Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

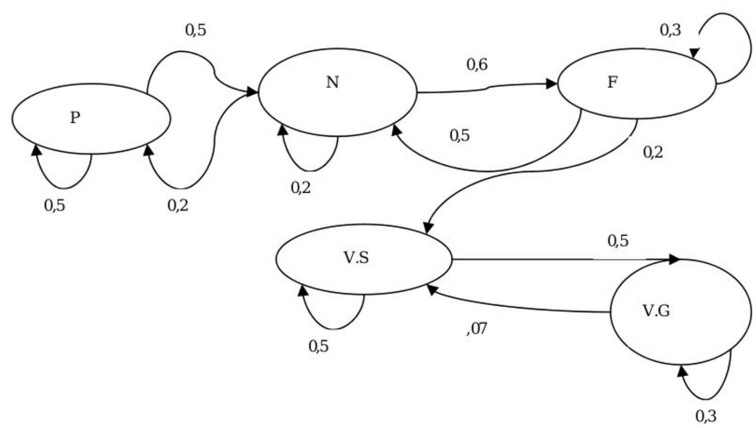
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: C.Araya, J.Gacitua L.Reus, R.Wolf

Solución Auxiliar 14

Miércoles 16 de Mayo de 2007

Problema 1

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma,



   Existen probabilidades estacionarias porque la cadena es ergódica +transiente. En el largo plazo, sabemos que $\pi_p = \pi_n = \pi_f = 0$ Luego resolvemos el sistema,

$$\begin{pmatrix}\pi_{VS} & \pi_{VG}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_{VS} & \pi_{VG}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3\end{pmatrix} \wedge \pi_{VS} + \pi_{VG} = 1$$

   $\Longrightarrow \pi_{VS} = 0,583 \;\; \pi_{VG} = 0,417$

2. Por calcular el beneficio g,

$$\hat{r}_{VS} = 25.000 + 0,5 \cdot 3.000 = 26.500$$
$$\hat{r}_{VG} = 35.000$$

$$\Longrightarrow g = 0,583 \cdot 26.500 + 0,417 \cdot 35.000 = 30.044,5$$

3. Sólo se cambió la parte transiente de la cadena, luego las probabilidades estacionarias no se modifican. Cambian los beneficios.

$$\hat{r}_{VS} = 27.000 + 0,5 \cdot 3.000 = 28.500$$
$$\hat{r}_{VG} = 32.000$$

$$\Longrightarrow g = 0,583 \cdot 86.500 + 0,417 \cdot 32.000 = 29.952,5$$

   Desde el punto de vista del L.P, a la empresa le conviene más la nueva situación: Se entregan menos millas y los usuarios se muestran indiferentes.

4. El proceder es igual al que calcular el tiempo esperado en el transiente, sin embargo, ahora se mantienen los beneficios.

$$\begin{aligned}\hat{r}_P = 3.000 + 0,5 \cdot 3.000 = &\quad 4.500\\ \hat{r}_N = 5.000 + 0,6 \cdot 3.000 = &\quad 6.800\\ \hat{r}_F = 10.000 + 0,2 \cdot 3.000 = &\quad 10.600\end{aligned}$$

Por calcular el vector W,

$$W = \hat{r} + P \cdot W \text{ (g=0)}$$

$$\begin{pmatrix} W_r \\ W_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{r}_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{rr} & P_{rt} \\ P_{tr} & P_{tt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_r \\ W_t \end{pmatrix}$$

Tenemos $W_r = 0$ y $P_{rt} = 0$ luego,

$$\begin{aligned} W_t &= \hat{r}_t + P_{tt} \cdot W_t \\ &= (I_t - P_{tt})^{-1} \cdot \hat{r} \end{aligned}$$

Reemplazando valores,

$$W_t = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,2 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & -0,5 & 0,7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4500 \\ 6800 \\ 10600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336.500/3 \\ 309.500/3 \\ 266.500/3 \end{pmatrix}$$

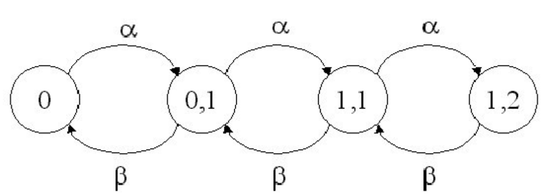
Como siempre se parte de poco frecuente, las millas esperadas que el cliente acumuló ascienden a 112.166,6 (el primer elemento del vector W_t).

Problema 2

1. Los estados son los siguientes:

   - (0,0): No hay clientes ni en la sala de espera ni atendiéndose
   - (0,1): Hay un cliente atendiéndose y la sala de espera esta vacía.
   - (1,1): Hay un cliente atendiéndose y un cliente en espera.
   - (2,1): Hay un cliente atendiéndose y dos en espera.

   Luego la cadena se muestra en la siguiente figura:



2. Notamos en primer lugar que la fracción de clientes que en largo plazo logran ser atendidos corresponde a $\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)}$.

   Dado que en promedio el empleado demora $\frac{1}{\beta}$ en atender un cleinte, un cliente que efectivamente es atendido, debe esperar en promedio hasta comenzar a ser atendido:

$$E(\text{T espera/cliente es atendido}) = \frac{\pi_{(0,1)}}{\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)}} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{\pi_{(1,1)}}{\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,1)}} \cdot \frac{2}{\beta}$$

3. El número de clientes por hora que en el largo plazo se van sin ser atendidos es:

$$\pi_{(2,1)} \cdot \alpha$$

   Por lo tanto, en el largo plazo, el costo esperado por hora es:

$$E(\text{Costo por hora}) = K \cdot \pi_{(1,2)} \cdot \alpha$$

Dudas y/o Consultas:
Jaime Gacitúa
jgacitua@ing.uchile.cl