Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F. Bravo, F. Castro, L.Reus, G.Romero, R.Wolf

Solucion Clase Auxilliar 2, 13 de Marzo de 2007

Repaso Probabilidades

Problema 1, CTP 1 Otoño 2005

1. (a) Sean X_i v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ, con $i \in \{1,...,n\}$ Encontrando una expresión equivalente a que el máximo sea menor que t y usando la independencia de las v.a. se tiene que:
$$\begin{aligned} P[X = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\} < t] &= (P[X_1 < t] \cdot P[X_2 < t] ... \cdot P[X_n < t]) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n \end{aligned}$$

   (b) Para encontrar la densidad, simplemente derivamos la función de distribución encontrada en la parte anterior:
$$f_{Max(X_1,...,X_n)}(t) = n(\lambda e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$$

   En lo que sigue, sean T_{pat} el tiempo que la patrulla demora en llegar al cajero y X_i el tiempo al que el $i-$ésimo asaltante llega al cajero.
   (c) Esto se obtiene directo de que el tiempo en que la patrulla llega al cajero distribuye según una v.a. exponencial de parámetro μ:
   Si $t \geq 0$:
$$P(T_{pat} < t) = \int_0^t \mu e^{-\mu y} dy = 1 - e^{-\mu t}$$

   Si $t < 0$ (caso no relevante para el problema), el resultado es cero.

   (d) Necesitamos encontrar la probabilidad de que la patrulla demore menos que el último de los asaltantes, i.e., la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro μ sea menor que el máximo de n v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ. De las partes anteriores, se concluye que:
   $P[T_{pat} < Max(X_1, ..., X_n)|\text{n secuaces asisten a reunión}] = \int_0^\infty (\int_0^t \mu e^{-\mu y} dy) f_{Max(X_1,...,X_n)}(t) dt$
   $= \int_0^\infty [1 - e^{-\mu t}] \cdot [n(\lambda e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}] dt$

2. Debemos calcular la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro μ sea menor que el mínimo de n v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro λ, cuya distribución sabemos es una exponencial de parámetro $n\lambda$. Utilizando un resultado conocido:
$$P[T_{pat} < Min(X_1, ..., X_n)|\text{n secuaces asisten a reunión}] = \frac{\mu}{\mu + n\lambda}$$

3. Notemos que el número n de secuaces que llega a la reunión distribuye según una binomial de parámetros (n, p).
   En esta parte nos piden la utilidad esperada de la patrulla como expresión general. Condicionaremos al número n de secuaces que llegan a la reunión, ponderamos por la probabilidad respectiva, usamos las partes anteriores y sumamos en todo el dominio posible para n:

$$
\begin{aligned}
E[\text{Utilidades}] &= \textstyle\sum_{n=1}^{M} E[\text{Utilidades}|\text{llegan n secuaces}] \cdot P(\text{llegan n secuaces}) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{M} [P_2 \cdot B + P_1 \cdot R - (1-P_1) \cdot C] \cdot [Mnp^n(1-p)^{M-n}]
\end{aligned}
$$

(Notar que en las partes anteriores habíamos trabajado para un n fijo, por lo que P_1 y P_2 dependen de ese n. Alternativamente, alguien puede haber reemplazado los P_1 y P_2 obtenidos, pero para efectos de correción la expresión anterior es suficiente).

4. Necesitamos calcular la probabilidad de que Don King demore menos tiempo que el primero de los secuaces de Jack en llegar al cajero. Esto es, que una uniforme de parámetros $(0, b)$ sea menor que una exponencial de parámetro $(n\lambda)$. Calculamos:

$$\text{P(v.a. } U_{(0,b)} < \text{v.a. exp } (n\lambda)) = \textstyle\int_0^b (\int_0^t \frac{1}{b} dy)(n\lambda e^{-n\lambda t})dt + \int_b^\infty (1) \cdot (n\lambda e^{-n\lambda t})dt = \frac{1}{bn\lambda}(1 - e^{-n\lambda b})$$

Para que Jack retome sus estudios, necesitamos que esa probabilidad sea mayor que $\frac{1}{2}$.
Luego, la condición para b es que satisfaga la siguiente inecuación:

$$\tfrac{1}{n\lambda}(1 - e^{-n\lambda b}) > \tfrac{b}{2}$$

Lo anterior es suficiente para efectos de corrección. Para mayor rigurosidad, se puede justificar la existencia de tal b por como construimos la expresión (también podemos tomar como ejemplo el caso $b = \frac{1}{n\lambda}$, que sí cumple la inecuación, etc...)

5. **(Bonus)** Llamemos x al número de secuaces que Jack envía al cajero. Planteamos un problema que optimice su función de utilidad:

$$\text{Max } U(x)_{\{x \in N, x \leq M\}} = K \cdot x - \tfrac{x^2}{4}$$

Para resolver, notemos primero que para x real, podemos derivar la función anterior e igualarla a cero. Esta ecuación tiene solución:

$$x^* = 2K$$

De las condiciones del problema ($K \in N, K < \frac{M}{2}$), sabemos que este número sí es factible para el problema de optimización de Jack, por lo que hemos encontrado el óptimo (alternativamente se podría haber justificado notando que la función toma la forma de una parábola, evaluar en el vértice -que es natural positivo- y en los dos vecinos para concluir).

Ahora, sólo nos resta calcular la probabilidad pedida:

$$\text{P(número de secuaces en reunión} \geq x^*) = \textstyle\sum_{j=x^*}^{M} Mjp^j(1-p)^{M-j}$$

Problema 2, CTP 1 Primavera 2003

1. El tiempo que transcurre desde que empieza la campaña hasta que un votante recibe el folleto de un candidato dado, son variables aleatorias exponenciales de parámetro λ_T y λ_L, respectivamente. Luego para conocer la distribucíon del tiempo que transcurre hasta que recibe el primero de los folletos, debemos conocer la distribución del mínimo de 2 exponenciales. Entonces, dado que la distribución del minimo entre 2 exponenciales es una exponencial de la suma de las tasas, se tiene que el tiempo pedido sigue una EXP$(\lambda_T + \lambda_L)$.

Por otro lado la probabilidad de que reciba primero el folleto de Tribellín queda determinado por la competencia entre estas mismas dos variables exponenciales. Es decir:

$$P(T1) = P(\textsf{Tpo. de entrega de Tribellín} < \textsf{Tpo. de entrega de Labím}) = \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L}$$

2. La probabilidad de que un habitante es particular vote por Tribellín, depende del orden en que este votante recibió los folletos informativos. Por esto para calcular p_t se debe condicionar sobre dicho evento. Sean los siguientes sucesos:

   VT = Votar por Tribellín
   T1 = Votante recibió primero el folleto de Tribellín
   L1 = Votante recibió primero el folleto de Labím

   Luego la probabilidad pedida es:

   $$P(\mathsf{VT}) = P(\mathsf{VT}|\mathsf{T1}) \cdot P(\mathsf{T1}) + P(\mathsf{VT}|\mathsf{L1}) \cdot P(\mathsf{L1})$$

   Del enunciado se sabe que:

   $$P(\mathsf{VT}|\mathsf{T1}) = q_1$$
   $$P(\mathsf{VT}|\mathsf{L1}) = q_2$$

   Además el tiempo que transcurre desde que empieza la campaña hasta que un votante recibe el folleto de un candidato dado, son variables aleatorias exponenciales de parámetro λ_T y λ_L, respectivamente. Es por esto, que la probabilidad de que reciba primero el de Tribellín queda determinado por la competencia entre estas dos variables exponenciales. Es decir:

   $$P(T1) = P(\text{Tpo. de entrega de Tribellín} < \text{Tpo. de entrega de Labím}) = \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L}$$

   De lo anterior:

   $$P(L1) = 1 - P(T1) = \frac{\lambda_L}{\lambda_T + \lambda_L}$$

   Finalmente se tiene que:

   $$p_t = P(\mathsf{VT}) = q_1 \cdot \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L} + q_2 \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_T + \lambda_L} = \frac{1}{\lambda_T + \lambda_L} \cdot (q_1 \cdot \lambda_T + q_2 \cdot \lambda_L)$$

3. La cantidad de votos (X) que recibirá Tribellín sigue una distribución Binomial de parámetros N y p_t, es decir:

   $$P(X = k) = Nkp_t^k(1 - p_t)^{N-k}$$

   donde p_t es la probabilidad calculada en la parte 1. Además la esperanza de una variable aleatoria Binomial de parámetros N y p está dado por $N \cdot p$, por lo tanto:

   $$E(X) = N \cdot p_t$$

4. Dado que la cantidad de votantes (N) es un número impar, la cantidad de votos suficiente para ganar la elección es $\frac{N+1}{2}$. Dado lo anterior y la probabilidad calculada en la parte 3, se tiene que:

$$P(\text{ganar}) = \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N} P(X=k) = \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

$$P(\text{perder}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

5. Para calcular la probabilidad de que Tribellín gane la elección por m votos de diferencia definamos las siguientes variables.

   $X_t =$ Cantidad de votos para Tribellín
   $X_l =$ Cantidad de votos para Labím

   Para que Tribellín gane por m votos se tiene que satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

   - La suma de los votos de ambos candidatos debe ser igual a N.

   $$X_t + X_l = N$$

   - La diferencia entre los votos de Tribellín y los de Labím deber ser igual a m.

   $$X_t - X_l \geq m$$

   Resolviendo el sistema anterior se tiene que la cantidad de votos que debe obtener Tribellín para ganar por una diferencia de m votos es $X_t = \frac{N+m}{2}$. Dado que esta cantidad toma un valor fraccional cuando m es par, lo correcto es $X_t = \lceil \frac{N+m}{2} \rceil$ Finalmente se tiene que:

$$P(\textsf{Tribellín gane por m o más votos}) = P(X_t \geq \lceil \frac{N+m}{2} \rceil) = \sum_{k=\lceil \frac{N+m}{2} \rceil}^{N} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

donde $1 \leq m \leq N$.

Para calcular la probabilidad que Labím obtenga más del doble la votación de su opositor, se debe resolver el siguiente sistema:

- La suma de los votos de ambos candidatos debe ser igual a N.

$$X_t + X_l = N$$

- La cantidad de votos de Labím deber ser mayor o igual al doble de los de Tribellín.

$$X_l \geq 2 \cdot X_t$$

Resolviendo el sistema anterior se tiene que la cantidad de votos que debe obtener Tribellín para que su opositor obtenga más del doble de su votación es $X_t \leq \frac{N}{3}$. Dado que esta cantidad puede tomar un valor fraccional, lo correcto es $X_t \leq \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$. Luego la probabilidad pedida es:

$$P(X_t \leq \lfloor \frac{N}{3} \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

6. El valor esperado de los beneficios para el comando de Tribellín está dado por:

$$E[\textsf{Utilidades}] = E[\textsf{U(Ganar)}] - E[\textsf{U(Perder)}] - E[\textsf{Costo Folletos}]$$

Utilizando las partes anteriores y los datos del enunciado se tiene que:

- Para calcular la esperanza de la utilidad de ganar, debemos tomar en cuenta tanto los ingresos por ganar, como también por obtener una diferencia de votos con respecto a Labím. Esto es:

$$E[\textsf{U(Ganar)}] = W_1 \cdot \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} + W_m \cdot \sum_{k=\lceil \frac{N+m}{2} \rceil}^{N} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

- Análogamente para la esperanza utilidad de perder, hay que considerar el costo por perder y el costo por perder con menos de la mitad de los votos de Labím:

$$E[\textsf{U(Perder)}] = S_1 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} + S_2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

- Finalmente, dado que el Costo Total de los folletos en una variable aletoria que sigue una distribución uniforme en el intervalo [a,b] se tiene que:

$$E[\textsf{Costo Folletos}] = \frac{a+b}{2}$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl