Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R.Epstein, P.Rey
Aux : J.Gacitúa, L.Reus, R.Wolf

Solución CTP 1
20 de Marzo, 2007

Problema 1

1. Si X_n corresponde al número de personas que se suben si hay n personas entonces $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2. (0.7 ptos.) Si X corresponde al número de personas que se suben y N el número de personas esperando

$$P(X=k) = \sum_{i \geq k}^{\infty} P(X=k|N=i)P(N=i) = \sum_{i \geq k}^{\infty} P(X_i = k)P(N=i) = \sum_{i \geq k}^{\infty} \binom{i}{k} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^i}{i!}$$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} E(X|N=i)P(N=i)$$

donde $E(X|N=i) = ip$ es la esperanza de una binomial. Luego
$E(X) = p\lambda$

3. (1.5 ptos.) La distribución es una geométrica de parámetro p. Luego:

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kT * P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} kTp(1-p)^{k-1} = \frac{T}{p}$$

Problema 2

1. (1 pto.) T_{Min} se distribuye como $exp(\sum_{k=0}^{N} \lambda_k)$ Luego:

$$P(T_{Min} > 30) = \exp(-30 \sum_{k=0}^{N} \lambda_k)$$

Dada la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial, la información entregada (estar parado 20 minutos) no altera la probabilidad de viajar por la misma cantidad de tiempo.

2. (0.75 ptos.) Sea A el evento de que el auto llega antes de R minutos. Sea T_i el tiempo de viaje del i-ésimo trayecto y T_a el tiempo de viaje de un automóvil. Lo que se pide es $E(Utilidad|A)$.

$$p = P(T_i < T_a | T_a < R) = \frac{P(T_i < T_a \wedge T_a < R)}{P(T_a < R)} = \frac{1}{P(T_a < R)} \int_0^b P(T_i < T_a \wedge T_a < R | T_a = t) f_U dT_a$$

Ahora:

$$P(T_i < T_a \wedge T_a < R | T_a = t) = P(T_i < t \wedge t < R) = \begin{cases} P(T_i < t) = (1 - \exp(-\lambda_i t)) & \text{Si } t < R \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego:

$$p = \frac{1}{P(T_a < R)} \int_0^R (1 - \exp(-\lambda_i t)) \frac{dt}{b} + \frac{1}{P(T_a < R)} \int_R^b 0 \frac{dt}{b} = 1 - \frac{1 - exp(-\lambda_i R)}{R\lambda_i}$$

$$q = P(T_i > R | T_a < R) = P(T_i > R) = \exp(-\lambda_i R)$$

Con esto:

$$E(Utilidad|A) = pB - qC$$

3. (0.75 ptos.)

$$E(Utilidad|A^c) = \overline{p}B + (1 - \overline{p} - \overline{q})(B - C) - \overline{q}C$$

Donde:

$$\overline{p} = P(T_i < R | T_a > R) = P(T_i < R) = 1 - \exp(-\lambda_i R)$$

$$\overline{q} = P(T_i > T_a | T_a > R) = \frac{P(T_i > T_a \wedge T_a > R)}{P(T_a > R)} = \frac{1}{P(T_a > R)} \int_0^b P(T_i > T_a \wedge T_a > R | T_a = t) f_U dT_a$$

Ahora:

$$P(T_i > T_a \wedge T_a > R | T_a = t) = P(T_i > t \wedge t > R) = \begin{cases} P(T_i > t) = \exp(-\lambda_i t) & \text{Si } t > R \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Luego:

$$\overline{q} = \frac{1}{P(T_a > R)} \int_0^R 0 \frac{dt}{b} + \frac{1}{P(T_a > R)} \int_R^b \exp(-\lambda_i t) \frac{dt}{b} = \frac{exp(-\lambda_i R) - exp(-\lambda_i b)}{(b - R)\lambda_i}$$

4. (1 pto.)

$$E(Utilidad) = E(Utilidad|A)P(A) + E(Utilidad|A^c)P(A^c) = [pB - qC]\frac{R}{b} + [B\overline{p} + (1 - \overline{p} - \overline{q})(B - C) - \overline{q}C](1 - \frac{R}{b})$$