



Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: Pablo Rey, Rafael Epstein

Aux : Christian Araya, Jaime Gacitúa, Lorenzo Reus, Rodrigo Wolf.

Pauta Clase Auxiliar 20 de Abril, 2007

## Problema 1

- Supongamos que se decide colocar  $N$  camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en  $t=0$  (7:00 am) y termina en  $t=T$  (7:00am del día siguiente). De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más } N \text{ pacientes graves}] = \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde  $\lambda_1$  es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un  $N^*$  tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N | N \in \{0, 1, \dots\} \wedge \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0,95 \right\}$$

- El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llegó. Si llegó antes de  $t = 5$  (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llegó después de las  $t = 5$  sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llegó en el instante  $X$  ( $0 \leq X \leq 60$ ) Entonces:

$$P[\text{Muerto} | \text{Llego en } X] = 1_{X \leq t=5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de Poisson hasta un instante  $t$  se distribuyen uniformemente entre 0 y  $T$ . Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1 \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

- Esto es básicamente la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde  $\lambda_2$  es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que buscamos, P, es:

$$\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}\right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l}\right)^5$$

4. Por la pérdida de memoria de la exponencial el mundo “comienza” cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de Poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en sí un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_g + \lambda_l$ , y por lo tanto Y, el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_g + \lambda_l$ . Entonces el tiempo máximo,  $T^*$ , de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0,95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{\ln(0,95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

## Problema 2

1. Sea T = el tiempo que falta para que el próximo auto cruce.

$$\begin{aligned} P[\text{Pasar de inmediato}] &= P[\text{Primer auto demora más que } \tau] \\ &= P[T > \tau] \\ &= 1 - F(\tau) \\ &= e^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

2. Derivaremos esta densidad a partir de la distribución acumulada. Nos piden:

$$P[T < t | T < \tau] = \frac{P[T < t \wedge T < \tau]}{P[T < \tau]}$$

Donde

$$P[T < t \wedge T < \tau] = \begin{cases} P[T < t] & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Entonces:

$$P[T < t | T < \tau] = \begin{cases} \frac{P[T < t]}{P[T < \tau]} & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$F_x = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda \tau}} & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Entonces:

$$f_x = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda \tau}} & t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases}$$

Esto implica que  $C = \frac{1}{1 - e^{-\lambda \tau}}$

3. La distribución de W es la misma que la de  $W_2$  (Pérdida de memoria, procesos independientes).

4.

$$\begin{aligned} E(W) &= E[W|T \geq \tau] \cdot P[T \geq \tau] + E[W|T < \tau] \cdot P[T < \tau] \\ &= 0 + (E[X] + E[W]) \cdot P[t < \tau] \end{aligned}$$

Se puede verificar que:

$$E[X] = C \int_0^\tau x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{1 - e^{-\lambda \tau}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda \tau}(\lambda \tau + 1))$$

Entonces:

$$E[W] = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda \tau}} \cdot (1 - e^{-\lambda \tau}(\lambda \tau + 1))$$