

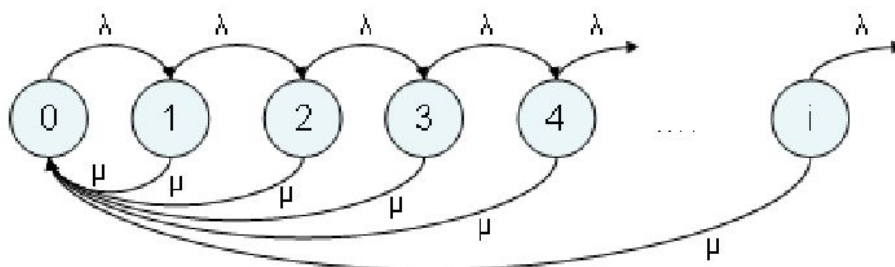


## Solución Auxiliar 17

Miercoles 6 de Junio de 2007

### Problema 1

- Definiendo los estados como el número de ofertas que tiene Tom Bollinery sobre su escritorio en un instante cualquiera, la cadena queda como sigue:



En esta situación, lo único que hay que imponer para que exista régimen estacionario es que  $\mu > 0$ , porque siempre eventualmente el sistema se vaciará.

Aplicando conservación de flujo se tiene que las ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias son :

$$\lambda \cdot \pi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot \mu \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \pi_i = \pi_{i-1} \cdot \lambda \quad \forall i \geq 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (3)$$

De la ecuacion (3) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = (1 - \pi_0)$$

reemplazando en (1) :

$$\lambda \cdot \pi_0 = (1 - \pi_0) \cdot \mu \implies \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Reemplazando  $\pi_0$  en la ecuación (2) se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

Finalmente:

$$\pi_i = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

2. El tiempo promedio que permanece una propuesta en el escritorio es :  $\frac{1}{\mu}$ .  
El número promedio de propuestas en el escritorio es :

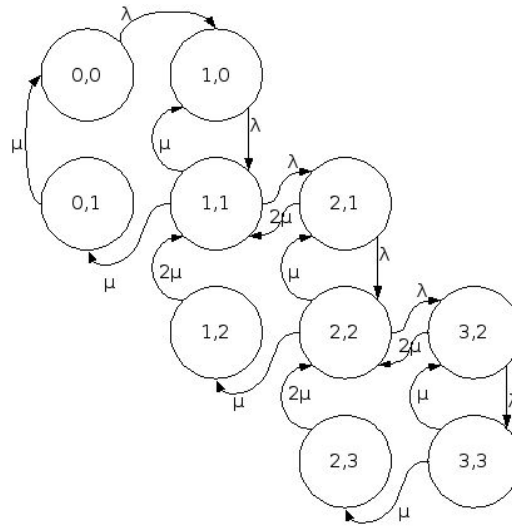
$$L_{propuestas} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i$$

Usando la serie :  $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$

se obtiene finalmente:

$$L_{propuestas} = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)}{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)\right)^2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Definiendo los estados como un par ordenado, en que la primera componente es el numero de autos en la estación 1 y la segunda componente como el número de autos en la estación 2, la cadena queda como sigue:



4. La cadena es finita y todos los estados están comunicados, por lo que tiene probabilidades estacionarias y no hay necesidad de imponer condición alguna sobre las tasas .

- a) La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar a la planta es :  $\pi_{3,3}$   
b) El número promedio de autos en espera, en la planta esta dado por:

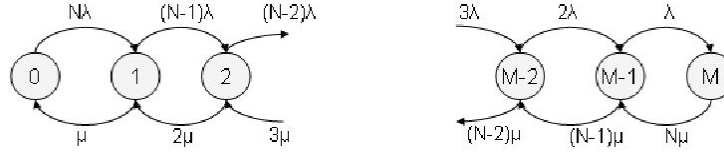
$$L_q = 1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}$$

- c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto antes de ser atendido, está dado por la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}}{\lambda \cdot (1 - \pi_{3,3})}$$

## Problema 2

1. Siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante es la siguiente:



Tenemos un proceso de nacimiento y muerte, cuyas tasas dependen del estado. Las tasas de incremento son de la forma  $\lambda(M - i)$  cuando hay  $i$  parejas bailando, porque hay  $M-i$  parejas sentadas dispuestas a entrar, cada una tardando un tiempo exponencial de media  $\lambda$  en decidirse. El mismo argumento explica la tasa de disminución de parejas en la pista.

2. En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias.

Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las formulas de los procesos de nacimiento y muerte. Planteamos las ecuaciones:

$$\pi_0 M \lambda = \pi_1 \mu \quad (4)$$

$$\pi_i (\mu i + (M - i) \lambda) = \pi_{i+1} \mu (i - 1) + \pi_{i-1} (M - i + 1) \lambda \quad \forall i = 1 \dots M - 1 \quad (5)$$

$$\pi_M M \mu = \pi_{M-1} \lambda \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^M \pi_i = 1 \quad (7)$$

Resolviendo el sistema se llega a

$$\pi_i = \frac{M \cdot (M - 1) \cdot (M - 2) \dots (M - i + 1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0$$

$$\pi_i = \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0 = 1$$

Se reconoce el binomio  $(1 + \frac{\lambda}{\mu})^M$  por lo tanto

$$\pi_0 = \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^M$$

$$\pi_i = \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^M$$

Entonces:

$$\pi_i = \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros  $(M, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$

3. El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

4. Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] &= \pi_{\frac{M}{2}} \\ &= \binom{M}{\frac{M}{2}} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{\frac{M}{2}} \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

5. La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned} Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot (M - i) \lambda \\ &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{M-i} \cdot (M - i) \lambda \\ &= M \lambda - M \lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ &= M \lambda \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right) \end{aligned}$$

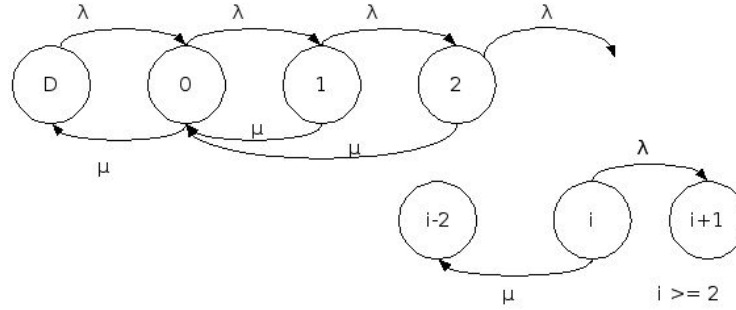
6. La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned} Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot i \cdot \mu \\ &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\ &= M \mu \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right) \end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no no existiría estado estacionario.

### Problema 3

1. Los estados son el número de personas en la cola para el ascensor. Se agrega un estado adicional, llamado "D" el cual significa que el ascensor está *desocupado* y sin personas en la cola. El estado 0 indica que el ascensor está *ocupado*, y sin personas en la cola. El diagrama sería el siguiente:



2. Las probabilidades estacionarias existirán si nos aseguramos que el sistema no "explote" y la cantidad de gente no tienda a infinito. Esto se cumplirá en general si la tasa de atención supera a la de llegada. Para  $i \geq 2$  tenemos una tasa  $\mu$  de atención, y una tasa  $\lambda$  de llegada, sin embargo, por cada atención se desocupan 2 personas de la cola. Por esto, no se pide la relación clásica  $\mu > \lambda$ , sino que pediríamos  $2\mu > \lambda$ . Le exijimos menos a la tasa de atención porque sus atenciones "valen el doble".

Por calcular las probabilidades estacionarias,

$$\lambda\pi_D = \mu\pi_0 \quad (8)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_0 = \lambda\pi_D + \mu\pi_1 + \mu\pi_2 \quad (9)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{i+2} \quad \forall i \geq 1 \quad (10)$$

$$\pi_D + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \quad (11)$$

Para  $i \geq 1$  Se propone una solución de la forma  $\pi_i = \alpha^i \pi_0$ . Aplicandola a la ecuación (10).

$$\begin{aligned} \lambda\alpha^{i-1}\pi_0 + \mu\alpha^{i+2}\pi_0 &= (\lambda + \mu)\alpha^i\pi_0 \\ \lambda + \mu\alpha^3 &= (\lambda + \mu)\alpha \end{aligned}$$

Resolviendo para  $\alpha$  se obtienen 3 valores,  $\left(\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\mu}}}{2} \quad \alpha_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\mu}}}{2}\right)$

La única solución que tiene sentido para el problema es  $\alpha_3$ , porque se tiene que cumplir  $\pi_i > 0$  y además intuitivamente no se puede dar el valor  $\alpha_1 = 1$  para resolver  $\pi_i$ , nos daría que todas las probabilidades estacionarias son iguales.

Ocupando este resultado, mas las ecuaciones (8) y (11),

$$\begin{aligned} \pi_0 + \frac{\mu}{\lambda}\pi_0 + \pi_0 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i &= 1 \\ \pi_0 \left( \frac{\mu}{\lambda} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \right) &= 1 \\ \pi_0 \left( \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{1 - \alpha} \right) &= 1 \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)} \\ \pi_D &= \frac{\mu(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)} \\ \pi_i &= \frac{\alpha^i \lambda(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Debe cumplirse la condición  $\alpha < 1$  para que las probabilidades estacionarias sean decrecientes en  $i$  y efectivamente sumen 1. Esto nos lleva a la siguiente condición necesaria,

$$\begin{aligned}\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\mu}}}{2} &< 1 \\ \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\mu}} &< 3 \\ \frac{4\lambda}{\mu} &< 8 \\ \lambda &< 2\mu\end{aligned}$$

lo cual era la condición que planteamos en la parte 2 para que exista estado estacionario.

Dudas y/o errores:  
Jaime Gacitúa C.  
jgacitua@ing.uchile.cl