*IN703 Macroeconomía I* *Sem. Otoño, 2007*

Profs.: K. Cowan, J. De Gregorio y A. Repetto

Profs. Auxs.: G. Cisternas y S. Truffa.

**Guía de Ejercicios 1**

1. Use el modelo de crecimiento neoclásico de economía cerrada (Solow-Swan) para mostrar que:

   *a*) Un aumento en la tasa de crecimiento de la población reduce el crecimiento.

   *b*) Un aumento de la tasa de ahorro aumenta la tasa de crecimiento.

   Discuta si sus resultados se aplican a la transición o al estado estacionario.

2. **Progreso Tecnológico embutido**[1]

   Una de las formas de ver el progreso tecnológico es que la productividad del capital en instante $t$ depende del "estado"de la tecnología en ese instante y no se ve afectado por el progreso tecnológico posterior. Esto es lo que se llama el *progreso tecnológico embutido* (el progreso tecnológico tiene que estar "dentro"del nuevo capital antes que pueda aumentar la producción). Esta pregunta investiga este efecto.

   *a*) Primero modificamos el modelo básico de Solow para poder tener progreso tecnológico "capital augmenting.en vez de "labor augmenting". Para esto asuma que la función de producción es $Y(t) = [A(t)K(t)]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$. Asuma que $A$ crece a una tasa $\mu$, es decir $\dot{A}(t) = \mu A(t)$. Muestre que la economía converge a una trayectoria de crecimiento estable. Encuentre la tasa de crecimiento de $Y$ y $K$. (Hint: muestre que se puede escribir $Y/(A^{\phi}L)$ como función de $K/(A^{\phi}L)$, donde $\phi = \alpha/(1-\alpha)$. Después analice la dinámica de $k = K/(A^{\phi}L)$.

   *b*) Ahora considere el progreso tecnológico embutido. Específicamente, asuma que la función de producción es $Y(t) = J(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$, donde $J(t)$ es la cantidad efectiva del stock de capital. La dinámica de $J(t)$ esta dada por $\dot{J}(t) = sA(t)Y(t) - \delta J(t)$. La presencia del término $A(t)$ en esta expresión significa que la productividad de la inversión en el momento $t$ depende de la tecnología

[1] Esto viene de Solow 1960, y Sato 1966.

disponible en $t$.
Muestre que la economía converge a una trayectoria de crecimiento estable o balanceada. ¿Cuáles són las tasas de crecimiento de $Y$ y de $J$? (Hint: defina $\bar{J}(t) = J(t)/A(t)$. Después use la misma metodología de la parte (a), fijándose en $\bar{J}(t)/(A^{\phi}L)$ en vez de $K/(A^{\phi}L)$.)

3. **Learning by doing**
Suponga una economía donde la función de producción viene dada por: $Y(t) = K(t)^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$, donde $L$ es constante e igual a 1. Además se sabe que el capital evoluciona de acuerdo a $\dot{K}(t) = sY(t)$, y la acumulación de conocimiento ocurre como efecto secundario de la producción de bienes, es decir: $\dot{A}(t) = BY(t)$.

    *a*) Encuentre una expresión para $g_a(t)$ y $g_k(t)$ en términos de $A(t)$, $K(t)$ y los parámetros del modelo (donde se define $g_q = \dot{q}/q$).

    *b*) Dibuje las líneas $\dot{g_a}(t) = 0$ y $\dot{g_k}(t) = 0$ en el espacio de $(g_a, g_k)$.

    *c*) ¿Converge la economía a una trayectoria de crecimiento estable? Si su respuesta es afirmativa cuáles son las tasas de crecimiento de $K$, $A$ e $Y$.

    *d*) Analice el efecto de un aumento en la tasa de ahorro sobre el crecimiento de largo plazo de la economía.

4. **Pago a los factores en el Modelo de Solow**
Recuerde que en el modelo de Solow el producto $Y$, viene dado por:

$$Y = F(K, L) \tag{1}$$

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; $K$ y $L$ denotan respectivamente capital y trabajo; y la función de producción $F$ exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante $k = K/L$ y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

$$y = f(k) \tag{2}$$

donde $f(k) = F(K, 1)$. La dinámica del capital queda caracterizada por:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \tag{3}$$

donde $s$, $n$ y $\delta$ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

*a*) Suponga que el pago al capital $r$, viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, $w$, por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$. ¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?

*b*) Muestre que $r = f'(k)$ y $w = f(k) - kf'(k)$. Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

*c*) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que $rK + wL = F(K, L)$.

*d*) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

*e*) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital, $\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r}$ , y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w}$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

*f*) La tasa de retorno al capital en Chile durante el último año ha sido considerablemente menor que en años anteriores (*v.g.*, IPSA, IGPA). ¿Es posible explicar este fenómeno en base a los resultados de este problema? Justifique.

*g*) Los salarios reales (medidos correctamente) vienen creciendo sostenidamente en los últimos años, sin que se note una caída en la tasa de crecimiento. Es consistente con los resultados de este problema? Si su respuesta es afirmativa, justifique cuidadosamente. Si es negativa, discuta cuál aspecto excluido del modelo estudiado en este problema puede explicar la aparente discrepancia[2].

[2]Esto fue cierto hasta 1998, cuando este problema apareció en un control. Tome como cierta la afirmación para responder a la pregunta.

5. **Efecto escala en los modelos de crecimiento**[3]

   En este problema analizaremos las implicancias de los nuevos modelos de crecimiento endógeno sobre la relación entre el nivel de la población y su tasa de crecimiento y la tasa de crecimiento del producto per-cápita. El efecto escala significa que la tasa de crecimiento del producto (o consumo) depende del nivel de la población.

   Suponga una economía donde una parte de la población se dedica a producir nuevas ideas, $L_A$, mientras que el resto utiliza esas ideas para producir más bienes, $L_Y$, la población total crece a una tasa $n$. Por simplicidad supondremos que $L_A = sL$, mientras que $L_Y = (1-s)L$, donde $L$ es la población total. La función de producción es:

$$Y = A^{\sigma} L_Y \tag{4}$$

   donde $A$ es la cantidad de ideas que existen en la economía, $\sigma > 0$. Suponga además que la cantidad de ideas evoluciona de acuerdo a:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta L_A \tag{5}$$

   *a*) De una intuición de las ecuaciones (4) y (5).

   *b*) Encuentre la tasa de crecimiento per-cápita de esta economía.

   Suponga ahora que la función que describe la evolución de las ideas es:

$$\dot{A} = \delta L_A A^{\phi} \tag{6}$$

   donde $\phi < 1$. La función de producción sigue siendo la misma.

   *c*) Cuales son las diferencias entre la ec. (5) y (6). ¿Qué implicancias tienen estos modelos sobre la relación entre población y crecimiento del producto?

   *d*) Encuentre usando la ecuación (6) la tasa de crecimiento del producto per-cápita. Para ello use el hecho que en estado estacionario la tasa de crecimiento de las ideas es constante.

   *e*) Analize el impacto de un aumento de $s$ en la parte (b) y la parte (d). De intuición económica.

[3] Este problema esta basado en "Growth: With or Without Scale Effects"de Charles Jones, preparado para la Reunión de la AEA, January 3, 1999. Puede bajarse de http://www.stanford.edu/ chadj/scaleff10.pdf.

*f* ) Obtenga el nivel de ingreso per-cápita en el estado estacionario. Para ello debe usar (6) más los resultados obtenidos en (d). ¿Cómo afecta un aumento de $s$ en el nivel de ingreso per cápita?

*g* ) En el año 10.000 BC, los continentes de Australia, Europa y América se separaron y no tuvieron ningún contacto hasta la época en que Cristóbal Colon descubrió América. Se sabe con bastante precisión que en el año 10.000 BC la población de Europa era mayor a la de América y esta mayor a la de Australia. Sin embargo, el nivel técnologico era similar[4]. Usando los resultados de las partes anteriores que puede inferir sobre el nivel técnologico de los tres continentes al momento en que Colón descubrió América. Suponga que las tasas de crecimiento de las poblaciones en los tres continentes fue similar.

[4]Para mayores detalle sobre esta evidencia ver M. Kremer Population Growth and Tecnological Change: One Million B.C to 1990 Quartely Journal of Economics, CVIII, (1993) 681-716.