



Auxiliar 17: Colas, Procesos de Nacimiento y Muerte

Miercoles 6 de Junio de 2007

Problema 1, Control 3 Primavera 2002

Un ex-subsecretario de transportes de un país muy lejano, llamado Tom Bollinery, es el encargado de recibir propuestas para una licitación de Plantas de Revisión Técnica en una ciudad al sur del país, llamada Arrankawua. Sobre su escritorio caben un número indeterminado de sobres con propuestas, los que llegan según un proceso de Poisson de tasa λ propuestas por hora. Sin embargo la licitación está arreglada de antemano, la cual previo pago de algunas comisiones será ganada por un amigo de Tom Bollinery, por lo que el ex-subsecretario ni siquiera mira las propuestas que le llegan, sino que simplemente a intervalos de tiempo exponencialmente distribuidos de tasa μ , toma todos los sobres que encuentre sobre su escritorio y los bota a la basura.

1. (1,5 pts) Modele la cantidad de sobres con propuestas, sobre la mesa del subsecretario Bollinery como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario.
2. (1,0 pts) ¿Cuánto tiempo estará una propuesta sobre el escritorio del subsecretario?. ¿Cuál es el promedio de propuestas en el escritorio del subsecretario en el largo plazo?.

Considere que como era de esperar la licitación fue adjudicada al amigo de Tom Bollinery, el cual lo ha contratado a ud. para estudiar el sistema de espera de la Planta de Revisión Técnica. La planta consta de dos estaciones idénticas, que funcionan en paralelo que pueden ser modeladas como colas M/M/1/3. Esto es las llegadas son según un proceso de Poisson de tasa λ autos por hora, las atenciones son exponenciales de media $\frac{1}{\mu}$ horas, y la capacidad de cada estación es de 3 autos incluyendo al que se está sirviendo. Cuando un cliente llega se ubica en la estación que tenga menos autos y frente a empates, SIEMPRE prefieren la estación 1. Además los clientes que se encuentran al *final de cada fila*, se cambian instantáneamente a la cola de la otra estación si es que al cambiarse el número de autos que quedan delante de él es menor que el actual.

3. (2,0 pts) Modele el estado de ocupación de cada estación de la Planta de Revisión Técnica en una única Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Encuentre la condición sobre las tasas para que exista régimen estacionario.
4. (1,5 pts) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, entregue expresiones para :
 - a) La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar al sistema porque no hay capacidad disponible.
 - b) El número promedio de autos esperando por atención en toda la Planta.
 - c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto que logra ingresar a la planta.

Problema 2, CTP 8 Primavera 2002

A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable

aleatoria de distribución exponencial de parámetro $\lambda(1/\text{min})$. Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}(\text{min})$.

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

1. (2,0 puntos) Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.
2. (2,0 puntos) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.
3. En función de las probabilidades estacionarias responda:
 - a) (0,5 puntos) El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.
 - b) (0,5 puntos) La probabilidad de que exista igual número de parejas baliando y sentadas en un instante cualquiera.
 - c) (1,0 puntos) La tasa media de ingreso de parejas a la pista.
 - d) (1,0 puntos) La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.

Problema 3

Consideramos un ascensor el cual es capaz de trasladar a 2 personas como maximo. El edificio tiene 2 pisos, y el tiempo que tarda en subir al segundo piso se distribuye exponencialmente con parámetro μ . La gente que necesita subir llega segun un proceso de Poisson de tasa λ , y se forma en una cola. Considere que el tiempo que el ascensor tarda en bajar es despreciable.

1. Modele el sistema como una cadena de Markov en Tiempo continuo. *Hint: defina como estados el numero de gente en cola.*
2. Intuitivamente, que condición debe cumplirse para que hayan probabilidades estacionarias? Calcúlelas.
3. Calcule la tasa en el cual los usuarios viajan solos.
4. ¿Cuanta gente hay en la cola en promedio? ¿Cuánto tiempo tarda una persona en la cola?