all			
rhsrng all=2			
Optimal solution found.			
Objective : 2299875.000000			
EQUATION NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-----	-----	-----	-----
OBJ	-INF	0	+INF
UNO (SEV, MAD)	1965	2690	3730
UNO (SEV, BAR)	4190	5230	+INF
UNO (SEV, VAL)	0	2195	4090
UNO (SAN, MAD)	925	1965	2690
UNO (SAN, BAR)	-725	3465	4505
UNO (SAN, VAL)	1470	3365	+INF
VARIABLE NAME	LOWER	CURRENT	UPPER
-----	-----	-----	-----
P (MAD)	-25	0	50
P (BAR)	-25	0	50
P (VAL)	-275	0	50
U (SEV)	-INF	0	50
U (SAN)	-25	0	50
G	1.665e-015	1	+INF
---- EQU OBJ	LOWER	LEVEL	UPPER
	.	.	.
			MARGINAL
			1.000

```

---- EQU UNO
      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SEV.MAD      -INF      2690.000      2690.000      25.000
SEV.BAR      -INF      4190.000      5230.000      .
SEV.VAL      -INF      2195.000      2195.000      275.000
SAN.MAD      -INF      1965.000      1965.000      300.000
SAN.BAR      -INF      3465.000      3465.000      300.000
SAN.VAL      -INF      1470.000      3365.000      .

---- VAR P
      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
MAD      .      2690.000      +INF      .
BAR      .      4190.000      +INF      .
VAL      .      2195.000      +INF      .

---- VAR U
      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SEV      .      .      +INF      -50.000
SAN      .      725.000      +INF      .

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
---- VAR G      -INF      2.2999E+6      +INF      .

E x e c u t i o n

----      34 VARIABLE      U.L
SAN 725.000

----      34 VARIABLE      P.L
MAD 2690.000,      BAR 4190.000,      VAL 2195.000

----      34 VARIABLE      G.L      =      2299875.000

```

Como puede comprobarse tanto la solución como el análisis de sensibilidad coincide con lo previsto. Además al realizar el análisis de sensibilidad los resultados son los siguientes:

El problema del transporte que acabamos de estudiar, admite algunas variaciones.

6.7 PROBLEMAS DE TRANSPORTE GENERALIZADOS

Se trata de una variante del problema del transporte donde existen coeficientes asociados a las variables en cada una de las restricciones.

El planteamiento de este problema es el siguiente:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

en donde $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $d_{ij} > 0$ y $f_{ij} \geq 0$.

En este problema realizando el camino de variable:

$$y_{ij} = d_{ij} x_{ij}$$

tenemos que:

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{d_{ij}} \quad y \quad w_{ij} = \frac{c_{ij}}{d_{ij}}$$

con lo que el problema se puede escribir ahora como:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} y_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} y_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

que es un problema de transporte. En este tipo de problemas, suelen aparecer desigualdades en lugar de igualdades en las diferentes restricciones. Este problema también tiene un método particular de solución más eficiente que la programación lineal.

La modelización de este problema, así como su resolución práctica, se realiza vía un problema de transporte, sin más que asociar los correspondientes coeficientes a las restricciones.

Al introducir las restricciones adicionales, se rompe la unimodularidad de la matriz de los coeficientes, ya que ahora aparecen valores distintos de ceros y unos. Con ello ya no se garantiza la solución entera para las variables.

Vamos a ver un ejemplo de este tipo de problemas.

La compañía Petróleos de Levante, tiene dos refinerías situadas en Cartagena y en Tarragona. Desde cada una de las dos refinerías debe abastecer, a través del un oleoducto propio, las ciudades de Alicante, Valencia, Zaragoza, Barcelona y Madrid. El oleoducto está diseñado de forma que se puede enviar desde cada una de las refinerías a cada una de las ciudades de destino.

El oleoducto no está en perfecto estado de conservación y por ello se producen fugas del producto refinado en diferentes zonas de las rutas, fugas que los equipos de mantenimiento no han conseguido encontrar. Las dos refinerías deben suministrar a las ciudades las cantidades necesarias para poder satisfacer la demanda estimada en:

<i>Alicante</i>	<i>150 Toneladas</i>
<i>Valencia</i>	<i>250 Tn.</i>
<i>Zaragoza</i>	<i>200 Tn</i>
<i>Barcelona</i>	<i>450 Tn</i>
<i>Madrid</i>	<i>500 Tn.</i>

Las disponibilidades en cada una de las refinerías se estima en 1000 Toneladas cada una de ellas.

Los costes de bombeo a través del oleoducto, por cada tonelada (incluyendo las pérdidas por fugas) son los siguiente:

	<i>Alicante</i>	<i>Valencia</i>	<i>Zaragoza</i>	<i>Barcelona</i>	<i>Madrid</i>
<i>Cartagena</i>	50	60	75	90	70
<i>Tarragona</i>	75	55	50	40	60

Las fugas previstas en cada una de las diferentes rutas, de forma que se expresa el porcentaje de tonelada que llega a su destino, son las siguientes:

	<i>Alicante</i>	<i>Valencia</i>	<i>Zaragoza</i>	<i>Barcelona</i>	<i>Madrid</i>
<i>Cartagena</i>	100	98	95	90	85
<i>Tarragona</i>	95	98	95	100	100

Con esta información la empresa debe determinar cual ha de ser la estrategia de envío para poder abastecer la ciudades de destino con el menor coste de transporte.

La modelización de este problema la recogemos en el fichero GMS siguiente ([pulsar aquí](#)):

```

SETS
    I    REFINERIAS
    /    CARTAG
        TARRAG /
    J    DESTINOS
    /    ALICAN
        VALENC
        ZARAGO
        BARCEL
        MADRID /;

PARAMETERS
    A(I)  DEPOSITOS
    /    CARTAG      1000
        TARRAG      1000 /
    B(J)  DEMANDAS
    /    ALICAN      150
        VALENC      250
        ZARAGO      200
        BARCEL      450
        MADRID      500 /;

TABLE D(I,J)  COSTE DE TRANSPORTE
    ALICAN  VALENC  ZARAGO  BARCEL  MADRID
CARTAG    50      60      75      90      70
TARRAG    75      55      50      40      60 ;

TABLE P(I,J)  PORCENTAJE DE LLEGADA A DESTINO
    ALICAN  VALENC  ZARAGO  BARCEL  MADRID
CARTAG    100     98      95      90      85
TARRAG    95     98      95     100     100;

VARIABLES
    X(I,J)  CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL ALMACEN J
    Z       COSTE TOTAL DE TRANSPORTE;
    POSITIVE VARIABLE X ;

EQUATIONS
    COSTE          FUNCION OBJETIVO
    OFERTA(I)      LIMITE DE PRODUCCION DE LA FABRICA I
    DEMANDA(J)     DEMANDA DEL ALMACEN J;

COSTE..          Z  =E=  SUM((I,J), D(I,J)*X(I,J)) ;
OFERTA(I)..      SUM(J, X(I,J))  =L=  A(I) ;
DEMANDA(J)..     SUM(I, (P(I,J)/100)*X(I,J))  =G=  B(J) ;

MODEL TRANSGEN /ALL/ ;
SOLVE TRANSGEN USING LP MINIMIZING Z ;
DISPLAY X.L, X.M ;

```

La solución de este problema nos viene dada por el siguiente resultado:

S O L V E		S U M M A R Y				
MODEL	TRANSGEN	OBJECTIVE	Z			
TYPE	LP	DIRECTION	MINIMIZE			
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	44			
**** SOLVER STATUS 1 NORMAL COMPLETION						
**** MODEL STATUS 1 OPTIMAL						
**** OBJECTIVE VALUE 84920.6735						
RESOURCE USAGE, LIMIT		1.640	1000.000			
ITERATION COUNT, LIMIT		8	10000			
Optimal solution found.						
Objective : 84920.673533						
		LOWER	LEVEL	UPPER MARGINAL		
----	EQU COSTE	.	.	. 1.000		
COSTE FUNCION OBJETIVO						
----- EQU OFERTA LIMITE DE PRODUCCION DE LA FABRICA I						
		LOWER	LEVEL	UPPER MARGINAL		
CARTAG		-INF	593.957	1000.000 .		
TARRAG		-INF	1000.000	1000.000 -22.353		
----- EQU DEMANDA DEMANDA DEL ALMACEN J						
		LOWER	LEVEL	UPPER MARGINAL		
ALICAN		150.000	150.000	+INF 50.000		
VALENC		250.000	250.000	+INF 61.224		
ZARAGO		200.000	200.000	+INF 76.161		
BARCEL		450.000	450.000	+INF 62.353		
MADRID		500.000	500.000	+INF 82.353		
----- VAR X CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL ALMACEN J						
		LOWER	LEVEL	UPPER MARGINAL		
CARTAG.ALICAN		.	150.000	+INF .		
CARTAG.VALENC		.	255.102	+INF .		
CARTAG.ZARAGO		.	.	+INF 2.647		
CARTAG.BARCEL		.	.	+INF 33.882		
CARTAG.MADRID		.	188.854	+INF .		
TARRAG.ALICAN		.	.	+INF 49.853		
TARRAG.VALENC		.	.	+INF 17.353		
TARRAG.ZARAGO		.	210.526	+INF .		
TARRAG.BARCEL		.	450.000	+INF .		
TARRAG.MADRID		.	339.474	+INF .		
		LOWER	LEVEL	UPPER MARGINAL		
----	VAR Z	-INF	84920.674	+INF .		
E x e c u t i o n						
----- 45 VARIABLE X.L CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL ALMACEN J						
		ALICAN	VALENC	ZARAGO BARCEL MADRID		
CARTAG		150.000	255.102			188.854
TARRAG				210.526	450.000	339.474
----- 45 VARIABLE X.M CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL ALMACEN J						
		ALICAN	VALENC	ZARAGO BARCEL		
CARTAG				2.647	33.882	
TARRAG		49.853	17.353			

En la solución anterior es inmediato observar que se satisfacen las condiciones de demanda de cada uno de los destinos, incluyendo las mermas del oleoducto, así:

Origen	Destino	Cantidad	Merma	Neto
Cartagena	Alicante	150	0	150
Cartagena	Valencia	255.102	0.02	250
Cartagena	Madrid	188.854	0.15	160.526
Tarragona	Zaragoza	210.526	0.05	200
Tarragona	Barcelona	450	0	450
Tarragona	Madrid	339.474	0	339.474

El destino Madrid, recibe de las dos refinerías, y entre ambas satisfacen la demanda global de la ciudad estimada en 500 Toneladas.

6.8 PROBLEMAS DE TRANSPORTE CON CAPACIDAD O TRANSPORTE CON VARIABLES ACOTADAS.

También denominado *problema de transporte con capacidad de transporte restringida*. Se trata de añadir al problema típico de transporte unas restricciones de capacidad a las diferentes rutas, de forma que esta limita la capacidad de envío de los diferentes orígenes a los respectivos destinos.

El planteamiento del problema es:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad j=1,2,\dots,n$$

donde u_{ij} representa la cantidad máxima a transportar desde el origen i al destino j . Este problema tiene una solución más rápida mediante redes de optimización que usando el algoritmo del simplex.

A continuación plantearemos un ejemplo en este caso.

La empresa Naranjas de Levante envasa y comercializa naranjas en diferentes ciudades del Estado Español. La empresa tiene tres factorías de envasado en las ciudades de San Vicente del Raspeig, Silla y Nules. Desde cada una de las factorías la empresa envía sus productos a los diferentes mercados centrales de Madrid, Barcelona, Bilbao, Valencia, Coruña, Valladolid, Sevilla y Zaragoza. Para esta transporte cuenta con una flota de camiones propios que pueden desplazarse a las diferentes ciudades.

Los costes de transporte son de 5 pesetas por kilometro y tonelada enviada. Las distancias en kilómetros entre las factorías y los mercados son los siguientes:

	Madrid	Barcelona	Bilbao	Valencia	Coruña	Valladolid	Sevilla	Zaragoza
<i>S. Vicente</i>	422	515	817	166	1031	615	609	498
<i>Silla</i>	352	349	633	10	961	545	697	326
<i>Nules</i>	417	284	607	65	1026	563	762	283

Las demandas de cada uno de los mercados es (en Toneladas) de:

Madrid 150 Tn.

Barcelona 125 Tn

Bilbao 80 Tn

Valencia 150 Tn

Coruña 75 Tn

<i>Valladolid</i>	<i>50 Tn</i>
<i>Sevilla</i>	<i>100 Tn</i>
<i>Zaragoza</i>	<i>80 Tn</i>

Las capacidades de envío de cada uno de los almacenes es de:

<i>San Vicente</i>	<i>200 Tn</i>
<i>Silla</i>	<i>400 Tn</i>
<i>Nules</i>	<i>300 Tn</i>

Al disponer de camiones propios, existen determinadas rutas en las cuales no se puede sobrepasar la capacidad del camión de envío. Así las siguientes rutas están limitadas:

<i>Origen</i>	<i>Destino</i>	<i>Límite</i>
<i>S. Vicente</i>	<i>Madrid</i>	<i>50</i>
<i>S. Vicente</i>	<i>Valencia</i>	<i>50</i>
<i>S. Vicente</i>	<i>Sevilla</i>	<i>50</i>
<i>Silla</i>	<i>Valencia</i>	<i>50</i>
<i>Silla</i>	<i>Sevilla</i>	<i>50</i>
<i>Nules</i>	<i>Barcelona</i>	<i>50</i>
<i>Nules</i>	<i>Bilbao</i>	<i>50</i>
<i>Nules</i>	<i>Coruña</i>	<i>50</i>

Con estos datos, determinar la estrategia de distribución que debe seguir la empresa Naranjas de Levante para minimizar los costes de envío.

Para la modelización de este problema vamos a definir una matriz de capacidades de transporte, y para la ruta en la que no existe limitación para transportar incorporaremos un límite superior (9999), de forma que esas restricciones no sean limitativa.

La modelización se recoge en el siguiente fichero ([pulsar aquí](#)):

```

SETS
    I   ALMACENES
    /SVICE
    SILLA
    NULES /
    J   MERCADOS
    /MADRID
    BARCEL
    BILBAO
    VALENC
    CORUNA
    VALLAD
    SEVILL
    ZARAGO / ;

PARAMETERS
    A(I)  CAPACIDAD DE LOS ALMACENES
    /SVICE 200
    SILLA 400
    NULES 300/
    B(J)  DEMANDA DE LOS MERCADOS
    /MADRID 150
    BARCEL 125
    BILBAO 80
    VALENC 150
    CORUNA 75
    VALLAD 50
    SEVILL 100
    ZARAGO 80/ ;

TABLE D(I,J)  DISTANCIA EN KILOMETROS
    MADRID BARCEL BILBAO VALENC CORUNA VALLAD SEVILL ZARAGO
SVICE 422 515 817 166 1031 615 609 498
SILLA 352 349 633 10 961 545 697 326
NULES 417 284 607 65 1026 563 762 283 ;

TABLE CAP(I,J)  LIMITE DE CAPACIDAD
    MADRID BARCEL BILBAO VALENC CORUNA VALLAD SEVILL ZARAGO
SVICE 50 9999 9999 50 9999 9999 50 9999
SILLA 9999 9999 9999 50 9999 9999 50 9999
NULES 9999 50 50 9999 50 9999 9999 9999 ;

SCALAR P /5/
VARIABLES X(I,J), Z;
POSITIVE VARIABLE X ;
EQUATIONS COSTE, OFERTA(I), DEMANDA(J), LIMITE(I,J);
COSTE.. Z =E= SUM((I,J), D(I,J)*X(I,J)) ;
OFERTA(I).. SUM(J, X(I,J)) =L= A(I) ;
DEMANDA(J).. SUM(I, X(I,J)) =E= B(J) ;
LIMITE(I,J).. X(I,J) =L= CAP(I,J);
MODEL TRANSCAP /ALL/ ;
SOLVE TRANSCAP USING LP MINIMIZING Z ;
DISPLAY X.L, Z.L ;

```

La solución a este problema viene dada por el siguiente fichero de resultados:

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	TRANSCAP	OBJECTIVE	Z
TYPE	LP	DIRECTION	MINIMIZE
SOLVER	CPLEX	FROM LINE	48

```

**** SOLVER STATUS      1 NORMAL COMPLETION
**** MODEL STATUS      1 OPTIMAL
**** OBJECTIVE VALUE      341340.0000

RESOURCE USAGE, LIMIT      4.610      1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT      9      10000

Optimal solution found.

Objective :      341340.000000

----- EQU COSTE
                LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
----- EQU OFERTA

                LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SVICE      -INF      110.000      200.000      .
SILLA      -INF      400.000      400.000      -70.000
NULES      -INF      300.000      300.000      -52.000

----- EQU DEMANDA

                LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
MADRID      150.000      150.000      150.000      422.000
BARCEL      125.000      125.000      125.000      419.000
BILBAO      80.000      80.000      80.000      703.000
VALENC      150.000      150.000      150.000      117.000
CORUNA      75.000      75.000      75.000      1031.000
VALLAD      50.000      50.000      50.000      615.000
SEVILL      100.000      100.000      100.000      814.000
ZARAGO      80.000      80.000      80.000      335.000

----- EQU LIMITE

                LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL
SVICE.MADRID      -INF      50.000      50.000      EPS
SVICE.BARCEL      -INF      .      9999.000      .
SVICE.BILBAO      -INF      .      9999.000      .
SVICE.VALENC      -INF      .      50.000      .
SVICE.CORUNA      -INF      10.000      9999.000      .
SVICE.VALLAD      -INF      .      9999.000      .
SVICE.SEVILL      -INF      50.000      50.000      -205.000
SVICE.ZARAGO      -INF      .      9999.000      .
SILLA.MADRID      -INF      100.000      9999.000      .
SILLA.BARCEL      -INF      75.000      9999.000      .
SILLA.BILBAO      -INF      30.000      9999.000      .
SILLA.VALENC      -INF      50.000      50.000      -37.000
SILLA.CORUNA      -INF      65.000      9999.000      .
SILLA.VALLAD      -INF      30.000      9999.000      .
SILLA.SEVILL      -INF      50.000      50.000      -47.000
SILLA.ZARAGO      -INF      .      9999.000      .
NULES.MADRID      -INF      .      9999.000      .
NULES.BARCEL      -INF      50.000      50.000      -83.000
NULES.BILBAO      -INF      50.000      50.000      -44.000
NULES.VALENC      -INF      100.000      9999.000      .
NULES.CORUNA      -INF      .      50.000      .
NULES.VALLAD      -INF      20.000      9999.000      .

```

NULES.SEVILL	-INF	.	9999.000	.		
NULES.ZARAGO	-INF	80.000	9999.000	.		
----- VAR X						
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL		
SVICE.MADRID	.	50.000	+INF	.		
SVICE.BARCEL	.	.	+INF	96.000		
SVICE.BILBAO	.	.	+INF	114.000		
SVICE.VALENC	.	.	+INF	49.000		
SVICE.CORUNA	.	10.000	+INF	.		
SVICE.VALLAD	.	.	+INF	EPS		
SVICE.SEVILL	.	50.000	+INF	.		
SVICE.ZARAGO	.	.	+INF	163.000		
SILLA.MADRID	.	100.000	+INF	.		
SILLA.BARCEL	.	75.000	+INF	.		
SILLA.BILBAO	.	30.000	+INF	.		
SILLA.VALENC	.	50.000	+INF	.		
SILLA.CORUNA	.	65.000	+INF	.		
SILLA.VALLAD	.	30.000	+INF	.		
SILLA.SEVILL	.	50.000	+INF	.		
SILLA.ZARAGO	.	.	+INF	61.000		
NULES.MADRID	.	.	+INF	47.000		
NULES.BARCEL	.	50.000	+INF	.		
NULES.BILBAO	.	50.000	+INF	.		
NULES.VALENC	.	100.000	+INF	.		
NULES.CORUNA	.	.	+INF	47.000		
NULES.VALLAD	.	20.000	+INF	.		
NULES.SEVILL	.	.	+INF	.		
NULES.ZARAGO	.	80.000	+INF	.		
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL		
----- VAR Z	-INF	3.4134E+5	+INF	.		
E x e c u t i o n						
----- 49 VARIABLE X.L						
	MADRID	BARCEL	BILBAO	VALENC	CORUNA	VALLAD
SVICE	50.000				10.000	
SILLA	100.000	75.000	30.000	50.000	65.000	30.000
NULES		50.000	50.000	100.000		20.000
+	SEVILL	ZARAGO				
SVICE	50.000					
SILLA	50.000					
NULES		80.000				
----- 49 VARIABLE Z.L			=	341340.000		

6.9 PROBLEMAS DE TRANSPORTE CON TRANSBORDOS O**TRANSPORTE CON NODOS INTERMEDIOS**

Vamos a ver ahora otra variante del problema del transporte, y es que admitimos que puede existir flujo desde los destinos a los orígenes, cuestión que no está implícita en el problema del transporte original. Esta problemática se plantea cuando pueden existir devoluciones de los clientes hacia el proveedor, o también que existen puntos de depósito intermedios, es decir, que pueden plantearse problemas de almacenes intermedios entre los proveedores y los clientes.

En el problema original de transporte existe m orígenes y n destinos, y el flujo se realiza desde un origen hacia cada uno de los diferentes destinos. Si en este caso permitimos el flujo en ambos sentidos (de origen a destino y de destino a origen) se puede hablar de un problema con $m+n$ orígenes y $m+n$ destinos. A este tipo de problemas se les conoce con el nombre de problemas de transbordo (*transshipment problems*) o transporte con nodos intermedios.

En el caso más general, cada punto (origen o destino) puede ser un punto de transbordo, es decir, cada origen puede enviar o transportar a otros orígenes o a destinos; y los destinos pueden transportar a su vez a otros destinos o volver a los orígenes. Un punto conserva su identidad, origen o destino, solamente cuando sea, respectivamente, un punto que originalmente disponga de un suministro o un punto que tenga una demanda a satisfacer.

El planteamiento matemático de esta problema es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m+n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m+n} c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+n} x_{ik} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+n} x_{ki} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m+j}}^{m+n} x_{k,m+j} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m+j}}^{m+n} x_{m+j,k} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m+n \quad j=1, 2, \dots, m+n$$

Este problema se podría resolver fácilmente como un problema de transporte, si se supiera de antemano la cantidad de flujo entrará y saldrá de cada uno de los $m+n$ puntos. Pero desgraciadamente estas cantidades son parte del problema de decisión y por lo tanto no se las conoce. Aunque no hay inconveniente a fijar una cota superior a cada una de estas variables.

Por tanto la forma practica de resolver este tipo de problemas es convertirlo en un problema de transporte, en donde todos los nudos son lugares de origen y destino.

Vamos a ver un ejemplo en este caso.

La empresa de conservas de aceitunas OLIVOSUR, S.A., posee tres fabricas donde procede al enlatado de las aceitunas sevillanas en las fabricas de Huelva, Tarragona y Orense. La producción de la empresa se vende en Bilbao, Barcelona, Valencia y Madrid. Además la empresa posee cinco almacenes intermedios en Sevilla, Zaragoza, Soria, Albacete y Logroño, de forma que la empresa tiene la opción de enviar los botes de aceitunas ya confeccionadas desde las fabricas a los puntos de venta, o bien desde las fabricas a los almacenes de distribución y desde allí abastecer a los respectivos clientes.

Los envíos se realizan mediante camiones propios y camiones de una empresa de distribución estatal que realiza una serie de rutas preestablecida, de forma que junto a las aceitunas envía productos de otros fabricantes, con esto el coste de transporte se abarata considerablemente, aunque existe la posibilidad de no poder enviar productos por una determinada ruta.

Los costes de transporte (por tonelada) desde las fabricas y los almacenes intermedios son los siguientes(expresadas en pesetas):

	<i>Huelva</i>	<i>Tarragona</i>	<i>Orense</i>	<i>Sevilla</i>	<i>Zaragoz</i>	<i>Soria</i>	<i>Albacete</i>	<i>Logroño</i>	<i>Bilbao</i>	<i>Barcelona</i>	<i>Valencia</i>	<i>Madrid</i>
	<i>a</i>											
<i>Huelva</i>		146	-	324	286	-	-	-	452	505	-	871
<i>Tarragona</i>	146		-	373	212	570	609	-	335	407	688	784
<i>Orense</i>	-	-		658	-	405	419	158	-	685	359	673
<i>Sevilla</i>	322	371	656		262	398	430	-	503	234	329	-
<i>Zaragoza</i>	284	210	-	262		406	421	644	305	207	464	558
<i>Soria</i>	-	569	403	398	406		81	272	597	253	171	282
<i>Albacete</i>	-	608	418	431	422	81		287	613	280	236	229
<i>Logroño</i>	-	-	158	-	647	274	288		831	501	293	482
<i>Bilbao</i>	453	336	-	505	307	599	615	831		359	706	587
<i>Barcelona</i>	505	407	683	235	208	254	281	500	357		362	341
<i>Valencia</i>	-	687	357	329	464	171	236	290	705	362		457
<i>Madrid</i>	868	781	670	-	558	282	229	480	587	340	457	

Con estos costes de transporte, cada origen, almacén intermedio y destino se convierte en origen y destino.

Las fabricas tiene las siguientes capacidades de producción (en toneladas) de:

<i>Huelva</i>	<i>75</i>
<i>Tarragona</i>	<i>125</i>
<i>Orense</i>	<i>100</i>

Las demandas de cada una de las ciudades de destino es de :

<i>Bilbao</i>	<i>80</i>
<i>Barcelona</i>	<i>65</i>
<i>Valencia</i>	<i>70</i>
<i>Madrid</i>	<i>85</i>

Lo que se desea determinar es la cantidad a suministrar de forma que se cumplan las demandas y el coste sea mínimo.

La forma practica de resolver este tipo de problemas de transporte con transbordo, se puede realizar como una ampliación del problema general del transporte de forma que consideremos las cantidades a transportar en cada origen y destino, además de su demanda propia, una cantidad que actúe como cota (por ejemplo la suma de las demandas) de forma que en los nodos intermedios las cantidades recibidas sean iguales a las cantidades enviadas.

En el caso de que el problema sea asimétrico, es decir, que la suma de las disponibilidades no sea igual a las demandas, se actúa como un problema tradicional de transporte. En este caso las cantidades hacen que la suma de los orígenes sea igual a la de los destinos.

La forma de resolverlo consiste en determinar los costes de transporte entre cada una de las posibilidades, como en el cuadro anterior, pero penalizando con un valor arbitrariamente grande (99999) las rutas que sean imposibles, y además considerando que en cada nodo intermedio, las entradas y salidas han de ser igual a 300 unidades, excepto en las plantas que los recursos serán de 375, 425 y 400, respectivamente en cuanto a recursos disponibles, mientras que en las demandas, las demandas de los nodos serán de 300, a excepción de los mercados finales que serán, respectivamente, de 380, 365, 370 y 385.

El planteamiento del problema, se recoge en el siguiente fichero GMS ([pulsar aquí](#)):

```

OPTION LIMROW =100;
SETS
    I    ORIGENES
        /HUELVA
        TARRAGO
        ORENSE
        SEVILL
        ZARAGO
        SORIA
        ALBACE
        LOGRON
        BILBAO
        BARCEL
        VALENC
        MADRID/
ALIAS (I,J) ;
PARAMETERS
    A(I)  CAPACIDAD DE FABRICACION
        /HUELVA      375
        TARRAGO      425
        ORENSE        400
        SEVILL        300
        ZARAGO        300
        SORIA         300
        ALBACE        300
        LOGRON        300
        BILBAO        300
        BARCEL        300
        VALENC        300
        MADRID        300/
    B(J)  DEMANDA
        /HUELVA      300
        TARRAGO      300
        ORENSE        300
        SEVILL        300
        ZARAGO        300
        SORIA         300
        ALBACE        300
        LOGRON        300
        BILBAO        380
        BARCEL        365
        VALENC        370
        MADRID        385 /;
TABLE D(I,J)  COSTE DE TRANSPORTE
    HUELVA      TARRAGO  ORENSE  SEVILL  ZARAGO  SORIA  ALBACE  LOGRON
HUELVA    0      146      99999  324      286      99999  99999  99999
TARRAGO  146      0      99999  373      212      570      609      99999
ORENSE   99999  99999  0      658      99999  405      419      158
SEVILL   322     371     656      0      262      398      430      99999
ZARAGO   284     210     99999  262      0      406      421      644
SORIA    99999  569     403     398     406      0       81      272
ALBACE   99999  608     418     431     422      81      0       287
LOGRON   99999  99999  158     99999  647      274     288      0
BILBAO   453     336     99999  505     307      599     615     831
BARCEL   505     407     683     235     208      254     281     500
VALENC   99999  687     357     329     464      171     236     290
MADRID   868     781     670     99999  558      282     229     480
+

```

```

      BILBAO  BARCEL  VALENC  MADRID
HUELVA  452      505      99999  871
TARRAGO 335      407      688     784
ORENSE  99999    685      359     673
SEVILL  503      234      329    99999
ZARAGO  305      207      464     558
SORIA   597      253      171     282
ALBACE  613      280      236     229
LOGRON  831      501      293     482
BILBAO  0        359      706     587
BARCEL  357      0        362     341
VALENC  705      362      0       457
MADRID  587      340      457     0 ;
VARIABLES X(I,J), Z;
POSITIVE VARIABLE X ;
EQUATIONS COSTE, OFERTA(I), DEMANDA(J);
COSTE..          Z =E= SUM((I,J), D(I,J)*X(I,J)) ;
OFERTA(I)..      SUM(J, X(I,J)) =E= A(I) ;
DEMANDA(J)..     SUM(I, X(I,J)) =E= B(J) ;
MODEL TRANBOR1 /ALL/ ;
SOLVE TRANBOR1 USING LP MINIMIZING Z ;
DISPLAY X.L, X.M, Z.L ;

```

En primer lugar mostraremos todas las ecuaciones del problema, y posteriormente recurriremos a la opción DISPLAY para mostrar la solución.

```

Equation Listing      SOLVE TRANBOR1 USING LP FROM LINE 79

---- COSTE  =E=

COSTE.. - 146*X(HUELVA,TARRAGO) - 99999*X(HUELVA,ORENSE) -
324*X(HUELVA,SEVILL) - 286*X(HUELVA,ZARAGO) - 99999*X(HUELVA,SORIA) -
99999*X(HUELVA,ALBACE) - 99999*X(HUELVA,LOGRON) - 452*X(HUELVA,BILBAO) -
505*X(HUELVA,BARCEL) - 99999*X(HUELVA,VALENC) - 871*X(HUELVA,MADRID) -
146*X(TARRAGO,HUELVA) - 99999*X(TARRAGO,ORENSE) - 373*X(TARRAGO,SEVILL) -
212*X(TARRAGO,ZARAGO) - 570*X(TARRAGO,SORIA) - 609*X(TARRAGO,ALBACE) -
99999*X(TARRAGO,LOGRON) - 335*X(TARRAGO,BILBAO) - 407*X(TARRAGO,BARCEL) -
688*X(TARRAGO,VALENC) - 784*X(TARRAGO,MADRID) - 99999*X(ORENSE,HUELVA) -
99999*X(ORENSE,TARRAGO) - 658*X(ORENSE,SEVILL) - 99999*X(ORENSE,ZARAGO) -
405*X(ORENSE,SORIA) - 419*X(ORENSE,ALBACE) - 158*X(ORENSE,LOGRON) -
99999*X(ORENSE,BILBAO) - 685*X(ORENSE,BARCEL) - 359*X(ORENSE,VALENC) -
673*X(ORENSE,MADRID) - 322*X(SEVILL,HUELVA) - 371*X(SEVILL,TARRAGO) -
656*X(SEVILL,ORENSE) - 262*X(SEVILL,ZARAGO) - 398*X(SEVILL,SORIA) -
430*X(SEVILL,ALBACE) - 99999*X(SEVILL,LOGRON) - 503*X(SEVILL,BILBAO) -
234*X(SEVILL,BARCEL) - 329*X(SEVILL,VALENC) - 99999*X(SEVILL,MADRID) -
284*X(ZARAGO,HUELVA) - 210*X(ZARAGO,TARRAGO) - 99999*X(ZARAGO,ORENSE) -
262*X(ZARAGO,SEVILL) - 406*X(ZARAGO,SORIA) - 421*X(ZARAGO,ALBACE) -
644*X(ZARAGO,LOGRON) - 305*X(ZARAGO,BILBAO) - 207*X(ZARAGO,BARCEL) -
464*X(ZARAGO,VALENC) - 558*X(ZARAGO,MADRID) - 99999*X(SORIA,HUELVA) -
569*X(SORIA,TARRAGO) - 403*X(SORIA,ORENSE) - 398*X(SORIA,SEVILL) -
406*X(SORIA,ZARAGO) - 81*X(SORIA,ALBACE) - 272*X(SORIA,LOGRON) -
597*X(SORIA,BILBAO) - 253*X(SORIA,BARCEL) - 171*X(SORIA,VALENC) -
282*X(SORIA,MADRID) - 99999*X(ALBACE,HUELVA) - 608*X(ALBACE,TARRAGO) -
418*X(ALBACE,ORENSE) - 431*X(ALBACE,SEVILL) - 422*X(ALBACE,ZARAGO) -
81*X(ALBACE,SORIA) - 287*X(ALBACE,LOGRON) - 613*X(ALBACE,BILBAO) -
280*X(ALBACE,BARCEL) - 236*X(ALBACE,VALENC) - 229*X(ALBACE,MADRID) -
99999*X(LOGRON,HUELVA) - 99999*X(LOGRON,TARRAGO) - 158*X(LOGRON,ORENSE) -
99999*X(LOGRON,SEVILL) - 647*X(LOGRON,ZARAGO) - 274*X(LOGRON,SORIA) -
288*X(LOGRON,ALBACE) - 831*X(LOGRON,BILBAO) - 501*X(LOGRON,BARCEL) -
293*X(LOGRON,VALENC) - 482*X(LOGRON,MADRID) - 453*X(BILBAO,HUELVA) -
336*X(BILBAO,TARRAGO) - 99999*X(BILBAO,ORENSE) - 505*X(BILBAO,SEVILL) -
307*X(BILBAO,ZARAGO) - 599*X(BILBAO,SORIA) - 615*X(BILBAO,ALBACE) -
831*X(BILBAO,LOGRON) - 359*X(BILBAO,BARCEL) - 706*X(BILBAO,VALENC) -
587*X(BILBAO,MADRID) - 505*X(BARCEL,HUELVA) - 407*X(BARCEL,TARRAGO) -
683*X(BARCEL,ORENSE) - 235*X(BARCEL,SEVILL) - 208*X(BARCEL,ZARAGO) -
254*X(BARCEL,SORIA) - 281*X(BARCEL,ALBACE) - 500*X(BARCEL,LOGRON) -
357*X(BARCEL,BILBAO) - 362*X(BARCEL,VALENC) - 341*X(BARCEL,MADRID) -

```

```

99999*X (VALENC, HUELVA) - 687*X (VALENC, TARRAGO) - 357*X (VALENC, ORENSE) -
329*X (VALENC, SEVILL) - 464*X (VALENC, ZARAGO) - 171*X (VALENC, SORIA) -
236*X (VALENC, ALBACE) - 290*X (VALENC, LOGRON) - 705*X (VALENC, BILBAO) -
362*X (VALENC, BARCEL) - 457*X (VALENC, MADRID) - 868*X (MADRID, HUELVA) -
781*X (MADRID, TARRAGO) - 670*X (MADRID, ORENSE) - 99999*X (MADRID, SEVILL) -
558*X (MADRID, ZARAGO) - 282*X (MADRID, SORIA) - 229*X (MADRID, ALBACE) -
480*X (MADRID, LOGRON) - 587*X (MADRID, BILBAO) - 340*X (MADRID, BARCEL) -
457*X (MADRID, VALENC) + Z =E= 0 ; (LHS = 0)

---- OFERTA =E=

OFERTA (HUELVA) .. X (HUELVA, HUELVA) + X (HUELVA, TARRAGO) + X (HUELVA, ORENSE) +
X (HUELVA, SEVILL) + X (HUELVA, ZARAGO) + X (HUELVA, SORIA) + X (HUELVA, ALBACE) +
X (HUELVA, LOGRON) + X (HUELVA, BILBAO) + X (HUELVA, BARCEL) + X (HUELVA, VALENC) +
X (HUELVA, MADRID) =E= 375 ;

OFERTA (TARRAGO) .. X (TARRAGO, HUELVA) + X (TARRAGO, TARRAGO) + X (TARRAGO, ORENSE)
+ X (TARRAGO, SEVILL) + X (TARRAGO, ZARAGO) + X (TARRAGO, SORIA) + X (TARRAGO, ALBACE)
+ X (TARRAGO, LOGRON) + X (TARRAGO, BILBAO) + X (TARRAGO, BARCEL) +
X (TARRAGO, VALENC) + X (TARRAGO, MADRID) =E= 425 ;

OFERTA (ORENSE) .. X (ORENSE, HUELVA) + X (ORENSE, TARRAGO) + X (ORENSE, ORENSE) +
X (ORENSE, SEVILL) + X (ORENSE, ZARAGO) + X (ORENSE, SORIA) + X (ORENSE, ALBACE) +
X (ORENSE, LOGRON) + X (ORENSE, BILBAO) + X (ORENSE, BARCEL) + X (ORENSE, VALENC) +
X (ORENSE, MADRID) =E= 400 ;

OFERTA (SEVILL) .. X (SEVILL, HUELVA) + X (SEVILL, TARRAGO) + X (SEVILL, ORENSE) +
X (SEVILL, SEVILL) + X (SEVILL, ZARAGO) + X (SEVILL, SORIA) + X (SEVILL, ALBACE) +
X (SEVILL, LOGRON) + X (SEVILL, BILBAO) + X (SEVILL, BARCEL) + X (SEVILL, VALENC) +
X (SEVILL, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (ZARAGO) .. X (ZARAGO, HUELVA) + X (ZARAGO, TARRAGO) + X (ZARAGO, ORENSE) +
X (ZARAGO, SEVILL) + X (ZARAGO, ZARAGO) + X (ZARAGO, SORIA) + X (ZARAGO, ALBACE) +
X (ZARAGO, LOGRON) + X (ZARAGO, BILBAO) + X (ZARAGO, BARCEL) + X (ZARAGO, VALENC) +
X (ZARAGO, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (SORIA) .. X (SORIA, HUELVA) + X (SORIA, TARRAGO) + X (SORIA, ORENSE) +
X (SORIA, SEVILL) + X (SORIA, ZARAGO) + X (SORIA, SORIA) + X (SORIA, ALBACE) +
X (SORIA, LOGRON) + X (SORIA, BILBAO) + X (SORIA, BARCEL) + X (SORIA, VALENC) +
X (SORIA, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (ALBACE) .. X (ALBACE, HUELVA) + X (ALBACE, TARRAGO) + X (ALBACE, ORENSE) +
X (ALBACE, SEVILL) + X (ALBACE, ZARAGO) + X (ALBACE, SORIA) + X (ALBACE, ALBACE) +
X (ALBACE, LOGRON) + X (ALBACE, BILBAO) + X (ALBACE, BARCEL) + X (ALBACE, VALENC) +
X (ALBACE, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (LOGRON) .. X (LOGRON, HUELVA) + X (LOGRON, TARRAGO) + X (LOGRON, ORENSE) +
X (LOGRON, SEVILL) + X (LOGRON, ZARAGO) + X (LOGRON, SORIA) + X (LOGRON, ALBACE) +
X (LOGRON, LOGRON) + X (LOGRON, BILBAO) + X (LOGRON, BARCEL) + X (LOGRON, VALENC) +
X (LOGRON, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (BILBAO) .. X (BILBAO, HUELVA) + X (BILBAO, TARRAGO) + X (BILBAO, ORENSE) +
X (BILBAO, SEVILL) + X (BILBAO, ZARAGO) + X (BILBAO, SORIA) + X (BILBAO, ALBACE) +
X (BILBAO, LOGRON) + X (BILBAO, BILBAO) + X (BILBAO, BARCEL) + X (BILBAO, VALENC) +
X (BILBAO, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (BARCEL) .. X (BARCEL, HUELVA) + X (BARCEL, TARRAGO) + X (BARCEL, ORENSE) +
X (BARCEL, SEVILL) + X (BARCEL, ZARAGO) + X (BARCEL, SORIA) + X (BARCEL, ALBACE) +
X (BARCEL, LOGRON) + X (BARCEL, BILBAO) + X (BARCEL, BARCEL) + X (BARCEL, VALENC) +
X (BARCEL, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (VALENC) .. X (VALENC, HUELVA) + X (VALENC, TARRAGO) + X (VALENC, ORENSE) +
X (VALENC, SEVILL) + X (VALENC, ZARAGO) + X (VALENC, SORIA) + X (VALENC, ALBACE) +
X (VALENC, LOGRON) + X (VALENC, BILBAO) + X (VALENC, BARCEL) + X (VALENC, VALENC) +
X (VALENC, MADRID) =E= 300 ;

OFERTA (MADRID) .. X (MADRID, HUELVA) + X (MADRID, TARRAGO) + X (MADRID, ORENSE) +
X (MADRID, SEVILL) + X (MADRID, ZARAGO) + X (MADRID, SORIA) + X (MADRID, ALBACE) +
X (MADRID, LOGRON) + X (MADRID, BILBAO) + X (MADRID, BARCEL) + X (MADRID, VALENC) +
X (MADRID, MADRID) =E= 300 ;

---- DEMANDA =E=

```

```

DEMANDA (HUELVA) . .  X (HUELVA, HUELVA) + X (TARRAGO, HUELVA) + X (ORENSE, HUELVA) +
X (SEVILL, HUELVA) + X (ZARAGO, HUELVA) + X (SORIA, HUELVA) + X (ALBACE, HUELVA) +
X (LOGRON, HUELVA) + X (BILBAO, HUELVA) + X (BARCEL, HUELVA) + X (VALENC, HUELVA) +
X (MADRID, HUELVA) =E= 300 ;

DEMANDA (TARRAGO) . .  X (HUELVA, TARRAGO) + X (TARRAGO, TARRAGO) + X (ORENSE, TARRAGO)
+ X (SEVILL, TARRAGO) + X (ZARAGO, TARRAGO) + X (SORIA, TARRAGO) + X (ALBACE, TARRAGO)
+ X (LOGRON, TARRAGO) + X (BILBAO, TARRAGO) + X (BARCEL, TARRAGO) +
X (VALENC, TARRAGO) + X (MADRID, TARRAGO) =E= 300 ;

DEMANDA (ORENSE) . .  X (HUELVA, ORENSE) + X (TARRAGO, ORENSE) + X (ORENSE, ORENSE) +
X (SEVILL, ORENSE) + X (ZARAGO, ORENSE) + X (SORIA, ORENSE) + X (ALBACE, ORENSE) +
X (LOGRON, ORENSE) + X (BILBAO, ORENSE) + X (BARCEL, ORENSE) + X (VALENC, ORENSE) +
X (MADRID, ORENSE) =E= 300 ;

DEMANDA (SEVILL) . .  X (HUELVA, SEVILL) + X (TARRAGO, SEVILL) + X (ORENSE, SEVILL) +
X (SEVILL, SEVILL) + X (ZARAGO, SEVILL) + X (SORIA, SEVILL) + X (ALBACE, SEVILL) +
X (LOGRON, SEVILL) + X (BILBAO, SEVILL) + X (BARCEL, SEVILL) + X (VALENC, SEVILL) +
X (MADRID, SEVILL) =E= 300 ;

DEMANDA (ZARAGO) . .  X (HUELVA, ZARAGO) + X (TARRAGO, ZARAGO) + X (ORENSE, ZARAGO) +
X (SEVILL, ZARAGO) + X (ZARAGO, ZARAGO) + X (SORIA, ZARAGO) + X (ALBACE, ZARAGO) +
X (LOGRON, ZARAGO) + X (BILBAO, ZARAGO) + X (BARCEL, ZARAGO) + X (VALENC, ZARAGO) +
X (MADRID, ZARAGO) =E= 300 ;

DEMANDA (SORIA) . .  X (HUELVA, SORIA) + X (TARRAGO, SORIA) + X (ORENSE, SORIA) +
X (SEVILL, SORIA) + X (ZARAGO, SORIA) + X (SORIA, SORIA) + X (ALBACE, SORIA) +
X (LOGRON, SORIA) + X (BILBAO, SORIA) + X (BARCEL, SORIA) + X (VALENC, SORIA) +
X (MADRID, SORIA) =E= 300 ;

DEMANDA (ALBACE) . .  X (HUELVA, ALBACE) + X (TARRAGO, ALBACE) + X (ORENSE, ALBACE) +
X (SEVILL, ALBACE) + X (ZARAGO, ALBACE) + X (SORIA, ALBACE) + X (ALBACE, ALBACE) +
X (LOGRON, ALBACE) + X (BILBAO, ALBACE) + X (BARCEL, ALBACE) + X (VALENC, ALBACE) +
X (MADRID, ALBACE) =E= 300 ;

DEMANDA (LOGRON) . .  X (HUELVA, LOGRON) + X (TARRAGO, LOGRON) + X (ORENSE, LOGRON) +
X (SEVILL, LOGRON) + X (ZARAGO, LOGRON) + X (SORIA, LOGRON) + X (ALBACE, LOGRON) +
X (LOGRON, LOGRON) + X (BILBAO, LOGRON) + X (BARCEL, LOGRON) + X (VALENC, LOGRON) +
X (MADRID, LOGRON) =E= 300 ;

DEMANDA (BILBAO) . .  X (HUELVA, BILBAO) + X (TARRAGO, BILBAO) + X (ORENSE, BILBAO) +
X (SEVILL, BILBAO) + X (ZARAGO, BILBAO) + X (SORIA, BILBAO) + X (ALBACE, BILBAO) +
X (LOGRON, BILBAO) + X (BILBAO, BILBAO) + X (BARCEL, BILBAO) + X (VALENC, BILBAO) +
X (MADRID, BILBAO) =E= 380 ;

DEMANDA (BARCEL) . .  X (HUELVA, BARCEL) + X (TARRAGO, BARCEL) + X (ORENSE, BARCEL) +
X (SEVILL, BARCEL) + X (ZARAGO, BARCEL) + X (SORIA, BARCEL) + X (ALBACE, BARCEL) +
X (LOGRON, BARCEL) + X (BILBAO, BARCEL) + X (BARCEL, BARCEL) + X (VALENC, BARCEL) +
X (MADRID, BARCEL) =E= 365 ;

DEMANDA (VALENC) . .  X (HUELVA, VALENC) + X (TARRAGO, VALENC) + X (ORENSE, VALENC) +
X (SEVILL, VALENC) + X (ZARAGO, VALENC) + X (SORIA, VALENC) + X (ALBACE, VALENC) +
X (LOGRON, VALENC) + X (BILBAO, VALENC) + X (BARCEL, VALENC) + X (VALENC, VALENC) +
X (MADRID, VALENC) =E= 370 ;

DEMANDA (MADRID) . .  X (HUELVA, MADRID) + X (TARRAGO, MADRID) + X (ORENSE, MADRID) +
X (SEVILL, MADRID) + X (ZARAGO, MADRID) + X (SORIA, MADRID) + X (ALBACE, MADRID) +
X (LOGRON, MADRID) + X (BILBAO, MADRID) + X (BARCEL, MADRID) + X (VALENC, MADRID) +
X (MADRID, MADRID) =E= 385 ;

```

E x e c u t i o n							
----	80	VARIABLE	X.L				
		HUELVA	TARRAGO	ORENSE	SEVILL	ZARAGO	SORIA
HUELVA	300.000					75.000	
TARRAGO			300.000				
ORENSE				300.000			
SEVILL					300.000		
ZARAGO						225.000	
SORIA							300.000
	+	ALBACE	LOGRON	BILBAO	BARCEL	VALENC	MADRID
TARRAGO				80.000	45.000		
ORENSE			30.000			70.000	
ZARAGO					75.000		
ALBACE	300.000						
LOGRON			270.000				30.000
BILBAO				300.000			
BARCEL					245.000		55.000
VALENC						300.000	
MADRID							300.000
----	80	VARIABLE	X.M				
		HUELVA	TARRAGO	ORENSE	SEVILL	ZARAGO	SORIA
HUELVA			60.000	99805.000			99447.000
TARRAGO	232.000			99891.000	135.000	12.000	104.000
ORENSE	100193.000	100107.000			528.000	99907.000	47.000
SEVILL	646.000	609.000		786.000		300.000	170.000
ZARAGO	570.000	410.000	100091.000		224.000		140.000
SORIA	100551.000	1035.000	761.000		626.000	672.000	
ALBACE	100612.000	1135.000	837.000		720.000	749.000	142.000
LOGRON	100351.000	100265.000	316.000	100027.000		713.000	74.000
BILBAO	874.000	671.000	100226.000		602.000	442.000	468.000
BARCEL	998.000	814.000	982.000		404.000	415.000	195.000
VALENC	100552.000	1154.000	716.000		558.000	731.000	172.000
MADRID	1702.000	1529.000	1310.000	100509.000		1106.000	564.000
	+	ALBACE	LOGRON	BILBAO	BARCEL	VALENC	MADRID
HUELVA	99386.000	99647.000		31.000	12.000	99446.000	37.000
TARRAGO	82.000	99733.000				221.000	36.000
ORENSE			99772.000	386.000			33.000
SEVILL	141.000	99971.000	406.000	65.000	100.000		99489.000
ZARAGO	94.000	578.000	170.000			197.000	10.000
SORIA	20.000	472.000	728.000		312.000	170.000	
ALBACE		548.000	805.000		400.000	296.000	8.000
LOGRON	27.000		762.000		360.000	92.000	
BILBAO	423.000	900.000			287.000	574.000	174.000
BARCEL	161.000	641.000	429.000			302.000	
VALENC	176.000	491.000	837.000	422.000			176.000
MADRID	450.000	962.000	1000.000	681.000	738.000		
----	80	VARIABLE	Z.L	=	145175.000		

Evidentemente, esta solución no indica de forma inmediata cual es la ruta de la distribución, ya que de ella hay que eliminar las rutas ficticias de entrada y salida de cada uno de los orígenes y destinos.

No excesivamente difícil determinar rutas como sigue:

Desde los orígenes:

Huelva	a	Zaragoza (transbordo)	75
Tarragona	a	Bilbao (final)	80
	a	Barcelona (final)	45
Orense	a	Logroño (transbordo)	30
	a	Valencia (final)	70

De los puntos de transbordo:

Zaragoza	a	Barcelona (final)	75
Logroño	a	Madrid (final)	30

Con ello los destinos finales quedan como:

Bilbao	80
Barcelona	120
Valencia	70
Madrid	30

Podemos observar que tanto Bilbao como Valencia han cubierto la demanda final, pero en Barcelona hay un exceso y en Madrid un déficit. Por tanto, en este caso Barcelona actúa también como nodo intermedio y transfiere a Madrid la cantidad de 55 unidades, por lo tanto las cantidades definitivas son:

Bilbao	80
Barcelona	65
Valencia	70
Madrid	85

estas cantidades recogen las necesidades totales de los diferentes destinos, siendo el coste total de transporte de 145.175 pesetas.

6.10 PROBLEMAS DE TRANSPORTE MULTIDIMENSIONAL

Una de las hipótesis básicas del problema del transporte consiste en que cada uno de los orígenes dispone de un único producto, y además es homogéneo. Una generalización de este problema, es cuando los orígenes disponen de diferentes productos, no todos ellos homogéneos, y que es posible enviar a diferentes destinos.

Desde el punto de vista formal, este problema consiste en:

Una fábrica posee l factorías distribuidas en diferentes lugares. Cada una de las l factorías puede fabricar n tipos diferentes de un producto que se distribuye en m áreas de venta.

Sean:

a_{ik} : el número de unidades enviadas al área k desde la factoría i .

b_{jk} : el número de unidades del tipo j enviadas al área k .

d_{ij} : el número de unidades del tipo j enviadas por la factoría i .

x_{ijk} : el número de unidades del tipo j fabricadas en la factoría i , y enviadas al área k .

c_{ijk} : el coste unitario de transporte de una unidad de tipo j fabricada en la factoría i , y enviada al área k .

El planteamiento matemático será :

$$\text{Min } \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_{ijk}$$

s.a:

$$\sum_j x_{ijk} = a_{ik}$$

$$\sum_i x_{ijk} = b_{jk}$$

$$\sum_k x_{ijk} = d_{ij}$$

$$x_{ijk} \geq 0$$

Para que este problema sea consistente, debe verificarse que:

$$\sum_k a_{ik} = \sum_j d_{ij} \quad ; \quad \sum_i a_{ik} = \sum_j b_{jk} \quad ; \quad \sum_i d_{ij} = \sum_k b_{jk} \quad ;$$

Consideremos el siguiente ejemplo de aplicación:

Una empresa fabrica dos modelos de coches (grande y mediano) en dos fabricas situadas en la ciudades Cádiz y Benavente. La venta de estos coches se realiza en tres grandes ciudades Madrid, Barcelona y Sevilla. Los costes de transporte de un coche (independientemente del modelo) de cada fabrica a cada ciudad son los siguiente:

	Madrid	Barcelona	Sevilla
Cádiz	30	20	40
Benavente	100	90	40

Las demandas de los diferentes modelos de coche en cada una de las ciudades es:

	Madrid	Barcelona	Sevilla
Grande	800	2000	4500
Mediano	1200	1000	1500

La capacidad productiva de las dos fabricas es la siguiente:

	Grande	Mediano
Cádiz	5000	3000
Benavente	4000	6000

Determinar la cantidad de coches de cada modelo se deben transportar desde cada fabrica a cada ciudad para satisfacer la demanda y minimizar los costes de transporte.

El planteamiento del problema es el siguiente ([pulsar aquí](#)):

```

OPTION LIMROW =100;
SET
    I      FACTORIAS
           /CADIZ
           BENAVENTE/
    K      MODELOS
           /GRANDE
           MEDIANO/
    J      DESTINOS
           /MADRID
           BARCELONA
           SEVILLA/;
TABLE A(I,K) CAPACIDAD PRODUCCION
           GRANDE      MEDIANO
    CADIZ      5000      3000
    BENAVENTE  4000      6000;
TABLE D(J,K) DEMANDAS
           GRANDE      MEDIANO
    MADRID      800      1200
    BARCELONA   2000     1000
    SEVILLA     4500     1500;
TABLE C(I,J,K) COSTE TRANSPORTE
           GRANDE      MEDIANO
    CADIZ.MADRID      30      30
    CADIZ.BARCELONA   20      20
    CADIZ.SEVILLA     40      40
    BENAVENTE.MADRID  100     100
    BENAVENTE.BARCELONA 90      90
    BENAVENTE.SEVILLA 40      40;
TABLE G(I,J) DEMANDAS MINIMAS
           MADRID      BARCELONA      SEVILLA
    CADIZ      1000      2000      3000
    BENAVENTE  1000      1000      3000;

VARIABLE
X(I,J,K) CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL ALMACEN J DEL
MODELO K
F;
POSITIVE VARIABLE X(I,J,K);
EQUATION
OBJ FUNCION OBJETIVO
DEMANDA(J,K)
FACTORIAS(I,K)
DEMANMIN(I,J);

OBJ.. F =E= SUM((I,J,K),C(I,J,K)*X(I,J,K));
DEMANDA(J,K).. SUM(I,X(I,J,K)) =G= D(J,K);
FACTORIAS(I,K).. SUM(J,X(I,J,K)) =L= A(I,K);
DEMANMIN(I,J).. SUM(K,X(I,J,K)) =G= G(I,J);

MODEL COCHES/ALL/;
SOLVE COCHES USING LP MINIMIZING F;
DISPLAY X.L, F.L;

```

Podemos observar el primer lugar las ecuaciones del problema :

```

Equation Listing      SOLVE COCHES USING LP FROM LINE 51

---- OBJ  =E=  FUNCION OBJETIVO

OBJ..  - 30*X(CADIZ,MADRID,GRANDE) - 30*X(CADIZ,MADRID,MEDIANO) -
20*X(CADIZ,BARCELO,GRANDE) - 20*X(CADIZ,BARCELO,MEDIANO) -
40*X(CADIZ,SEVILLA,GRANDE) - 40*X(CADIZ,SEVILLA,MEDIANO) -
100*X(BENAVEN,MADRID,GRANDE) - 100*X(BENAVEN,MADRID,MEDIANO) -
90*X(BENAVEN,BARCELO,GRANDE) - 90*X(BENAVEN,BARCELO,MEDIANO) -
40*X(BENAVEN,SEVILLA,GRANDE) - 40*X(BENAVEN,SEVILLA,MEDIANO) + F =E= 0

---- DEMANDA  =G=

DEMANDA (MADRID,GRANDE) ..  X(CADIZ,MADRID,GRANDE) + X(BENAVEN,MADRID,GRANDE)
=G= 800 ;

DEMANDA (MADRID,MEDIANO) ..  X(CADIZ,MADRID,MEDIANO) + X(BENAVEN,MADRID,MEDIANO)
=G= 1200

DEMANDA (BARCELO,GRANDE) ..  X(CADIZ,BARCELO,GRANDE) + X(BENAVEN,BARCELO,GRANDE)
=G= 2000 ;

DEMANDA (BARCELO,MEDIANO) ..  X(CADIZ,BARCELO,MEDIANO) +
X(BENAVEN,BARCELO,MEDIANO) =G= 1000 ;

DEMANDA (SEVILLA,GRANDE) ..  X(CADIZ,SEVILLA,GRANDE) + X(BENAVEN,SEVILLA,GRANDE)
=G= 4500 ;

DEMANDA (SEVILLA,MEDIANO) ..  X(CADIZ,SEVILLA,MEDIANO) +
X(BENAVEN,SEVILLA,MEDIANO) =G= 1500 ;

---- FACTORIAS  =L=

FACTORIAS (CADIZ,GRANDE) ..  X(CADIZ,MADRID,GRANDE) + X(CADIZ,BARCELO,GRANDE) +
X(CADIZ,SEVILLA,GRANDE) =L= 5000 ;

FACTORIAS (CADIZ,MEDIANO) ..  X(CADIZ,MADRID,MEDIANO) + X(CADIZ,BARCELO,MEDIANO)
+ X(CADIZ,SEVILLA,MEDIANO) =L= 3000 ;

FACTORIAS (BENAVEN,GRANDE) ..  X(BENAVEN,MADRID,GRANDE) +
X(BENAVEN,BARCELO,GRANDE) + X(BENAVEN,SEVILLA,GRANDE) =L= 4000 ;

FACTORIAS (BENAVEN,MEDIANO) ..  X(BENAVEN,MADRID,MEDIANO) +
X(BENAVEN,BARCELO,MEDIANO) + X(BENAVEN,SEVILLA,MEDIANO) =L= 6000 ;

---- DEMANMIN  =G=

DEMANMIN (CADIZ,MADRID) ..  X(CADIZ,MADRID,GRANDE) + X(CADIZ,MADRID,MEDIANO) =G=
1000 ;

DEMANMIN (CADIZ,BARCELO) ..  X(CADIZ,BARCELO,GRANDE) + X(CADIZ,BARCELO,MEDIANO)
=G= 2000 ;

DEMANMIN (CADIZ,SEVILLA) ..  X(CADIZ,SEVILLA,GRANDE) + X(CADIZ,SEVILLA,MEDIANO)
=G= 3000 ;

DEMANMIN (BENAVEN,MADRID) ..  X(BENAVEN,MADRID,GRANDE) +
X(BENAVEN,MADRID,MEDIANO) =G= 1000 ;

DEMANMIN (BENAVEN,BARCELO) ..  X(BENAVEN,BARCELO,GRANDE) +
X(BENAVEN,BARCELO,MEDIANO) =G= 1000 ;

DEMANMIN (BENAVEN,SEVILLA) ..  X(BENAVEN,SEVILLA,GRANDE) +
X(BENAVEN,SEVILLA,MEDIANO) =G= 3000 ;

```

La solución que se obtiene es:

```

E x e c u t i o n
-----
52 VARIABLE X.L CANTIDAD TRANSPORTADA DE LA FABRICA I AL
ALMACEN J
                                DEL MODELO K
                                GRANDE MEDIANO
CADIZ .MADRID 800.000 200.000
CADIZ .BARCELO 1200.000 800.000
CADIZ .SEVILLA 3000.000
BENAVENTE.MADRID 1000.000
BENAVENTE.BARCELO 800.000 200.000
BENAVENTE.SEVILLA 1500.000 1500.000
-----
52 VARIABLE F.L = 500000.000

```

6.11 PROBLEMAS DE TRANSPORTE CON RESTRICCIONES ADICIONALES

En algunos problemas de transporte hay casos en los que los distintos almacenes tienen ciertas preferencias por los fabricantes, debido a que el producto puede variar en alguna característica de uno a otro. Un ejemplo típico de esto es plantea en las fundiciones de hierro, donde el transporte y distribución de la pirita de hierro puede presentar impurezas según su origen.

Este problema se puede plantear como un problema de transporte con dos conjuntos de restricciones adicionales.

Sean n factorías que disponen de a_i ($i=1,2,..m$) cantidades de un cierto producto, y se desea enviar a unos destinos que demanda b_j ($j=1,2,..n$) cantidades de este producto. Una unidad de producto contiene p_{ijk} unidades de impurezas ($k=1,2,..p$) cuando es enviado de i a j .

El demandante no puede recibir más de d_{jk} unidades de impurezas k .

El coste de transportar una unidad de producto de i a j es c_{ij} .

El problema es satisfacer la demanda, con el mínimo coste.

Denominamos x_{ij} la cantidad enviada desde el origen i hasta el destino j , evidentemente, $x_{ij} \geq 0$.

Por tanto el problema a resolver es:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m p_{ijk} x_{ij} \leq d_{jk} \quad k=1,2,\dots,p$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$