



## Auxiliar 16: Markov Tiempo Continuo

Martes 4 de Junio de 2007

### Problema 1, Control 3 Otoño 2005

Los vecinos de un barrio capitalino están muy preocupados porque en la esquina donde se encuentran las calles A y B se están produciendo demasiados accidentes. Dada esta situación han solicitado a las autoridades que implementen un plan de control del tránsito para disminuir los siniestros en este sector.

Para ello se ha dispuesto que un carabinero controlará el tránsito en dicha esquina. Este carabinero tiene la capacidad de controlar el tránsito que circula por sólo una de las calles. Independientemente de cuál de ellas se trate, el carabinero permanecerá controlando la misma calle durante un tiempo exponencialmente distribuido con media  $1/\varphi$  [horas], si no se registra ninguna infracción en esa calle durante ese tiempo y pasará a controlar la otra calle.

Si el carabinero detecta un infractor, lo detiene y emite un parte. En esta tarea, ocupa un tiempo exponencialmente distribuido con media  $1/\lambda$  [horas] y durante este tiempo deja de controlar el tránsito. Luego de emitir el parte, el carabinero puede comunicarse con la central y reportar los últimos partes que ha emitido o bien, continuar controlando el tránsito.

La mitad de las veces que emite un parte realiza el reporte, lo que le lleva un tiempo exponencialmente distribuido de media  $1/\delta$  [horas] durante el cual no puede controlar el tránsito. La mitad restante, sigue controlando el tránsito, eligiendo equiprobablemente la calle a vigilar.

Una vez que termina de realizar un reporte, continua controlando el tránsito, eligiendo equiprobablemente la calle que vigilará.

La llegada de infractores a la esquina por cualquiera de las dos calles puede ser modelado como un proceso de Poisson de tasa  $\mu$  [infractores/hora]. Además, lo que sucede en una de las calles es independiente de lo que sucede en la otra. Considere que el carabinero siempre detecta las infracciones que se producen en la calle que está controlando y nunca las que se producen en una calle que no esté controlando en el momento de la infracción.

1. (1,5 ptos.) Justifique por qué las actividades que realiza el carabinero se pueden modelar como un cadena de Markov en tiempo continuo. Plantee dicha cadena. Especifique claramente los estados y las tasas de transición.
2. (1,0 pto.) Considere la cadena propuesta en el punto anterior. ¿Esta cadena admite probabilidades estacionarias?  
En caso afirmativo, justifique. En caso contrario, plantee qué condiciones adicionales se deben satisfacer para que la cadena admita probabilidades estacionarias.
3. (1,0 pto.) Plantee un sistema de ecuaciones que permitan calcular las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 1.
4. (1,5 ptos.) Suponga que el carabinero acaba de terminar de enviar un reporte. ¿Cuál es la probabilidad que en los próximos 15 minutos ( $1/4$  hora), detecte *al menos* a un infractor?

A continuación considere que se cumplen las condiciones de estado estacionario y que las probabilidades estacionarias de la cadena son conocidas.

5. (0,5 ptos.) En promedio, ¿cuántos partes emite el carabinero por hora?
6. (0,5 ptos.) Suponga que usted llega a la esquina en un momento  $t$  cualquiera en el “largo plazo”:
  - ¿Cuál es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en ese instante  $t$ ?
  - ¿Cuál es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en el instante  $t + 3$ ?

## Problema 2, Control 3 Primavera 2004

Un grupo no despreciable de dueñas de casa se han volcado por completo a la práctica del chateo, en particular la señora de nuestro amigo, Jorge Ramírez, quien se ha visto imposibilitado de dedicar todo su tiempo a su actividad favorita, bajar MP3s. Ocioso, dada su nueva disponibilidad horaria, nuestro amigo ha investigado cómo funciona este sistema de comunicación.

Jorge ha podido inferir que su señora envía mensajes a sus contactos de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  mensajes por minuto. Además, en un notable trabajo empírico, Jorge ha observado que el largo de estos mensajes (en número de caracteres) puede ser modelado como una variable aleatoria (continua) de distribución exponencial de media  $\mu$  [caracteres].

Jorge sabe que, dada las características de su conexión a Internet, la información de los mensajes se transmite a una tasa constante de  $T$ [caracteres/minuto]. Además considera que el tiempo que su señora demora en escribir un mensaje es despreciable (independiente de su largo) y que los mensajes no comienzan a ser transmitidos sino hasta que terminan de ser escritos. Cuando un mensaje es enviado para su transmisión y encuentra que aun existen mensajes enviados previamente que no han sido completamente transmitidos, esperará en cola.

1. (0.5 puntos) ¿Cómo se distribuye el tiempo de envío de un mensaje?
2. (2.5 puntos) Modele el estado de espera de mensajes a ser transmitidos como una cadena de Markov en tiempo continuo. Clasifique este modelo como uno de los estudiados en cátedra.
3. (1.5 puntos) Si tras horas de chateo el computador se apaga debido a un corte de energía eléctrica, ¿cuántos caracteres no logran transmitirse siendo que fueron enviados como parte de un mensaje completo?

Silvia, la señora de nuestro amigo se ha quejado constantemente con Jorge debido a un extraño mensaje que aparece tras horas y horas de chateo. El mensaje dice “ERROR FATAL: INFORMACION A TRANSMITIR SOBREPASA CAPACIDAD DE CACHE”. Jorge, que ha configurado el cache con una capacidad de varios Gigabytes, sabe que o su señora escribe demasiado, o que debe cambiar de proveedor de internet.

Considere que Jorge decide entonces contratar un nuevo servicio de “BANDA ANCHA”. Este servicio asegura que cada mensaje empieza a ser transmitido inmediatamente luego de ser enviados, a una tasa de transferencia constante de  $T$ [caracteres/minuto]. Es decir, varios mensajes pueden estar siendo transmitidos simultáneamente, cada uno de ellos a tasa  $T$ [caracteres/minuto].

4. (1.0 puntos) En esta nueva situación, ¿qué cantidad promedio de mensajes habría en cache? ¿qué fracción del tiempo el cache pasaría desocupado?
5. (0.5 puntos) Clasifique el nuevo modelo como uno de los estudiados en el curso.

### Problema 3, Control 3 Otoño 2004

El Metro de Santiago lo ha contratado a ud. para analizar la situación de la estación Universidad de Chile que es una de las más concurridas por los usuarios. En particular le interesa analizar el servicio desde dicha estación hasta la Estación Terminal San Pablo.

A la estación en estudio llegan trenes de dos tipos. Los trenes tipo 1 realizan el servicio hasta la Estación Terminal San Pablo, mientras que los tipo 2 llegan sólo hasta Las Rejas. El tiempo entre arribos de los trenes a la estación Universidad de Chile son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , respectivamente. Por otro lado la capacidad disponible de todos los trenes de ambos tipos se supone constante e igual a  $R$  pasajeros. Las personas que requieren viajar hacia el poniente de la capital, llegan a la estación bajo estudio según un Proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ [pasajeros/hora]. Una vez que un pasajero entra, se ubica en una cola única con acceso directo al andén. Se sabe que el destino de un fracción  $p$  de los pasajeros es una estación entre la estación Moneda y Las Rejas, por lo que independiente del tren que llegue intentarán abordarlo. Por otro lado una fracción  $1 - p$  de los usuarios se dirige a una estación posterior a Las Rejas, por lo que sólo tomarán los trenes que lleguen hasta el terminal.

Los pasajeros que desean viajar en un tren determinado comenzarán a subir respetando el orden de llegada y la capacidad disponible. Por otra parte, los usuarios que deciden no tomar el tren y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente. Finalmente suponga que el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un tren es despreciable, y que la estación Universidad de Chile tiene una capacidad ilimitada para pasajeros esperando.

1. (0.5 pts) Si en un instante del tiempo hay  $k$  personas esperando en la estación y llega un tren tipo 2, ¿cuál es la probabilidad de que  $i$  personas tengan intenciones de abordar el tren?. Denote a esta probabilidad  $\beta_{ik}$ . ¿Cuál es la probabilidad de que a lo menos  $i$  personas tengan intenciones de abordar el tren?. Denote a esta probabilidad  $\beta_{ik}^+$ . ( $0 \leq i \leq k$ )
2. (2.5 pts) Modele la cantidad total de personas esperando en la estación Universidad de Chile como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles y las tasas involucradas, en función de los parámetros del problema y de las probabilidades  $\beta_{ik}$  y  $\beta_{ik}^+$ . Generalice estados para los casos particulares que estime convenientes.
3. Suponga que la cadena anterior admite régimen estacionario y que usted conoce el vector  $\Pi$ . Entregue expresiones para:
  - a) (1.0 pts) La tasa efectiva de arribo de personas a los trenes.
  - b) (1.0 pts) El tiempo promedio de espera de los pasajeros que ingresan a la estación, hasta abordar el tren que lo llevará a su destino.
  - c) (1.0 pts) La esperanza de la cantidad de trenes que en un hora salen llenos de la estación Universidad de Chile.

