Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: C.Araya, J.Gacitua, L.Reus, R.Wolf

Solución Auxiliar 10

Martes 24 de Abril de 2007

1. Como los clientes llegan según un proceso poisson homogéneo, se tiene la propiedad de incrementos independientes, la que sostiene que la probabilidad de vender el numero esperado por el gerente luego del segundo día es independiente de lo que haya vendido anteriormente. Luego el gerente no está en lo cierto.

2.

$$\begin{aligned} P[N_A(6)=k|N_T(6)=M] &= \frac{P[N_A(6)=k \wedge N_T(6)=M]}{P[N_T(6)=M]} \\ &= \frac{P[N_A(6)=k]\cdot P[N_B(6)=M-k]}{\frac{((\lambda_A+\lambda_B)\cdot 6)^M\cdot e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot 6}}{M!}} \\ &= \frac{\frac{(\lambda_A\cdot 6)^k\cdot e^{-\lambda_A\cdot 6}}{k!}\cdot\frac{(\lambda_B\cdot 6)^{M-k}\cdot e^{-\lambda_B\cdot 6}}{(M-k)!}}{\frac{((\lambda_A+\lambda_B)\cdot 6)^M\cdot e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot 6}}{M!}} \\ &= \binom{M}{k}\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A+\lambda_B}\right)^{M-k} \end{aligned}$$

También era posible argumentar a priori que condicionado al número de eventos, estos se distribuyen uniformemente en las 6 horas. Así, bastaba ver que la probabilidad de que k fueran Tipo A, corresponde a las distintas configuraciones de dichos eventos en las 6 horas.

3. a) Para ello necesito que hayan llegando k clientes de tipo B antes del Q_A-1 cliente de tipo A y luego que llegue el último cliente de tipo A. La probabilidad b de que un cliente de tipo B llegue antes que uno de tipo A equivale a $\frac{\lambda_B}{\lambda_A+\lambda_B}$. Como las k llegadas de clientes tipo B pueden tener distinto orden dentro de las Q_A-1 llegadas de clientes tipo A, lo pedido es:

$$\rho_k = \binom{Q_A-1+k}{k} b^k\cdot(1-b)^{Q_A-1}\cdot(1-b)$$

b) Debo sumar (unir) los valores de k, lo que queda:

$$\sum_{k=1}^{Q_B-1}\rho_k$$

4.

$$\begin{aligned} E[\text{Ingresos}] &= E[\text{Ingresos Clientes A}]+E[\text{Ingresos Clientes B}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Ingresos Clientes A}|N_A(T)=k]\cdot\frac{(\lambda_A)^k e^{-\lambda_A}}{k!} \\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Ingresos Clientes B}|N_B(T)=k]\cdot\frac{(\lambda_B)^k e^{-\lambda_B}}{k!} \end{aligned}$$

Para ingresos clientes tipo A: Si $k \leq Q_A$:

$$E[\text{Ingresos Clase A}|N_A(T) = k] = C \cdot k$$

Si $k > Q_A$:

$$E[\text{Ingresos Clase A}|N_A(T) = k] = C \cdot Q_A$$

Para ingresos clientes tipo B: Si $k \leq Q_B$:

$$E[\text{Ingresos Clase B}|N_B(T) = k] = \sum_{i=1}^{k} \cdot B_i$$

Si $k > Q_B$:

$$E[\text{Ingresos Clase B}|N_B(T) = k] = \sum_{i=1}^{Q_B} \cdot B_i$$

En esta solución, $N_A(t)$ y $N_B(t)$ son definidos como el número de personas (de tipo A y B resp.) que han llegado a la tienda en t y no como el número de personas que se llevan la camisa en t.

5. Llamemos $P[n]$ a la probabilidad de que hayan n clientes en la fila justo al finalizar la atención del cliente tipo A. Condicionando en la duración de la atención de este cliente, se tiene:

$$P[n] = \int_0^{\infty} P[n|atención\ dura\ t]\mu e^{-t\mu} dt$$

Además, ya que hay 1 cliente esperando, para que hayan n clientes en la fila al finalizar la atención, deben llegar $n-1$ clientes durante la misma. Así:

$$P[n|atención\ dura\ t] = \frac{e^{-t(\lambda_A+\lambda_B)}(t(\lambda_A+\lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P[n] &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\lambda_A+\lambda_B)}(t(\lambda_A+\lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!} \mu e^{-t\mu} dt \\ &= \frac{(\lambda_A+\lambda_B)^{n-1}\mu}{(\lambda_A+\lambda_B+\mu)^n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\lambda_A+\lambda_B+\mu)}(\lambda_A+\lambda_B+\mu)^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= \frac{(\lambda_A+\lambda_B)^{n-1}\mu}{(\lambda_A+\lambda_B+\mu)^n} \end{aligned}$$

Ya que dentro de la integral queda la densidad de una distribución gamma de parámetros n y $\lambda_A + \lambda_B + \mu$.

6. Sea t_i el instante de la llegada del i-ésimo cliente antes de que la promotora entregue los obsequios. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i)]$

Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$
\begin{aligned}
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)/N(t)=n]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)} t/N(t)=n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} E[t/N(t)=n] - \sum_{i=1}^{N(t)} E[t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}
$$

En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t]=t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0,t]$ cuya esperanza es $E[t_i]=\frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t)=n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[nt-\frac{nt}{2}\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}
$$