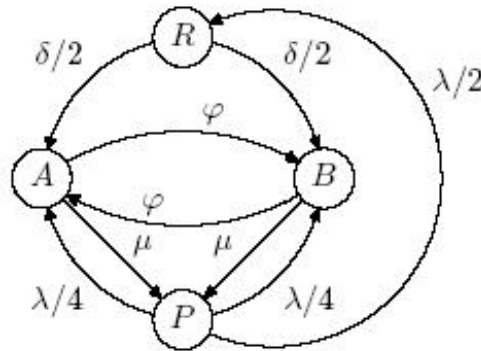




Solución Auxiliar 12: Procesos de Poisson y Cadena Markov Martes 8 de Mayo de 2007

Problema 1, Control 3 Otoño 2005

- En la figura se muestra la cadena. El estado P corresponde al cuando está emitiendo un parte, el estado R a cuando está haciendo el reporte y los estados A, B , a cuando está controlando las calles.



- La cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias ya que es finita e irreducible.
- Éstas se pueden calcular resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}(\mu + \varphi) \pi_A &= \frac{\lambda}{4} \pi_P + \frac{\delta}{2} \pi_R + \varphi \pi_B \\ \lambda \pi_P &= \mu \pi_A + \mu \pi_B \\ \delta \pi_R &= \frac{\lambda}{2} \pi_P \\ \pi_P + \pi_R + \pi_A + \pi_B &= 1\end{aligned}$$

- Para contestar esta pregunta, consideremos el proceso de llegada de infractores a la esquina por cualquiera de ambas calles. Este proceso es la suma de dos procesos de Poisson independientes de tasa μ . Por lo tanto, es un proceso de Poisson de tasa 2μ .

Por el procedimiento descrito, el carabinero estará observando una de las dos calles hasta que detecte a un infractor. No debería ser difícil ver (usando las probabilidades estacionarias y el hecho que las calles son independiente y se comportan de la misma manera) que, cuando un infractor llega a la esquina, la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle por la que llega es $1/2$.

De esta manera, el proceso de los infractores que serían detectados si el carabinero sólo controlara el tránsito es un proceso de Poisson de tasa μ .

Entonces, el próximo parte que emitirá el carabinero corresponde a la llegada del primero de estos infractores. Por lo tanto, si llamamos a este proceso $N(t)$ lo que queremos saber es:

$$P(N(1/4) \geq 1) = 1 - P(N(1/4) = 0) = 1 - e^{-t\mu/4}$$

5. Esto es la tasa “efectiva” de entrada al estado P: $\mu(\pi_A + \pi_B)$.
6. En ambos casos, se pregunta por la probabilidad estacionaria en el estado A: π_A .

Problema 2, Control 3 Primavera 2004

1. Como el largo de un mensaje es una *v.a.* exponencial de media μ caracteres y cada caracter se demora $\frac{1}{T}$ [minutos] en ser enviado, se tiene que el tiempo que demora un mensaje en ser enviado se distribuye exponencial de media $\frac{\mu}{T}$ [minutos].
2. Esta cadena representa la situación descrita, en que los estados indican el número de mensajes en espera.

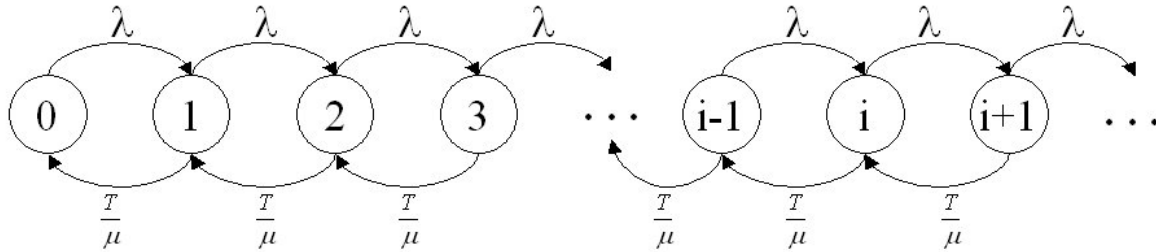


Figura 1: Espera de mensajes Transmitidos

Es claro que este sistema corresponde a una cola del tipo $M/M/1$, con un sólo servidor, capacidad infinita, llegadas exponenciales de tasa λ [mensajes/minuto] y tiempo de atención (salida) exponenciales de media $\frac{\mu}{T}$ [minutos].

3. Se deben considerar tanto los mensajes que están esperando para ser transmitidos como aquel que ha sido interrumpido y no alcanzó a enviarse completamente. Como el largo de los mensajes sigue una distribución exponencial el largo de la fracción de mensaje que no alcanzó a ser enviada sigue la misma distribución que el largo de un mensaje completa cualquiera (pérdida de memoria de la exponencial) luego, si habían i mensajes en cola al interrumpirse la transmisión, el valor esperado del número de mensajes caracteres que no alcanzaron a ser enviados corresponde a $\mu \cdot (i + 1)$ ya que debe considerarse la fracción que no alcanzó a ser enviada del mensaje que se estaba transmitiendo.

De esta forma en número esperado de caracteres que no se logra enviar si después de mucho tiempo se corta la energía es

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu \cdot (i + 1) \cdot \pi_i$$

4. La nueva situación se puede representar por la siguiente cadena

La cantidad de mensajes dentro del sistema se puede obtener mediante la ecuación de Little. Como este sistema corresponde a una cola $M/M/\infty$ tenemos que la tasa efectiva de llegada corresponde a λ y que el tiempo esperado dentro del sistema corresponde al tiempo esperado de atención $W = \frac{\mu}{T}$, luego

$$L = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \frac{\mu}{T} = \frac{\lambda\mu}{T}$$

La fracción de tiempo que el caché pasará desocupado corresponde a π_0 .

Utilizando la conocida relación $\pi_i = \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot \pi_0$ se tiene

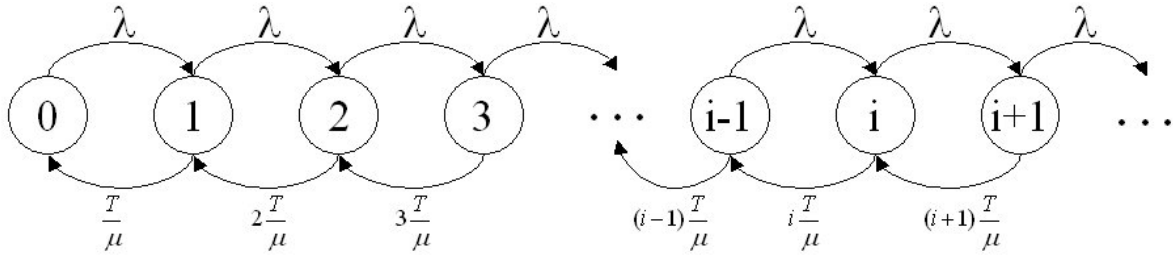


Figura 2: Mensajes en el sistema de transmisión

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{(\frac{T}{\mu})^i \cdot i!} \cdot \pi_0$$

luego

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^i}{T^i \cdot i!} \cdot \pi_0 = 1$$

$$\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^i}{T^i \cdot i!} = \pi_0 \cdot e^{\frac{\lambda\mu}{T}} = 1$$

$$\pi_0 = e^{-\frac{\lambda\mu}{T}}$$

5. Este sistema claramente corresponde a una cola del tipo $M/M/\infty$, es decir, con infinitos servidores, capacidad infinita, llegadas exponenciales de tasa λ [mensajes/minuto] y tiempo de atención (salida) exponenciales de media $\frac{\mu}{T}$ [minutos].

Problema 3, Control 3 Otoño 2004

1. Para que un pasajero quiera abordar un tren tipo 2, su destino debe ser entre la estación Moneda y las Rejas, lo cual ocurre con probabilidad p . Luego:

$$\beta_{i,k} = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \quad \forall 0 \leq i \leq k$$

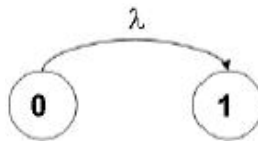
Además:

$$\beta_{i,k}^+ = \sum_{m=i}^k \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m} \quad \forall 0 \leq i \leq k$$

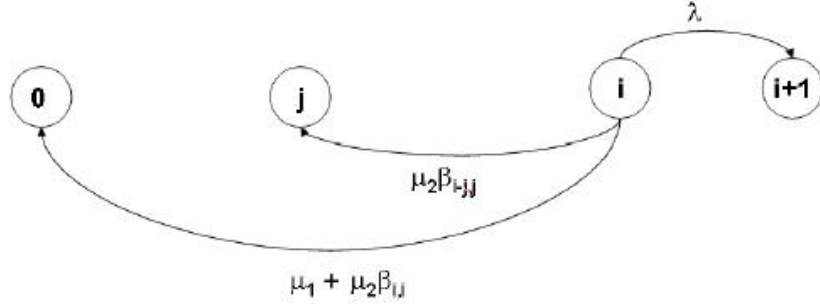
2. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación definida en la parte 1.

Para modelar la cantidad de personas en la estación como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:

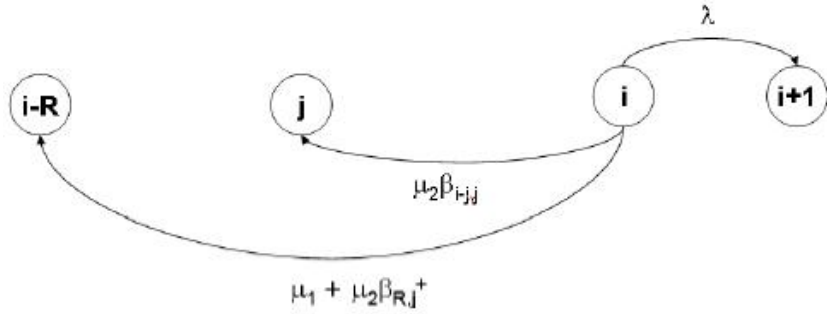
Caso 1: $i = 0$



Caso 2: $i \leq R, 0 \leq j \leq i$.



Caso 3: $R < i, i - R < j \leq i$.



3. a) La tasa efectiva de arribo de pasajeros a los trenes está dada por:

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{R-1} \pi_i \cdot i \cdot \mu_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(R-1, i)} \pi_i \cdot j \cdot (\mu_2\beta_{j,i}) + \sum_{i=R}^{\infty} \pi_i \cdot R \cdot (\mu_1 + \mu_2\beta_{R,i}^+)$$

Dado que existe régimen estacionario, la tasa efectiva de salida de pasajeros de la estación es igual a la de entrada, por lo que un resultado equivalente al anterior y más directo de obtener decir directamente que la tasa pedida es igual a λ .

- b) Podemos calcular la cantidad promedio de personas en el sistema y luego usando Little se obtiene el tiempo de espera. Esto es:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i \implies W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i}{\lambda}$$

- c) La cantidad de trenes que salen llenos en una hora está dado por:

$$E[\text{trenes llenos}] = \pi_R(\mu_1 + \mu_2\beta_{R,R}) + \sum_{i>R}^{\infty} \pi_i(\mu_1 + \mu_2\beta_{R,i}^+)$$