Control No. 1

IN759: Macroeconomía II
Profs: Bergoeing - De Gregorio
Auxs: Hernández - Nuñez

1. **Horizonte infinito y equivalencia ricardiana**. Considere una economía donde los individuos maximizan su utilidad, y no la del hogar, cuyo número de miembros crecen a una tasa n ($N_t = N_0 e^{nt}$). La oferta de trabajo es unitaria. El tiempo es continuo, y individuo recibe un salario w_t en cada instante, además tiene activos a_t, por los que le pagan una tasa de interés constante e igual a r. El individuo acumula activos $\dot{a}_t$, consume c_t y paga impuestos de suma alzada τ_t.

   No hay gasto de gobierno, sin embargo el gobierno tiene una deuda pública total B_t, la que paga un interés constante igual a r, lo que financia con un impuesto τ_t por individuo y lo que no alcanza a financiar vía impuestos lo hace acumulando deuda pública ($\dot{B}_t$).

   (a) Escriba la restricción presupuestaria del individuo, y también su restricción presupuestaria intertemporal.

   (b) Escriba la restricción presupuestaria del gobierno en términos per-cápita y también escriba la correspondiente restricción intertemporal.

   (c) En equilibrio el stock de activos total del individuo es $k_t + b_t$. Suponga que el consumo, los salarios y el impuesto son constantes, y escriba la restricción presupuestaria intertemporal. ¿Cuánto es el impuesto τ que satisface la restricción presupuestaria del gobierno como función del nivel de deuda inicial (denótelo b_t o b_0)?

   (d) Reemplace la restricción presupuestaria del gobierno en la restricción presupuestaria del individuo, considerando que los activos del individuo son capital y bonos. Demuestre que los bonos del gobierno son riqueza neta, por lo tanto la política de financiamiento de la deuda pública si tiene efectos reales. Muestre que la equivalencia ricardiana sólo se cumple cuando $n = 0$.

   (e) Discuta su resultado.

   Nota: si usted lo desea le resulta más fácil puede resolver el problema en tiempo discreto y recuerde en dicho caso que $\sum_{i=0}^{\infty} 1/(1+r)^i = (1+r)/r$. En tiempo continuo usted sabrá que $\int_0^{\infty} e^{-rt}dt = 1/r$.

2. **CER en dos períodos**. Suponga una economía habitada por un sólo hogar de tamaño unitario, que vive por dos períodos, con la siguiente función de utilidad:

$$\theta \log C_t + (1-\theta)\log(1-L_t).$$

   El consumidor maximiza el valor descontado de la utilidad, donde la tasa de descuento es ρ. Para $t = 1$ y 2. El bien es perecible y la función de producción en cada período es:

$$Y_t = a_t L_t.$$

La productividad es a_1 y a_2.

(a) Suponga que $a_1 = a_2 = a$. Calcule el valor de equilibrio del producto y empleo en cada período y la tasa de interés de equilibrio (basta con describir la ecuación que determina la tasa). Nota: debe partir determinando cuál es el salario en cada período.

(b) Suponga un aumento transitorio de la productividad ($a_1 = \bar{a} > a$). ¿Qué pasa con la producción y empleo en cada período, y la tasa de interés de equilibrio.

(c) ¿Qué pasa cuando el cambio de la productividad es permanente?

Pauta Control No. 1

1. (a)
$$w_t + ra_t = c_t + \tau_t + \dot{a}_t. \tag{1}$$
lo que lleva a la siguiente restricción intertemporal:
$$a_t = \int_0^\infty (c_t + \tau_t - w_t)e^{-rt}dt. \tag{2}$$
(b) La restricción intertemporal del gobierno es:
$$rB_t = \tau_t N_t + \dot{B}_t. \tag{3}$$
La que en términos per capita es:
$$(r-n)b_t = \tau_t + \dot{b}_t. \tag{4}$$
La restricción intertemporal es:
$$b_t = \int_0^\infty \tau_t e^{-(r-n)t}dt. \tag{5}$$
(c) Si el consumo, salarios e impuestos son constantes la restricción del individuo es:
$$k_t + b_t = (c + \tau - w)/r. \tag{6}$$
En el caso del gobierno el impuesto constante que satisface la restricción presupuestaria es:
$$\tau = (r-n)b_t. \tag{7}$$
(d) Insertando la restricción presupuestaria del gobierno en la del individuo se tiene llega a:
$$b_t\frac{n}{r} + k_t = \frac{c-w}{r}. \tag{8}$$
Es decir la deuda pública es riqueza, y sólo no lo es cuando n es igual a cero.

(e) Lo que ocurre es que cuando hay crecimiento de la población, la deuda de hoy se paga con impuestos cobrados no sólo a los individuos que están vivos en t sino que también a todas las generaciones futuras, y por lo tanto la carga tributaria, en valor presente, sobre el individuo es menor que b_t.

2. (a) Maximizando el beneficio del productor en cada período se tiene :
$$\max \Pi = Y - \omega_t L_t \quad s.a. \quad Y = a_t L_t$$
$$a_t = \omega_t$$
El consumidor debe resolver:

$$L = \theta[\log(c_1) + \beta\log(c_2)] + (1-\theta)[\log(1-L_1) + \beta\log(1-L_2)]$$
$$-\lambda\left[c_1 + \tfrac{c2}{1+r} - \omega_1 L_1 - \tfrac{\omega_1 L_2}{1+r}\right]$$

De la CPO se tiene:

$$c_2 = \beta(1+r)c_1 \tag{9}$$

$$\frac{1-L_2}{1-L_1} = \frac{\beta(1+r)\omega_1}{\omega_2} \tag{10}$$

$$L_2 = 1 + (L_1 - 1)\beta(1+r)\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{11}$$

$$c_1 = \omega_1(1-L_1)\frac{\theta}{1-\theta} \tag{12}$$

$$c_2 = \beta(1+r)\omega_1(1-L_1)\frac{\theta}{1-\theta} \tag{13}$$

Reemplazando 11, 12 y 13 en la restricción presupuestaria y después de un poco de algebra se tiene que:

$$L_1 = \frac{\theta+\beta}{1+\beta} - \frac{\omega_2(1-\theta)}{\omega_1(1+r)(1+\beta)} \tag{14}$$

Lo que corresponde a la oferta de trabajo del primer período, donde $\frac{\partial L_1}{\partial \omega_1} > 0$ (oferta con pendiente positiva). Reemplazando 14 en 11 se tiene la oferta de empleo para el segundo período[1]:

$$L_2 = 1 + \left[\frac{\theta+\beta}{1+\beta} - \frac{\omega_2(1-\theta)}{\omega_1(1+r)(1+\beta)} - 1\right]\beta(1+r)\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{15}$$

donde:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \omega_1} = \beta(1+r)\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{1-\theta}{1+\beta}$$

[1]Dado que la productividad es la misma en ambos períodos la oferta de empleo es independiente del salario. Sin embargo, se ha optado por dejar la solución general del problema para facilitar el entendimiento de *b)* y *c)*.

con $\theta < 1$ por lo que $\frac{\partial L_1}{\partial \omega_1} > 0$.

Dado que el mercado es competitivo el beneficio del productor es igual a 0; por lo que el producto de cada período puede ser expresado como $Y_t = a_t L_t$. Como el bien es perecible el consumo es igual al ingreso de cada período:

$$c_1 = Y_1 = a_1 L_1 \tag{16}$$

$$c_2 = Y_2 = a_1 L_1 \tag{17}$$

Si el bien es perecible entonces la tasa de interés esta determinada por la ecuación 9 de donde se obtiene que:

$$r = \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)\frac{1}{\beta} - 1 = \left(\frac{a_2 L_2}{a_1 L_1}\right)\frac{1}{\beta} - 1 \tag{18}$$

(b) Supongamos que se incrementa la productividad del primer período, es decir, a_1 y el ingreso ω_1. La tasa de interés cae porque el mayor ingreso permite al individuo consumir más en el presente; esto es equivalente a decir que el consumo del primer período es más abundante.

Lo que sucede con el empleo se puede apreciar reemplazando en la ecuación 14 y 15 el salario por la productividad. El aumento de productividad aumenta L_1 y disminuye L_2; esto porque el ocio es más caro en el presente y más barato en el futuro. Luego, Y_1 crece (efecto empleo y productividad) e Y_2 cae (efecto empleo).

(c) En el caso de ser permanente, el ingreso se incrementa en ambos períodos; luego c_1 y c_2 suben en la misma cantidad (ver reacción del consumo ante aumento de ingreso permanente). Como el consumo y el ingreso aumentan en la misma cantidad la tasa de interés no cambia. En este caso el empleo se mantiene porque el incremento en productividad es permanente no afectando la trayectoria de ingresos del individuo.