

Pauta Pregunta 4b:

Pregunta: Demuestre que si $\sigma' = (\sigma_1', \sigma_2')$ y $\sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'')$ son dos equilibrios de Nash en estrategias totalmente mixtas, entonces $\sigma^* = (\lambda\sigma_1' + (1 - \lambda)\sigma_1'', \lambda\sigma_2' + (1 - \lambda)\sigma_2'')$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ también es un equilibrio de Nash.

Demostración:

Si σ'_i y σ''_i son estrategias totalmente mixtas quiere decir que todas las acciones disponibles al jugador i se juegan con probabilidad positiva. Para simplificar el análisis, supongamos que cada jugador tiene sólo dos acciones disponibles: (a_1, a_2) en el caso del jugador 1 y (b_1, b_2) en el caso del jugador 2.

Luego, si $\sigma' = (\sigma_1', \sigma_2')$ es un equilibrio de Nash entonces tiene que ser cierto que ambas acciones tienen el mismo pago esperado, dado σ_2'

$$U_1(a_1, \sigma_2') = U_1(a_2, \sigma_2') = k_1'$$

Del mismo modo y dado que $\sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'')$ también es un equilibrio de Nash, tiene que ser cierto que

$$U_1(a_1, \sigma_2'') = U_1(a_2, \sigma_2'') = k_1''$$

Definamos $\sigma_i^* = \lambda\sigma_i' + (1 - \lambda)\sigma_i''$.

Entonces, $\sigma^* = (\lambda\sigma_1' + (1 - \lambda)\sigma_1'', \lambda\sigma_2' + (1 - \lambda)\sigma_2'')$ es un equilibrio de Nash si

$$\begin{aligned} U_1(a_1, \sigma_2^*) &= U_1(a_2, \sigma_2^*) \\ U_2(\sigma_1^*, b_1) &= U_2(\sigma_1^*, b_2) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} U_1(a_1, \sigma_2^*) &= U_1(a_1, \lambda\sigma_2' + (1 - \lambda)\sigma_2'') \\ &= \lambda U_1(a_1, \sigma_2') + (1 - \lambda)U_1(a_1, \sigma_2'') \\ &= \lambda k_1' + (1 - \lambda)k_1'' \\ &= k_1^* \end{aligned}$$

Observar que k_1^* es independiente de la acción elegida por el jugador 1 (a_1). Siguiendo exactamente el mismo procedimiento se puede demostrar que

$$U_1(a_2, \sigma_2^*) = \lambda k_1' + (1 - \lambda)k_1'' = k_1^*$$

Luego

$$U_1(a_1, \sigma_2^*) = U_1(a_2, \sigma_2^*) = k_1^*$$

El proceso es análogo para demostrar que $U_2(\sigma_1^*, b_1) = U_2(\sigma_1^*, b_2) = k_2^*$.

En consecuencia, $\sigma^* = (\lambda\sigma_1' + (1-\lambda)\sigma_1'', \lambda\sigma_2' + (1-\lambda)\sigma_2'')$ es un equilibrio de Nash.

Comentarios adicionales:

- Comentario 1: para que una combinación lineal de 2 equilibrios de Nash en estrategias mixtas también sea un equilibrio de Nash, es necesario que ambos equilibrios tengan el mismo soporte; en otras palabras, ambas estrategias deben jugar con probabilidad positiva las mismas acciones (aunque obviamente no tiene que ser con la misma probabilidad).
- Comentario 2: La implicancia de esta demostración es que si el juego tiene más de un equilibrio de Nash en estrategias totalmente mixtas, entonces tiene infinitos equilibrios de Nash en estrategias totalmente mixtas.
- Comentario 3: La siguiente demostración es muchas veces usada por los alumnos para hacer la demostración pedida pero es INCORRECTA. Aquí les explico por qué:

Demostración usada pero **errónea**:

Si $\sigma' = (\sigma_1', \sigma_2')$ y $\sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'')$ son dos equilibrios de Nash luego $\sigma^* = (\lambda\sigma_1' + (1-\lambda)\sigma_1'', \lambda\sigma_2' + (1-\lambda)\sigma_2'')$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ también es un equilibrio de Nash pues:

$$U_1(\lambda\sigma_1' + (1-\lambda)\sigma_1'', \sigma_2) = \lambda U_1(\sigma_1', \sigma_2) + (1-\lambda)U_1(\sigma_1'', \sigma_2)$$

Luego, se afirma que dado que σ_1' y σ_1'' son Nash tiene que ser cierto que

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1', \sigma_2) &\geq U_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1 \\ U_1(\sigma_1'', \sigma_2) &\geq U_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1 \end{aligned}$$

Luego

$$U_1(\lambda\sigma_1' + (1-\lambda)\sigma_1'', \sigma_2) \geq U_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1$$

y por lo tanto $\sigma_1^* = \lambda\sigma_1' + (1-\lambda)\sigma_1''$ también es Nash

¿Dónde está el error? Esta demostración olvida que el equilibrio de Nash no se define en función de la estrategia de uno de los jugadores sino en relación a la estrategia que ambos jugadores juegan. Dicho de otro modo, es un error decir que " σ_1' y σ_1'' son Nash" pues lo que es Nash es la combinación de estrategias (σ_1', σ_2') y $\sigma'' = (\sigma_1'', \sigma_2'')$. Por lo tanto decir que "dado que σ_1' es Nash tiene que ser cierto que $U_1(\sigma_1', \sigma_2) \geq U_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1$ **ES UN ERROR**. Lo único que sabemos es que $U_1(\sigma_1', \sigma_2) \geq U_1(\sigma_1, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1$ (esto es, que σ_1' es la mejor respuesta del jugador 1 a σ_2' , pero no sabemos cómo es en relación a cualquier otra estrategia (pura o mixta) que juegue el jugador 2.