UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Clase Auxiliar 4
Economía Industrial
Lunes 23 de Abril 2007

Profesores: Soledad Arellano, Nicolás Figueroa
Auxiliares: Carlos Ramírez, Ercos Valdivieso, Diego Vega.

Problema 1

Un próspero ex-alumno de IN51 decide dar "el gran paso" de la casa propia. Una vez diseñados los planos, debe contratar un jefe de obras, que se encargará de construir su casa. El ex-alumno sabe que los jefes de obra pueden ser de dos tipos: trabajadores (T) o flojos (F) con probabilidad p_T y p_F respectivamente, con $p_T + p_F = 1$. Los primeros son cuidadosos con los materiales de construcción y vigilan constantemente el trabajo de los obreros. Los jefes de obra flojos siguen la ley de mínimo esfuerzo, por lo que es más probable que la construcción sea deficiente, cara y tome más tiempo. La calidad de la obra (x_i) también depende de variables aleatorias ($i = 1; --; n$ representa los posibles estados de la naturaleza, por ejemplo, el clima).

Suponga que tanto el ex - alumno del IN51 como los potenciales jefes de obra son neutrales al riesgo. La utilidad del ex-alumno está dada por $U^C = B(e) - w$, donde $B(e)$ es el valor de la obra para el ex-alumno y w es la remuneración del jefe de obra. Se tiene que $B(e) = \sum_i p_i(e) \cdot x_i$ y $p_i(e) = \Pr(x = x_i|e)$. La utilidad del jefe de obra es $U^{JO} = u(w) - ke$ donde $k \in \{k_T, k_F\}$ con $k_T < k_F$. El nivel de utilidad de reserva de los jefes de obra está dado por U. El "juego" consiste en que i) la naturaleza elige al tipo (T, F) del jefe de obra, ii) el ex-alumno diseña el contrato en base a variables verificables (entre ellas el esfuerzo); y iii) el jefe de obra elige un contrato del menú de contratos. La calidad final de la construcción depende del esfuerzo puesto por el jefe de obras y del clima durante el periodo de construcción.

1. Suponga que el tipo del jefe de obras es observable. Escriba el problema que maximiza el ex-alumno.
2. Encuentre las condiciones de primer orden que debe resolver el ex-alumno e interprete los resultados.
3. En particular, compare los niveles de esfuerzo exigidos a cada tipo de jefe de obra y la remuneración que reciben.
4. Suponga que el tipo del jefe de obra no es observable y plantee el problema de optimización que enfrenta el ex-alumno.
5. Encuentre las condiciones de primer orden que resuelve el ex-alumno en este caso e interprete los resultados. En particular, compare los niveles de esfuerzo exigidos a cada tipo de jefe de obra y la remuneración que reciben y vea cuales son las restricciones activas y por qué.

Solución

1. Si el ex-alumno sabe el tipo del jefe de obras resuelve:

$$\max_{e_i, w_i} B(e_i) - w_i$$

$$\text{sa} \qquad u(w_i) - k_i e_i \geq U \qquad i \in F, T$$

2. Por las características del problema se tendrá:

$$u(w_i) - k_i e_i = U \tag{1}$$

$$L = B(e_i) - w + \lambda(u(w_i) - k_i e_i) - U$$

CPO

$$B'(e_i) - k_i\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{B'(e_i)}{k_i}$$

$$-1 + \lambda u'(w_i) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{u'(w_i)}$$

Igualando ambas ecuaciones se tiene:

$$B'(e_i) = \frac{k_i}{u'(w_i)} \qquad i \in T, F \tag{2}$$

Esta condición significa que la tasa marginal de sustitución entre esfuerzo y salario es igual al efecto marginal del esfuerzo sobre las utilidades.

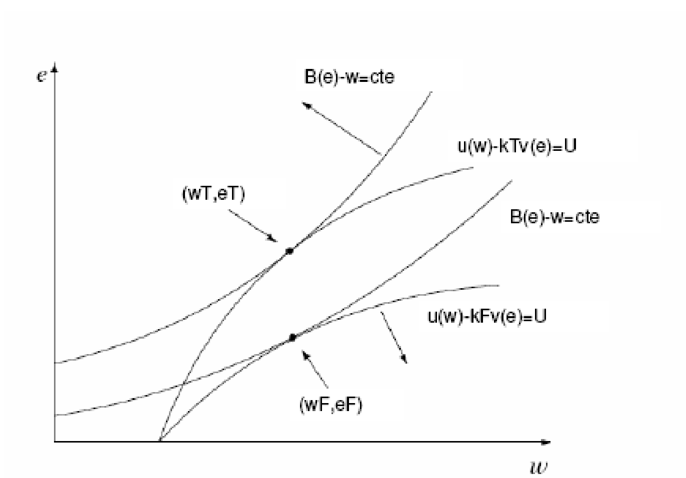
3. Veamos que $e_T > e_F$. De (1) se tiene que $w_t = (u)^{-1}(k_T e_T + U)$ reemplazando en (2) se tendrá que

$$\underbrace{B'(e_T)}_{\text{decreciente en } e_T} \cdot \underbrace{u'(\underbrace{(u)^{-1}(k_T e_T + U)}_{\text{creciente en } e_T})}_{\text{decreciente en } e_T} = k_T$$

Luego como $k_T < k_F$ se debe tener forzosamente que $e_T > e_F$.

En cuanto a los salarios, no necesariamente el salario del trabajador será mayor que el del flojo. Esto se puede ver en la Figura 1

Figura 1: Contratos del jefe de obras flojo y el trabajador



4. El alumno resueve

$$\max_{e_T, e_F, w_T, w_F} p_T[B(e_T) - w_T] + p_F[B(e_F) - w_F]$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \qquad u(w_T) - k_T e_T &\geq U & (3)\\ u(w_F) - k_F e_F &\geq U & (4)\\ u(w_T) - k_T e_T &\geq u(w_F) - k_T e_F & (5)\\ u(w_F) - k_F e_F &\geq u(w_T) - k_F e_T & (6) \end{aligned}$$

5. Notemos primero que (3) se cumple siempre (luego no se incluye en el lagrangiano), pues

$$u(w_T) - k_T e_T \geq u(w_F) - k_T e_F \geq u(w_F) - k_F e_F \geq U$$

$$L = p_T[B(e_T) - w_T] + p_F[B(e_F) - W_F] + \lambda(u(w_F) - k_F e_F - U) +$$
$$\mu(u(w_T) - k_T e_T - u(w_F) - k_T e_F) + \delta(u(w_F) - k_F e_F - u(w_T) - k_F e_T)$$

CPO

$$\begin{aligned} \mu - \delta &= \frac{p_T}{u'(w_T)} & (7)\\ \lambda - \mu - \delta &= \frac{p_F}{u'(w_F)} & (8)\\ \mu k_T - \delta k_F &= p_T B'(e_T) & (9)\\ p_F B'(e_F) &= \lambda k_F + \delta k_F - \mu k_T & (10) \end{aligned}$$

De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{p_F}{u'(w_F)} + \frac{p_T}{u'(w_T)} & (11)\\ \lambda &= \frac{p_F B'(e_F) + p_T B'(e_T)}{k_F} & (12) \end{aligned}$$

$\mu = 0 \Rightarrow \delta < 0$ y esto no puede ser por **KKT**. Luego $\mu \neq 0$ y (5) es activa.

Por otro lado, de (5) y (6) se tiene que

$$k_T e_T - k_T e_F \overset{*}{\leq} u(w_T) - u(w_F) \overset{**}{\leq} k_F e_T - k_F e_F$$

luego $k_T < k_F \Rightarrow e_T \geq e_F$.

Además $e_T \neq e_F$ porque o si no

$$u(w_T) - u(w_F) = 0 \Rightarrow w_T = w_F \quad \overset{\text{de (11) y (12)}}{\Rightarrow} \quad \lambda = \frac{1}{u'(w)} = \frac{B'(e)}{k_F}$$

Reemplazando en (7) y (9)

$$\mu = \frac{p_T}{u'(w_T)} + \delta = p_T \lambda + \delta$$

$$\mu = \frac{p_T B'(e_T) + \delta k_F}{k_T} = \frac{k_F}{k_T}(\lambda p_T + \delta)$$

lo cual es una contradicción si $k_T < k_F$ pues sabemos que $\mu \neq 0$.

Por último, se tiene que * y ** no pueden ser ambas activas, y como * es activa, ** no lo será, y $\delta = 0$. Como (5) no es activa, (3) no es activa y se tiene que el jefe de obras trabajador obtiene una renta informacional.

Problema 2

Considere un monopolio que produce dos bienes. La demanda por el bien 1 depende sólo de su precio, pero la demanda por el bien 2 cae con las ventas del bien 1. Los costos de producción del bien 1 dependen sólo de su producción, pero los costos del bien 2 aumentan con la producción del bien 1. La forma funcional de la demanda es:

$$p_1 = f(q_1)$$
$$p_2 = g(q_1, q_2)$$

Y la forma funcional de los costos es:

$$c_1 = c(q_1)$$
$$c_2 = c(q_1 + q_2)$$

$a)$ Encuentre las condiciones de primer orden para el monopolio e interprete sus resultados.

$b)$ Considere ahora, las siguientes formas funcionales específicas y resuelva en forma explícita para obtener la utilidad del monopolio.

Demanda	Costos
$p_1 = a - bq_1$	$c_1 = cq_1$
$p_2 = a - b(q_1 + q_2)$	$c_2 = c(q_1 + q_2)$

$c)$ Al comparar los beneficios que obtendrían dos monopolios maximizando independientemente, ¿qué esperaría obtener?

Respuesta:

a)

$$\partial_{q_q} L = 0 \rightarrow f_{q_q} * q_1 + p_1 + \partial_{q_q} g * q_2 = c_{1q_q} + \partial_{q_q} c_2$$
$$\partial_{q_2} L = 0 \rightarrow p_2 + \partial_{q_2} g * q_2 = \partial_{q_2} c_2$$

Es decir, la cantidad óptima de producción de cada uno de los bienes es tal que su ingreso marginal (beneficio marginal) equipara al costo marginal.

b)

Reemplazando las funciones en las condiciones anteriores se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} q_1^* &= \frac{a-3c}{3b} \\ q_2^* &= \frac{a}{3b} \end{aligned}\right\} \rightarrow \pi = p_1(q_1^*)q_1^* + p_2(q_1^*, q_2^*)q_2^* - c_1(q_1^*) - c_2(q_1^*, q_2^*)$$

c)

Se espera que dado que los monopolios maximizan en forma independiente, los excedentes totales sean menores en ese caso que al presentado en la parte anterior, ya que el monopolio multiproducto considera los efectos de un producto en la demanda del otro.

Problema 3

Suponga que hay dos períodos: $t = 1$ (*ex ante*) y $t = 2$ (*ex post*). En el período 2, un proveedor y un comprador deciden si intercambiar una unidad de un bien indivisible (por ejemplo, un proyecto). De este modo, el volumen de intercambio es 0 ó 1. El valor del bien para el comprador es v y el costo de producirlo para el proveedor es c (con $c<1/2$).

En el período 1, el proveedor invierte, afectando la calidad del producto (es decir, el valor para el comprador). El valor *ex post* para el comprador es $v(I) = 3I - \frac{I^2}{2}$. Por lo tanto v es observable por el comprador, pero no verificable por un tribunal, por lo que no se puede especificar en un contrato.

a) Determine la cantidad eficiente de inversión.

b) Si las partes negocian *ex post* de modo que el excedente de intercambio se lo dividen equitativamente, ¿es óptima la inversión resultante? Identifique la externalidad.

c) Si las partes firman un contrato en que se especifica que el comprador posee el derecho a comprar el precio a un determinado precio p, ¿es eficiente este contrato? ¿Qué ocurriría si el proveedor poseyera el derecho a vender a un determinado precio?.

d) ¿Qué ocurriría si el proveedor poseyera el derecho a escoger el precio *ex post*?

Solución

a) La cantidad eficiente de inversión viene dada por la maximización del excedente total, es decir, se resuelve

$$\max_I ExT. = Ex_c + Ex_p = v(I) - p + p - c - I = 3I - \frac{I^2}{2} - c - I \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial Exc.}{\partial I} = 3 - I - 1 = 0 \Longrightarrow I = 2 \tag{4.2}$$

Por lo tanto, la cantidad eficiente de inversión es $I = 2$.

b) La negociación *ex post* implica que se reparten el excedente de <u>intercambio</u> equitativamente

$$v(I) - p = p - c \tag{4.3}$$

$$p = \frac{v(I) + c}{2}$$

Ex ante, el proveedor resuelve

$$\max_I \frac{v(I) + c}{2} - c - I \tag{4.4}$$

La condición de primer orden es $3/2 - I/2 - 1 = 0$, de donde $I = 1$, lo que es sub-óptimo $(1 < 2)$.

c) si el comprador tiene el derecho a comprar al precio p, el proveedor no invertirá o invertirá la cantidad mínima a la que el comprador compraría, es decir, tal que $v(I) = p$.

- Si $p = 4$, la inversión es igual a 2 (inversión óptima), pues el proveedor se apodera de todo el beneficio que genera.[1]
- Si $p < 4$, la inversión es sub-óptima o inexistente.

Si el proveedor posee el derecho a vender a un determinado precio la inversión es nula, pues su beneficio se maximiza (dado un p) minimizando el gasto (I).

d) Si el proveedor posee el derecho a escoger el precio, se tendría la inversión eficiente. Esto pues el EPS del juego es que $p = v(I)$.