

IN701

Primer Semestre, 2007

Guía de Problemas 2

Versión final

Problema 1 Suponga una firma que posee una tecnología definida por la función de producción $F : \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, de cada vector de insumos $z = (z_1, \dots, z_L)$ entrega $F(z)$ unidades de un cierto producto. Dados los precios de insumos $w_i, i = 1, \dots, n$, y un nivel de producción q , la *función de costos* de la firma corresponde a

$$C(w, q) = \min_z \{p \cdot z | F(z) \geq q\}$$

(i) Considere la función de producción

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_1 x_2 + x_2$$

¿Es cóncava? Demuestre que la función de costos está dada por

$$C(w_1, w_2, q) \begin{cases} w_1 q & \frac{w_1}{w_2} \leq \frac{1}{1+q} \\ w_2 q & \frac{w_1}{w_2} \geq 1+q \\ 2\sqrt{w_1 w_2 (1+q)} - w_1 - w_2 & 1+q > \frac{w_1}{w_2} > \frac{1}{1+q} \end{cases}$$

(ii) Considere la función de producción

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

con $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Suponga que los insumos 1 y 2 son variables en el corto plazo y que el insumo 3 es variable sólo en el corto plazo. Determine la función de costos de corto y largo plazo.

(iii) ¿Qué tipo de retornos a escala exhibe esta firma? ¿Cómo es su función de costos medios $\frac{C(q)}{q}$? Explique la relación.

Problema 2 Decimos que una función es superaditiva si $F(s+t) \geq F(s) + F(t)$.

(i) Demuestre que la función de costos $C(w, q)$ es superaditiva en w .

(ii) Explique intuitivamente esta propiedad.

(iii) Utilice lo anterior para demostrar, sin asumir diferenciabilidad, que la función de costos es no-decreciente en w .

Problema 3 Considere dos distribuciones $F(\cdot)$ y $G(\cdot)$ ambas con una misma media. Diremos que F *domina a G en segundo orden estocástico* si para toda función $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ no decreciente y cóncava se tiene que

$$\int u(x) dF(x) \geq \int u(x) dG(x)$$

- (i) ¿Qué significa lo anterior en términos de preferencias de los agentes sobre las loterías?
- (ii) Considere entonces una variable aleatoria x que se distribuye mediante F , una v.a. y que se distribuye mediante G y una tercera v.a. $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $\alpha \in (0, 1)$. Suponga que $Var(x) > Var(y)$. Asumiendo que F y G son independientes y de igual media, ¿puede establecer un ranking de distribuciones acorde con la noción recién definida? De ser afirmativa la respuesta, demuéstrela formalmente.

Problema 4 Recuerde que la función $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ es indicadora de cuán averso al riesgo es un agente (ver teorema de Arrow-Pratt).

(i) Demuestre que un agente económico que exhibe aversión al riesgo constante e igual a μ debe tener una función de Bernoulli de la forma $u(x) = Ae^{-\mu x}$, con $A < 0$. A partir de ahora asuma $A = -\frac{1}{\mu}$.

(ii) Considere un agente con función de utilidad $u(x) = \frac{1}{\gamma-1}(\alpha + \gamma x)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ definida para $x > -\frac{\alpha}{\gamma}$ y $\gamma \neq 0, 1$ tiene aversión al riesgo decreciente si $\gamma > 0$ y decreciente si $\gamma < 0$.

(iii) Demuestre que las preferencias representadas por esta función de utilidad son las mismas que las representadas por $\ln(x + \alpha)$ si $\gamma \rightarrow 1$ y que $-e^{-\frac{x}{\alpha}}$ si $\gamma \rightarrow 0$.

(iv) Explique intuitivamente en qué casos un agente puede tener aversión al riesgo creciente o decreciente.

Problema 5 Definimos la aversión relativa al riesgo como $A_R(x) = -\frac{u''(x)x}{u'(x)}$. ¿En qué sentido esta aversión relativa al riesgo es una elasticidad? ¿Qué forma funcional debe tener u para que el agente tenga una aversión al riesgo relativa igual a λ ?

Problema 6 Considere un agente que tiene una cantidad w de dinero, y que puede invertir en 2 instrumentos: el primero paga una tasa $\bar{r}$ con seguridad, y el segundo paga una tasa r que se distribuye de acuerdo a F . En lo que sigue asumiremos que $E[r] > \bar{r}$. El agente, que tiene preferencias con representación de utilidad esperada, debe decidir qué cantidad invertir en el activo riesgoso, a^* .

(i) Encuentre una expresión explícita para a^* (que depende de la distribución F), en el caso que $u(x) = -(\alpha - x)^2$. Interprete la dependencia de estos resultados en la distribución F y en w .

(ii) Demuestre que a^* es creciente en w si el agente es averso al riesgo y su aversión al riesgo es decreciente.

(iii) Demuestre que $\frac{a^*}{w}$ es creciente en w si el agente es averso al riesgo, su aversión relativa al riesgo es decreciente y $a^* > 0$.

(iv) Demuestre que a^* es estrictamente decreciente en r si el agente es averso al riesgo, su aversión al riesgo es creciente y $a^* > 0$.

(v) Demuestre que a^* es estrictamente decreciente en r si el agente es averso al riesgo y $A_R(x) \leq 1$.

Problema 7 Considere un consumidor que maximiza $\sum_{t=0}^1 \beta^t u(x_t)$, donde x_t es su consumo en periodo t . Este agente recibe un ingreso y_t en cada periodo, y su restricción presupuestaria es

$$\sum_{t=0}^1 \left(\frac{1}{1+r} \right)^t x_t \leq \sum_{t=0}^1 \left(\frac{1}{1+r} \right)^t y_t$$

(i) Explique el por qué de esta restricción presupuestaria.

(ii) Suponga que $u(x_t) = -\frac{(x_t-2)^2}{2}$, $y_t \equiv 1$ y $\beta = \frac{1}{1+r}$. Encuentre el plan de consumo óptimo y el nivel de utilidad alcanzado por el agente.

(iii) Suponga ahora que $y_0 = 1$, pero que $y_1 = \frac{1}{2}$ o $y_1 = \frac{3}{2}$, y que cada uno de estos eventos sucede con probabilidad $\frac{1}{2}$. Asuma que el agente maximiza utilidad esperada. Calcule el plan de consumo óptimo y el nivel de utilidad esperada alcanzada por el agente.

(iv) Discuta las similitudes y/o diferencias entre sus respuestas a las partes (ii) y (iii).

Problema 8 Considere un agente que debe consumir 2 bienes x_1 y x_2 . El objetivo de este problema es explorar si el agente prefiere o no que haya incerteza en los precios que enfrentará cuando tome su decisión de consumo. El agente tiene una riqueza fija e igual a w .

(i) Suponga que este agente maximiza utilidad esperada y que $u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ para alguna función f creciente. Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ y $p = (3, 1)$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

(ii) Suponga ahora que $u(x_1, x_2) = f(\min\{x_1, x_2\})$ para alguna función f creciente, cóncava y con $|f(0)| < \infty$. El riesgo está enteramente en el nivel de precios: $p = (\gamma, \gamma)$ y $p' = (\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma})$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. Demuestre que para cada $\gamma > 1$ existe una función f tal que prefiere precios $p'' = (\frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{\gamma}), \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{\gamma}))$ con probabilidad 1 a la alternativa riesgosa.

(iii) Comente la diferencia entre los resultados anteriores.

Problema 9 Considere una lotería que entrega \$10 y \$20 con probabilidad $\frac{1}{2}$. Considere una segunda lotería que entrega \$5, \$15 y \$30 con probabilidades $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{9}$. Demuestre que si un agente es estrictamente averso al riesgo y tiene preferencias representadas por una función de utilidad esperada, entonces siempre preferirá la primera lotería.

Problema 10

- (i) Considere una firma que posee dos plantas. Cada una de ellas tiene una función de producción $f_i(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_i} x_2^{1-\alpha_i}$. Encuentre la función de costo para esta firma.
- (ii) Suponga que una firma produce usando 2 factores A y B , mediante la función $F(x_A, x_B)$. Sin embargo, para que estos insumos produzcan es necesario un tercer factor θ . Además, si en la producción se desea utilizar una cantidad x_A del primer insumo, se requiere una cantidad $\theta(x_A) = f_A(x_A)$. Análogamente para x_B se requiere $\theta(x_B) = f_B(x_B)$. Suponga además que los precios de los factores están fijos.
 - (a) Dé una interpretación para el parámetro θ .
 - (b) Plantee el problema de producir una cantidad q al mínimo costo.

- (c) Dado $q > 0$, resuelva el problema anterior para el caso particular $F(x_A, x_B) = x_A^2 + 4x_B$, $f_A(x) = x(2q - x)$ y $f_B(x) = x + 2q$.
- (d) Interprete su resultado anterior.

Problema 11 La producción de atún ahumado por parte de una firma, se produce un olor desagradable. Denotamos por $c(y, m; w)$ el mnimo costo, por insumos, para producir una cantidad y de atún ahumado, emanar m metros cúbicos de gas, dado un vector de precios w . Suponga que el precio del atún ahumado es $p > 0$. Suponga además que $\frac{\partial c}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial c}{\partial m} < 0$ y que $c(\cdot, \cdot; w)$ es estrictamente convexa en y y m .

- (i) Pruebe que $c(y, m; \cdot)$ es cóncava en w .
- (ii) Suponga que el gobierno impone un límite para la emisión de gas, de modo que $m \leq \hat{m}$. Escriba el problema de maximización de utilidades para la firma y encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\frac{\partial y^*}{\partial \hat{m}} > 0$.
- (iii) Ahora suponga que le gobierno deja producir cualquier cantidad de gas, pero cobra un impuesto $t > 0$ por metro cbico de gas emitido. Escriba el nuevo problema de maximización de utilidades para la firma y muestre que la solución es convexa en t y que $\frac{\partial m^*}{\partial t} \leq 0$.