



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa  
Profs: Pablo Rey, Rafael Epstein  
Aux : Christian Araya, Jaime Gacitúa, Lorenzo Reus, Rodrigo Wolf.

Pauta Auxiliar 3 de Abril, 2007

## Problema 1

### 1. a) MODELO DETERMINÍSTICO

#### Variable de estado:

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

#### Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de } n \text{ años,} \end{cases}$$

#### Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

#### Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

### b) MODELO ESTOCÁSTICO

#### Variable de estado

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

**Variable de decisión:**

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

**Variable aleatoria**

$$w_t(S_t) = \begin{cases} 1 & \text{máquina buena al final del período } t, \text{ si es de antigüedad } S_t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde la probabilidad  $P[w_t(S_t) = 1] = (1 - q_{S_t+1})$

**Función de beneficio:**

$$E[f_t(S_t, X_t)] = \begin{cases} C_{S_t} + (1 - q_{S_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(S_t + 1) + q_{S_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)\right) \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + (1 - q_{X_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(X_t + 1) + q_{X_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)\right) \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} E[f_t(S_t, X_t)]$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo esperado de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

**Condiciones de borde y función objetivo**

Hay que notar que el valor residual ya no es tan claro, porque si la máquina se hecha a perder justo al final del último período NO necesitamos reemplazarla, así se tendrá:

$$E[f_T(S_T, X_T)] = \begin{cases} C_{S_T} + (1 - q_{S_T+1}) \cdot -V_{S_T+1} \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_T} + I_{X_T} - V_{S_T} + (1 - q_{X_T+1}) \cdot -V_{X_T+1} \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_1 = \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + \mathbb{E}_{w_1} [f_2^*(X_1 + 1)] \right\}$$

## Problema 2

- a) El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

▪ **Etapas:**

- Cada uno de los meses del horizonte de planificación).

▪ **Variables de estado:**

$S_i$  = Número de productos disponibles al inicio del mes i

$\hat{S}_i$  = Número de productos que llegaran el proximo més debido a atraso de ordenes

▪ **Variables de decisión:**

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$x_i$  = Número de productos que ordeno para el próximo mes

▪ **Variable aleatoria:**

$p = P[\text{Una orden se retrase un mes}]$

$q = P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}]$

▪ **Función de beneficio acumulado (incorpora recursión):**

- Etapa T+1:

$$V_{T+1}^*(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

- Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) = & \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \left[ P \cdot \min\{S_i, n\} - i \cdot \max\{n - S_i, 0\} \right. \\ & + (1-p) \cdot [V_{i+1}^*(\min\{L, S_i - \min\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i, 0\})] \\ & \left. + p \cdot [V_{i+1}^*(\min\{L, S_i - \min\{S_i, n\} + \hat{S}_i, X_i\})] \right] \\ & - K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

Donde:

$$V_i^*(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \leq x_i \leq L, y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

- Condiciones de borde:

$$S_1 = S$$

$$\hat{S}_1 = 0$$

b) En este caso se debería incluir una variable de estado que nos indicase cuantos clientes se dejaron insatisfechos en el período anterior. De esta forma, para un período dado y condicionando sobre la demanda realizada, se puede tener el número de clientes insatisfechos durante el período. Con estas cifras se puede calcular la probabilidad de que el número de clientes insatisfechos dos meses continuos sea j, y por lo tanto, se podría modelar la situación e incluir los cambios las leyes de probabilidades de las demandas período a período.

c) Dados estos datos la solución es la siguiente<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>i denota infactibilidad y d denota solución dominada

- Período 3:

$S_3$	$\hat{S}_3$	$X_3 = 0$	$X_3 = 1$	$X_3 = 2$	$V_3^*$	$X_3^*$
0	—	0	−15	−20	0	0
1	—	11,25	−3,75	−8,75	11,25	0
2	—	23	8	3	23	0

- Período 2:

$S_2$	$\hat{S}_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$	$V_2^*$	$X_2^*$
0	0	0	−6	−1,6	0	0
0	1	11,25	5,65	$d$	11,25	0
0	2	23	$d$	$d$	23	0
1	0	14,0625	8,1625	10,2125	14,0625	0
1	1	25,4375	17,4875	$d$	25,4375	0
1	2	34,25	$d$	$d$	34,25	0
2	0	26,375	18,325	15,675	26,375	0
2	1	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$
2	2	$i$	$i$	$i$	$i$	$i$

- Período 1:

$S_1$	$\hat{S}_1$	$X_1 = 0$	$X_1 = 1$	$X_1 = 2$	$V_1^*$	$X_1^*$
1	0	14,7656	12,9218	17,5125	17,5125	2

Dudas y/o errores:  
Christian Araya M.  
charaya@ing.uchile.cl