

Clase Auxiliar 7
Economía Industrial
Viernes 1 de Junio 2007

Profesores: Soledad Arellano, Nicolás Figueroa
Auxiliares: Carlos Ramírez, Ercos Valdivieso, Diego Vega.

Problema 1

Suponga que existen 2 firmas que producen un producto homogéneo. Sea $P(Q) = a - Q$, donde Q es la cantidad agregada en el mercado (Más precisamente $P(Q) = a - Q$ para $Q < a$ y $P(Q) = 0$ en caso contrario). Suponga además que el costo total de producción para la firma i está dado por $C_i(q_i) = cq_i$ (suponga $c < a$)

- Encuentre el equilibrio de Nash de la situación bajo competencia a la Cournot. Grafique las funciones de mejor respuesta de cada firma.
- Considere ahora el caso anterior, pero bajo productos diferenciados. En este caso la cantidad demandada por los consumidores de la empresa i es: $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$ donde b representa hasta que punto el producto de la empresa i es sustituto del producto de la empresa j . Encuentre el equilibrio de Nash bajo competencia a la Bertrand. Grafique las funciones de mejor respuesta de las firmas.
- Considere ahora el caso inicial, pero la firma 1 es líder. Calcule el equilibrio en este esquema (duopolio de Stackelberg). Grafique las funciones de mejor respuesta
- Compare las utilidades de cada una de las firmas en cada uno de los escenarios anteriores. ¿Qué puede decir del valor de la información para la firma 1 al comparar Stackelberg con Cournot?

Solución:

(a) Suponemos que las firmas escogen sus cantidades (q_1, q_2) simultáneamente.

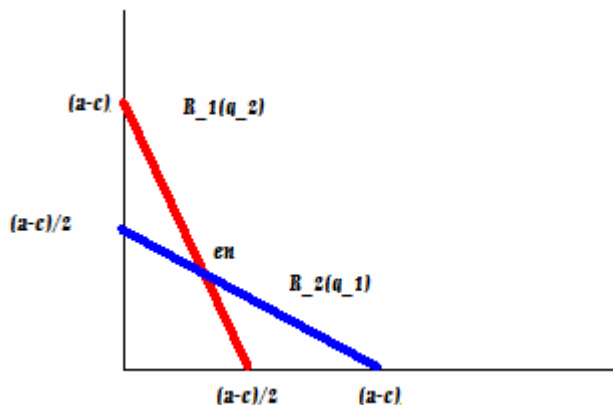
Luego:

$$\pi_i(q_i, q_j) = (a - q_i - q_j)q_i - cq_i = (a - c - (q_i + q_j))q_i$$

Al maximizar la utilidad obtenemos las funciones de mejor respuesta de los agentes:

$$q_i^*(q_j) = \frac{1}{2}(a - c - q_j) \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}$$

Al graficar dichas funciones obtenemos de la intersección el E.N



- Ahora las compañías escogen precios de manera simultánea, por lo que el problema que resuelven es:

$$\underset{p_i}{\text{Max}} \pi_i(p_i, p_j) = \underset{p_i}{\text{Max}} (p_i - c) q_i(p_i, p_j) = \underset{p_i}{\text{Max}} (a - p_i + b p_j) q_i$$

En equilibrio tenemos que:

$$p_i^*(p_j) = \frac{1}{2}(a + c + b p_j) \Rightarrow p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

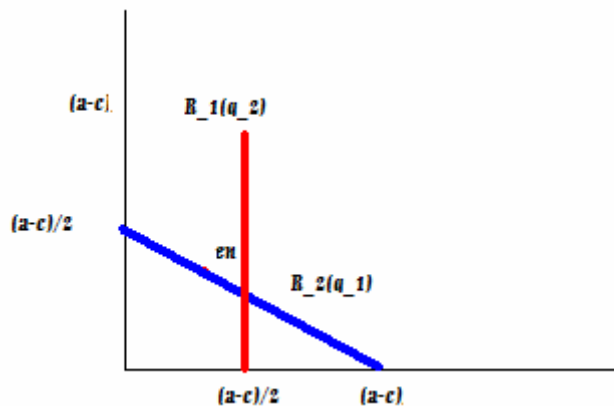
el que representa el EN bajo estrategias puras de este juego.

(c) En este caso las firmas compiten en cantidad, pero la dinámica del juego es distinta a Cournot, pues existe un líder (firma 1) y un seguidor (firma 2). Sabemos de Cournot (parte a) que la función de mejor respuesta de la seguidora (firma 2) será de la forma: $q_2^*(q_1) = \frac{1}{2}(a - c - q_1)$. Así, dado que la firma líder conoce la forma en la que reaccionará su seguidora internaliza esta información al momento de escoger su cantidad óptima de producción, por lo que el problema que ésta soluciona es:

$$\underset{q_1}{\text{Max}} \pi_1(q_1, q_2(q_1)) = \underset{q_1}{\text{Max}} q_1(a - c - q_1 - \{\frac{1}{2}(a - c - q_1)\})$$

Así, resolviendo lo anterior tenemos: $q_1^* = \frac{a - c}{2} \Rightarrow q_2^* = \frac{a - c}{4}$

Gráficamente se tiene:



(d) Al calcular las utilidades en cada uno de los escenarios anteriores se tiene:

$$\text{Bajo Cournot } \pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{a - c}{3}\right)^2$$

$$\text{Bajo Bertrand } \pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2$$

$$\text{Bajo Stackelberg } \pi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a - c}{2}\right)^2; \pi_2 = \left(\frac{a - c}{4}\right)^2$$

Luego podemos ver que en Stackelberg disminuyen las utilidades totales (suma de las utilidades de cada una de las firmas) respecto al caso Cournot, pero en este caso la firma 1 resulta estar mejor, aprovechando la información y el hecho de ser líder en el juego, mientras que la firma 2 está peor.

Problema 2

Dos empresas de detergentes para lavadoras automáticas luchan actualmente por el mercado. Por un lado se encuentra el detergente líquido Mariel, y por otro, el detergente en polvo Draiv. Ambas empresas tienen costos dados por las siguientes funciones:

$$C_m(q_m) = F_m + m \cdot q_m$$

$$C_d(q_d) = F_d + d \cdot q_d$$

Como en Chile la ropa está muy sucia, estas empresas enfrentan una gran demanda por detergente. Ésta viene dada por: $P(Q) = A - Q$ donde P es el precio que pagan los consumidores y Q es la cantidad de detergente demandado.

- Encuentre las cantidades de equilibrio según el modelo de Cournot.
- Suponga que $m = d$. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que sólo Mariel quede en el mercado?

Solución:

- Las utilidades de Mariel y Draiv son respectivamente:

$$\pi_m = (A - q_m - q_d)q_m - mq_m - F_m$$

$$\pi_d = (A - q_m - q_d)q_d - dq_d - F_d$$

Resolviendo ambos problemas de maximización encontramos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_m}{\partial q_m} = A - 2q_m - q_d - m = 0$$

$$\frac{\partial \pi_d}{\partial q_d} = A - 2q_d - q_m - d = 0$$

De cada condición podemos obtener una función de reacción que indica la producción óptima dada la producción de la competencia. El equilibrio se encuentra en la intersección (es lo mismo que despejar los q de las condiciones). Se obtienen las cantidades:

$$q_m = \frac{A - 2m + d}{3}$$

$$q_d = \frac{A - 2d + m}{3}$$

b) Veamos las utilidades:

$$p = A - q_m - q_d = \frac{A + m + d}{3}$$

$$\pi_m = \frac{(A - 2m + d)^2}{9} - F_m$$

$$\pi_d = \frac{(A - 2d + m)^2}{9} - F_d$$

Cuando $m = d$, las utilidades quedan:

$$\pi_m = \frac{(A - m)^2}{9} - F_m$$

$$\pi_d = \frac{(A - m)^2}{9} - F_d$$

Las condiciones para que sólo Mariel permanezca en el mercado son que su utilidad sea mayor que cero y que la utilidad de la competencia sea menor que cero:

$$F_m < \frac{(A - m)^2}{9} < F_d$$

Problema 3

Considere un mercado por un bien homogéneo con demanda dada por $P=1-Q$. Existen 3 empresas en este mercado, con costos marginales constantes e iguales a c . La empresa 1 es líder y decide cuánto producir antes que las otras. Conociendo q_1 , las empresas 2 y 3 deciden simultáneamente sus niveles de producción. Calcule la producción en equilibrio de cada firma.

Solución:

Las firmas 2 y 3 considerando la cantidad escogida por la firma líder resuelven un problema típico de Cournot, con lo que maximizan sus utilidades, la cuales están dadas por:

$$\pi_i(q_i, q_j, q_1) = (1 - c - \{q_i + q_j + q_1\})q_i \Rightarrow q_i^*(q_j, q_1) = \frac{1 - c - (q_j + q_1)}{2}$$

$$\Rightarrow q_2^*(q_3, q_1) = q_3^*(q_2, q_1) = \frac{1 - c - q_1}{3}$$

Luego, dado el comportamiento de las firmas 2 y 3, la firma líder escoge la cantidad que maximiza su utilidad, con lo que resuelve el siguiente problema:

$$\text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, q_2(q_1), q_3(q_1)) = (1 - c - \{q_1 + q_2(q_1) + q_3(q_1)\})q_1$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{1 - c}{2} \Rightarrow q_2^* = q_3^* = \frac{1 - c}{6}$$

Problema 4

Suponga una industria de un bien homogéneo en la que compiten dos firmas, 1 y 2. La demanda viene dada por $p = 2 - Q$, donde Q y p representan la cantidad total vendida y el precio, respectivamente. Sea q_i la cantidad vendida por cada firma. Sean R_i y π_i los ingresos y las utilidades de cada firma, respectivamente. El costo unitario de producción es $c = 1$. Las firmas compiten en cantidades. Los dueños de las empresas contratan gerentes y les ofrecen un esquema de bonos de compensación M_i , definidos como:

$$M_i = \mu_i[\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i)R_i] \quad \alpha_i, \mu_i \in [0, 1]$$

Este es un juego en dos etapas. En la primera, los empresarios eligen α_i, μ_i para maximizar sus utilidades. En la segunda etapa del juego, los gerentes eligen las cantidades a vender de manera de maximizar su ingreso. Las utilidades de las firmas (π_i) son el ingreso menos los costos. A los dueños les interesan las utilidades menos el pago a los gerentes.

1. Encuentre las funciones de reacción de las ventas de las compañías (segunda etapa).
2. Encuentre el equilibrio: precios, ventas y utilidades de cada firma.
3. Encuentre el valor óptimo de M_i para los dueños (primera etapa).
4. Usando el valor anterior, encuentre las funciones de reacción α_i de cada dueño y utilícelas para encontrar el equilibrio entre los dueños.
5. ¿Por qué es bueno para una firma el introducir un esquema en que se da un premio por ingreso, y no sólo por utilidades?

Solución

1. Cada gerente $i \quad i \in 1, 2$ resuelve

$$\max_{q_i} \mu_i[\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i)R_i]$$

esto es

$$\max_{q_i} \mu_i[\alpha_i(q_i(2 - q_i - q_j) - cq_i) + (1 - \alpha_i)q_i(2 - q_i - q_j)] \quad j \neq i$$

$$\max_{q_i} \mu_i[q_i(2 - q_i - q_j) - \alpha_i cq_i] \quad j \neq i$$

CPO:

$$\mu_i(2 - 2q_i - q_j - \alpha_i c) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = \frac{2 - q_j - \alpha_i c}{2} \quad (1)$$

2.

$$q_j = \frac{2 - q_i - \alpha_j c}{2} \Rightarrow q_i = 2 - 2q_j - \alpha_j c \quad (2)$$

Buscamos el equilibrio de Nash, igualando (1) y (2):

$$\frac{2 - q_j - \alpha_i c}{2} = 2 - 2q_j - \alpha_j c \Rightarrow q_j = \frac{2 - 2\alpha_j c + \alpha_i c}{3}, \quad q_i = \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3}$$

De aquí derivamos la demanda y las ganancias:

$$p = 2 - \frac{(4 - \alpha_j c - \alpha_i c)}{3} = \frac{2 + \alpha_j c + \alpha_i c}{3} \stackrel{c=1}{=} \frac{2 + \alpha_j + \alpha_i}{3}$$

$$\pi_i = \frac{2 + \alpha_j c + \alpha_i c}{3} \cdot \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3} - c \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3} = \frac{2 + c(\alpha_j + \alpha_i - 3)}{9} \cdot (2 - 2\alpha_i c + \alpha_j c)$$

$$\stackrel{c=1}{=} \frac{\alpha_j + \alpha_i - 1}{9} \cdot (2 - 2\alpha_i + \alpha_j)$$

3. Los dueños resuelven, sabiendo cómo actuarán los gerentes:

$$\max_{\alpha_i, \mu_i} \pi_i - \mu_i [\alpha_i \pi_i - (1 - \alpha_i) R_i]$$

$$\max_{\alpha_i, \mu_i} (1 - \mu_i) \underbrace{\frac{2 + \alpha_j + \alpha_i}{3} \cdot \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3}}_{p \cdot q} - (1 - \mu_i \alpha_i) \underbrace{\frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3}}_{cq}$$

$$\max_{\alpha_i, \mu_i} \frac{(1 - \mu_i)(2 + \alpha_j + \alpha_i) - (1 - \mu_i \alpha_i)3}{3} \cdot \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3}$$

$$\max_{\alpha_i, \mu_i} \frac{(\alpha_j + \alpha_i - 1) - \mu_i(2 - 2\alpha_i + \alpha_j)}{9} \cdot (2 - 2\alpha_i + \alpha_j)$$

Es decir M_i será tal que α_i, μ_i resuelven el problema de optimización anterior.

4. Como la función que maximizan los dueños es lineal en μ_i y se tiene que $(2 - 2\alpha_i + \alpha_j) = 3q_i \geq 0$, tendremos que los dueños elegirán $\mu_i = 0$ además, la CPO será:

$$\frac{1}{9}(2 - 2\alpha_i + \alpha_j) - 2 \frac{(\alpha_j + \alpha_i - 1)}{9} = 0 \quad (3)$$

De (3) tendremos:

$$\alpha_i = \frac{4 - \alpha_j}{4}$$

Luego,

$$\frac{4 - \alpha_j}{4} = 4 - 4\alpha_j \Rightarrow \alpha_j = \frac{4}{5} = \alpha_i$$

5. Las ganancias de las firmas en este caso serán:

$$\pi_i = \frac{(8/5 - 1)(2 - 4/5)}{9} = 0,6 * 1,2/9 = 0,08$$

es decir serán menores que en el caso de competencia Cournot. Sin embargo, este tipo de bonos hacen que el gerente quiera abarcar una mayor porción del mercado que lo que abarcaría si su sueldo fuera proporcional a las ganancias. Esto muchas veces es deseable para las empresas por diversas razones. Puede ser, por ejemplo que al tener una mayor porción del mercado tengan mayor poder de mercado, para negociar por ejemplo con los proveedores y así disminuir costos (lo cual no está modelado en este problema).

Ejercicio Extra:

Modelo de Salop:

Suponga una economía en la que:

- Los consumidores están ubicados uniformemente a lo largo de un círculo de circunferencia unitaria.
- Existen costos lineales de transporte: $t*d$, donde d = distancia y t = costos de transporte.
- Los consumidores demandan una unidad y reciben una utilidad equivalente a: $U - P - t*d$
- Todas las empresas tienen la misma tecnología. La función de costos está dada por:
 $C(q) = F + cq$

La dinámica del problema es la siguiente:

Primero, una firma cualquiera escoge si entrar y donde ubicarse. Luego, una vez dentro, se produce una competencia en precios entre las firmas participantes en el mercado.

Teniendo presente lo anterior, responda las siguientes preguntas:

- Suponiendo que entran N firmas y se ubican de manera equidistante, determine el equilibrio de precios simétrico del problema. Para ello encuentre la demanda de la firma i si ésta cobra p_i .
- Del equilibrio simétrico obtenido, exprese las utilidades de cada una de las firmas.
- Determine el número de equilibrio de firmas que participan de este mercado.

Solución:

(a)

- N firmas entran equidistantes. Por lo tanto, en el círculo hay una distancia de $1/N$ entre cada una de ellas.
- Equilibrio simétrico significa: $p_1 = p_2 = \dots = p_N$
- La firma i tiene sólo dos competidores, el de la izquierda y el de la derecha, que cobran p .

Para hallar la demanda de la firma i si cobra p_i es necesario notar que:

- La distancia entre dos empresas es igual a $1/N$ ya que hay N empresas equidistantes.

Supongamos que la empresa 2 y la empresa N cobran el mismo precio: p .

- Un consumidor ubicado a una distancia x entre la firma 1 y la firma 2 (o con la firma N) es indiferente entre las dos si:

$$U - p_1 - tx = U - p - t(1/N - x)$$

$$p - p_1 + t/N = 2tx$$

$$x = (p - p_1)/2t + 1/2N$$

- Como la empresa 1 tiene consumidores a su derecha e izquierda, la demanda para la firma 1 es:

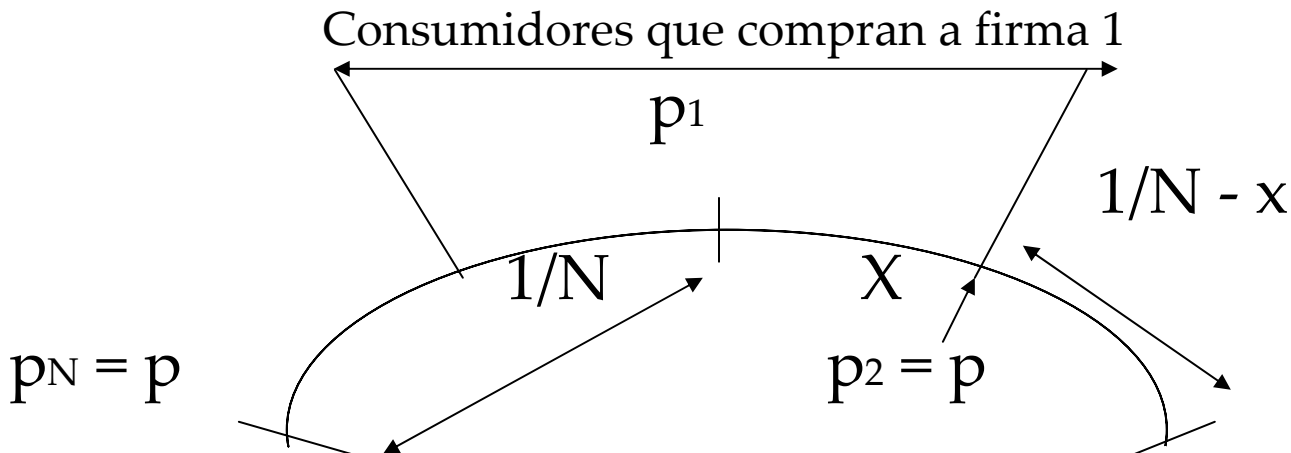
$$q_1(p_1, p) = 2x = (p - p_1)/t + 1/N$$

- Cada empresa se comporta como un monopolista en su propia marca, por lo que maximiza sus beneficios:

$$\max_{p_i} \pi_i = p_i q_i - (F + c q_i) = (p_i - c) q_i - F$$

$$\max_{p_i} \pi_i = (p_i - c) \left((p - p_i)/t + 1/N \right) - F$$

Lo anterior lo podemos ver en el siguiente gráfico:



Las condiciones de primer orden serán en este caso:

- Condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{p - 2p_i + c}{t} + \frac{1}{N} = 0$$

- En un equilibrio simétrico, $p = p_i$ y, por lo tanto,
 $(-p + c)/t + 1/N = 0 \rightarrow p = c + t/N$

(b) Dado que en un equilibrio simétrico todas las firmas cobran $p = c + t/N \rightarrow$ La demanda de cada firma es $1/N$. Así, los beneficios de cada firma serán :

$$\pi_i = (p_i - c) q_i - F = (p - c)(1/N) - F = t/N^2 - F$$

(c) Para hallar el número de equilibrio de firmas, bajo el supuesto de libre entrada, los beneficios se igualan a cero ie:

$$t/N^2 - F = 0 \rightarrow t/N^2 = F$$

$$N^s = \sqrt{t/F}$$

- Sustituyendo N^s en el precio $p = c + t/N$: $p^s = c + \sqrt{tF}$