Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

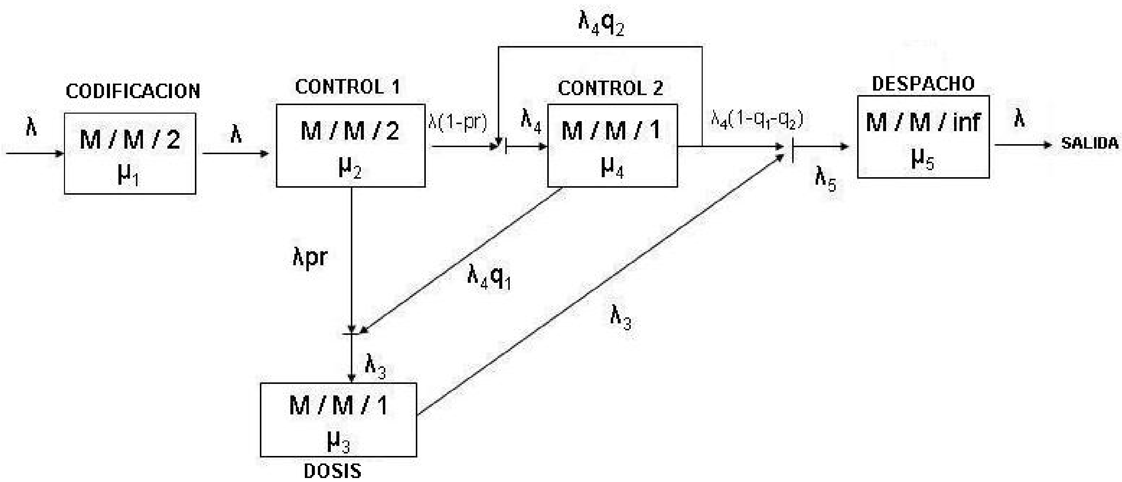
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: C.Araya, T.Correa, J.Gacitua L.Reus, R.Wolf

Solución Auxiliar 20: Red de colas

Martes 20 de Junio de 2007

Problema 1, CTP 5 Otoño 2005

1. El modelo es el siguiente:



Las tasas de entrada efectivas a cada subsistema son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Codificación	λ_1	λ
Control 1	λ_2	λ
Dosis	λ_3	$\lambda \cdot pr + \lambda \cdot (1-pr) \cdot \frac{q_1}{1-q_2}$
Control 2	λ_4	$\frac{\lambda \cdot (1-pr)}{1-q_2}$
Despacho	λ_5	λ

2. Las condiciones de estado estacionario en cada subsistema son:

Sistema	Condición
Codificación	$\frac{\lambda_1}{2\mu_1} < 1$
Control 1	$\frac{\lambda_2}{2\mu_2} < 1$
Dosis	$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < 1$
Control 2	$\frac{\lambda_4}{\mu_4} < 1$
Despacho	$\mu_5 > 0$

3. Se pide calcular el W_{total} en función de los W de cada subsistema. Para ello, debemos abarcar todas las trayectorias posibles de un medicamento hasta que sale del Despacho:

$$W_{total} = W_1 + W_2 + pr \cdot W_3 + (1-pr) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot W_4 \cdot q_2^{i-1} \cdot (1-q_1-q_2) + (1-pr) \sum_{i=1}^{\infty} (i \cdot W_4 + W_3) \cdot q_2^{i-1} \cdot q_1 + W_5$$

donde los W_i corresponden al tiempo promedio de permanencia en los sistemas conocidos:

$$W_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{2 \cdot \rho_1}{1-\rho_1^2} \qquad W_2 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{2 \cdot \rho_2}{1-\rho_2^2} \qquad W_3 = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} \qquad W_4 = \frac{1}{\mu_4 - \lambda_4} \qquad W_5 = \frac{1}{\mu_5}$$

En la expresión para W_{total}, el cuarto término corresponde a los medicamentos que llegan al Despacho provenientes directamente del subsistema 4, y el quinto término corresponde a los medicamentos que llegan al Despacho provenientes del subsistema 3, pero que pasaron por el subsistema 4.

4. La fracción de medicamentos que pasan por el Departamento de Dosis será igual a λ_3 dividido en λ, esto es:

$$F_{dosis} = pr + (1-pr) \cdot \tfrac{q_1}{1-q_2}$$

Luego, la condición para k es:

$$k < \tfrac{0{,}5 - 0{,}5q_2 - q_1}{1-q_2-q_1}$$

5. En promedio, un total de λ medicamentos entran en una unidad de tiempo, mientras que $\lambda pr + \lambda_4 q_1$ pasan por Depto. de Dosis.

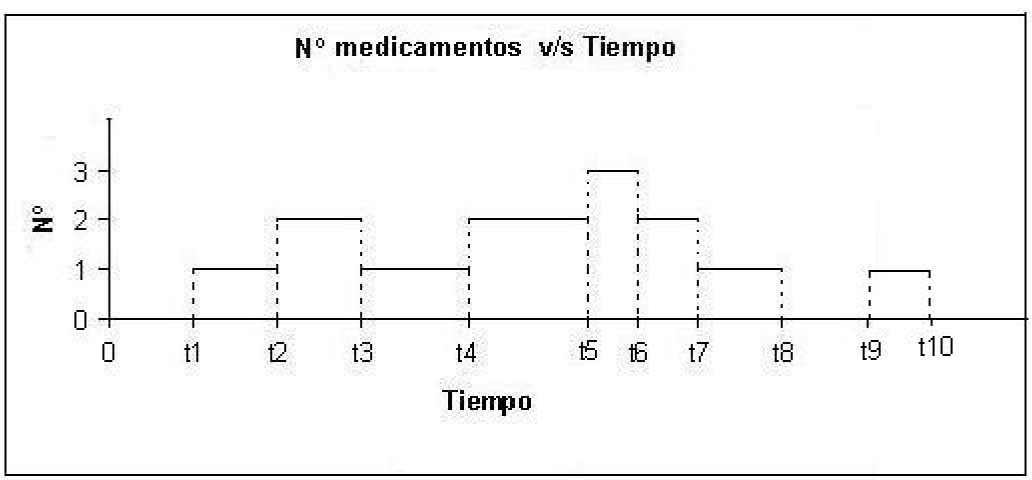
Con lo anterior e imponiendo la condicón de autofinanciamiento (utilidades mayor o igual que cero), se llega a:

$$-\lambda \cdot I - 2 \cdot E - 1 \cdot P(1-\pi_0) - 1 \cdot S - (\lambda pr + \lambda_4 q_1) \cdot R + \lambda V_{min} \geq 0$$

en que π_0 es la probabilidad estacionaria asociada al estado en que el profesional del control 2 está desocupado (sistema $M/M/1$, $\pi_0 = 1-\rho$).

$$V_{min} = \frac{\lambda \cdot I + 2 \cdot E + 1 \cdot P(1-\pi_0) + 1 \cdot S + (\lambda pr + \lambda_4 q_1) \cdot R}{\lambda}$$

6. El gráfico es el siguiente:



7. La fórmula de Little postula que $\lambda \cdot W = L$

   Con los datos de problemas, el número promedio de personas en el sistema fue:

$$L = \frac{1 \cdot (t_2 - t_1) + 2 \cdot (t_3 - t_2) + 1 \cdot (t_4 - t_3) + 2 \cdot (t_5 - t_4) + 3 \cdot (t_6 - t_5) + 2 \cdot (t_7 - t_6) + 1 \cdot (t_8 - t_7) + 1 \cdot (t_{10} - t_9)}{t_{10}}$$

$$L = \frac{t_10 - t_9 + t_8 + t_7 + t_6 - t_5 - t_4 + t_3 - t_2 - t_1}{t_{10}}$$

   A su vez, el tiempo promedio que un individuo pasó en el sistema es:

$$W = \frac{(t_3 - t_1) + (t_6 - t_2) + (t_7 - t_4) + (t_8 - t_5) + (t_{10} - t_9)}{5}$$

   Los numeradores de las fracciones anteriores corresponden al área bajo la trayectoria de la curva en el gráfico anterior, que obviamente son iguales, por lo tanto:

$$5 \cdot W = t_{10} \cdot L$$

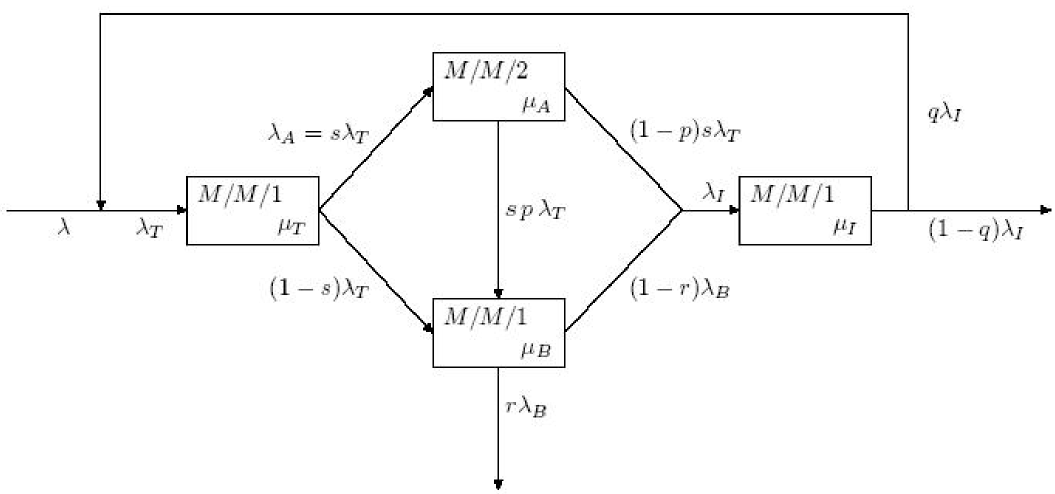
$$\frac{5}{t_{10}} \cdot W = L$$

   Como suponemos que el intervalo de tiempo estudiado y las 5 llegadas registradas describen bien el comportamiento promedio del sistema, es *razonable* aproximar $\frac{5}{t_{10}} \sim \lambda$

   Concluimos que se satsiface $\lambda \cdot W = L$

Problema 2, Examen Otoño 2005

1. La red de colas correspondiente se muestra en la figura.



   Llamamos λ_T a la tasa efectiva de entrada al subsistema correspondiente al técnico que clasifica perliminarmente las piezas. De manera análoga, llamamos λ_A, λ_B y λ_I a las tasas efectivas de entrada a los otros subsistemas.

Con esta notación, las tasas efectivas deben satisfacer las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\lambda_T &= \lambda + q\lambda_I \\
\lambda_A &= s\lambda_T \\
\lambda_B &= [(1-s) + sp]\,\lambda_T \\
\lambda_I &= (1-p)\lambda_A + (1-r)\lambda_B \quad = \quad [(1-p)s + (1-r)\,(1-s+sp)]\,\lambda_T\,.
\end{aligned}$$

De la última ecuación se puede deducir que $\lambda_I = (1 - r + rs - rsp)\lambda_T$ y reemplazando en la primera ecuación obtenemos que

$$\lambda_T = \frac{\lambda}{1 - q(1 - r + rs - rsp)}\,.$$

Con este valor podemos obtener las otras tasas efectivas reemplazando en las ecuaciones de arriba.

Las condiciones que se deben cumplir para que el sistema alcance el régimen estacionario son:

$$\lambda_T < \mu_T\,, \quad \lambda_A < 2\mu_A\,, \quad \lambda_B < \mu_B \quad \text{y} \quad \lambda_I < \mu_I\,.$$

2. Esto corresponde a calcular los "L" de cada subsistema (usando las tasas efectivas de entrada calculadas en el punto anterior).

   En el caso de las M/M/1, el número esperado de entidades en el sistema está dado por $L = \frac{\rho}{1-\rho}$ con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ si λ es la tasa de entrada y μ es la tasa de atención. Para el caso de una M/M/2, el número esperado de entidades en el sistema está dado por $L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$ con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$.

   Entonces,

$$\begin{aligned}
L_T &= \frac{\rho_T}{1-\rho_T} \\
L_A &= \frac{2\rho_A}{1-\rho_A^2} \\
L_B &= \frac{\rho_B}{1-\rho_B} \\
L_I &= \frac{\rho_I}{1-\rho_I}
\end{aligned}$$

3. Para esta parte presentamos dos soluciones.

   Solución 1 Aplicamos la fórmula de Little al sistema completo. Usando los valores para L_T, L_A, L_B y L_I del punto anterior tenemos que

$$W = \frac{L_T + L_A + L_B + L_I}{\lambda}\,.$$

   Solución 2 Para seguir las distintas "rutas" que podría seguir una pieza en el sistema, plantearemos un sistema de ecuaciones usando relaciones entre los tiempos que pasará en el sistema una pieza, una vez que sabemos en qué lugar está.

   Denotamos por T_T el tiempo que falta, en promedio, para salir del sistema una vez que una pieza entra al subsistema del técnico y definimos T_A, T_B y T_I de manera análoga.

   Lo que queremos calcular es $W = T_T$.

   Analizando la red y tomando esperanzas, se tiene que los T_i ($i \in \{T, A, B, I\}$) deben satisfacer:

$$\begin{aligned}
T_T &= W_T + sT_A + (1-s)T_B \\
T_A &= W_A + pT_B + (1-p)T_I \\
T_B &= W_B + (1-r)T_I \\
T_I &= W_I + qT_T
\end{aligned}$$

donde los W_i ($i \in \{T, A, B, I\}$) se pueden calcular, aplicando la fórmula de Little, a partir de los L_i calculados en el punto anterior y las tasas efectivas de entrada[1].

4. Una idea para analizar la decisión que se pretende tomar es calcular el tiempo que pasa desocupado, en promedio, cada uno de los empleados en las diferentes situaciones que se presentarían (dependiendo de qué nuevo empleado se contrate) y elegir aquella opción que minimice algún criterio relativo a la disparidad de "tiempo desocupado promedio" (por ejemplo, la diferencia entre el tiempo desocupado máximo y tiempo desocupado mínimo).

   Para poder calcular esto se debe recordar que el tiempo que pasa desocupado, en promedio, un servidor en un sistema M/M/1 es π_0; en un sistema M/M/2 es $\pi_0 + 1/2\ \pi_1$; y en un sistema M/M/3 es $\pi_0 + 1/2\ \pi_1 + 1/3\ \pi_2$, donde los π son las probabilidades estacionarias del subsistema correspondiente cuando visto como proceso de nacimiento y muerte.

5. No afecta. El sistema cumple con las condiciones de régimen estacionario y si se agrega un nuevo servidor a cualquiera de los subsistemas, las seguirá cumpliendo (los ρ sólo se pueden reducir al agregar un nuevo servidor).

   Como suponemos que el sistema está en régimen estacionario, la tasa de salida (el número de piezas procesadas por hora) es igual a la tasa de entrada. Como la tasa de entrada no cambia, la tasa de salida tampoco lo hará.

[1] Para calcular $W = T_T$ faltaría resolver el sistema planteado.