Linealizando la Ecuación de Euler

IN703 - Andrea Repetto
Otoño 2005

La Ecuación de Euler nos da el equilibrio entre el consumo en t y en $t+1$:

$$u'(c_t) = E_t \left[\beta R_{t+1} u'(c_{t+1}) \right].$$

Queremos transformar esta ecuación en algo más útil para el análisis empírico. Supondremos que R_{t+1} es conocida en t, y que la función de utilidad instantánea es isoelástica. Es decir,

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Luego $u'(c) = c^{-\gamma}$, y podemos reescribir la Ecuación de Euler como

$$c_t^{-\gamma} = E_t \left[\beta R_{t+1} c_{t+1}^{-\gamma} \right]$$

$$1 = E_t \exp \left[\ln \left(\beta R_{t+1} c_{t+1}^{-\gamma} c_t^{\gamma} \right) \right].$$

Si δ y r son cercanas a cero, entonces $\ln \beta \approx -\delta$ y $\ln R_{t+1} \approx r_{t+1}$. Luego,

$$1 = E_t \exp \left[-\delta + r_{t+1} - \gamma \ln \left(c_{t+1}/c_t \right) \right].$$

Como $\ln \left(c_{t+1}/c_t \right) = \ln(c_{t+1}) - \ln(c_t)$, entonces

$$1 = E_t \exp \left[-\delta + r_{t+1} - \gamma \Delta \ln c_{t+1} \right].$$

Supongamos que $\Delta \ln c_{t+1}$ está distribuido Normal condicional. Sabemos que si una variable aleatoria $x \sim N(E(x), V(x))$, entonces $E(\exp(x)) = \exp(E(x) + \frac{V(x)}{2})$. En nuestro caso, si $\Delta \ln c_{t+1}$ es Normal, entonces $-\delta + r_{t+1} - \gamma \Delta \ln c_{t+1}$ también es Normal. Luego, la esperanza de $\exp \left(-\delta + r_{t+1} - \gamma \Delta \ln c_{t+1} \right)$ es $\exp(-\delta + r_{t+1} - \gamma E_t \Delta \ln c_{t+1} + \frac{1}{2} \gamma^2 V_t(\Delta \ln c_{t+1}))$. Luego,

$$1 = \exp \left[-\delta + r_{t+1} - \gamma E_t \Delta \ln c_{t+1} + \frac{1}{2} \gamma^2 V_t(\Delta \ln c_{t+1}) \right].$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados y reordenando

$$E_t \Delta \ln c_{t+1} = \frac{1}{\gamma}(r_{t+1} - \delta) + \frac{1}{2} \gamma V_t(\Delta \ln c_{t+1})$$

que puede reescribirse como

$$\Delta \ln c_{t+1} = \frac{1}{\gamma}(r_{t+1} - \delta) + \frac{1}{2} \gamma V_t(\Delta \ln c_{t+1}) + \varepsilon_{t+1}$$

donde ε_{t+1} es un error aleatorio con media 0 y ortogonal a las variables que determinan $\Delta \ln c_{t+1}$.