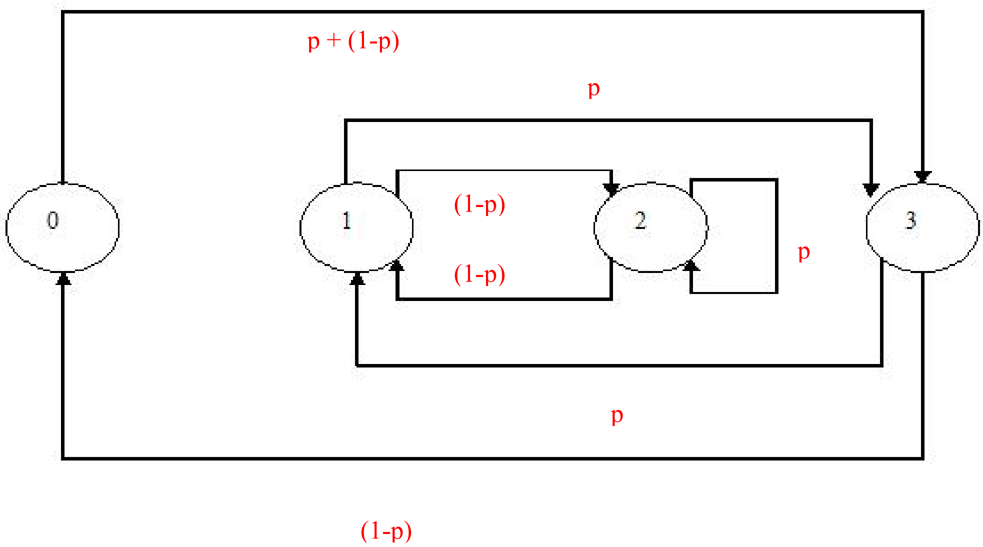
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

IN44A: Investigación Operativa
Prof. : Pablo Rey, Rafael Epstein
Aux. : Christian Araya, Jaime Gacitúa, Lorenzo Reus, Rodrigo Wolf
Coord. : Tania Correa

Pauta auxiliar: Miércoles 25 de abril de 2007

Problema 1

1. En este problema los estados corresponden al número de paraguas con que el individuo cuenta al salir de su oficina o de su casa, notando que es irrelevante en el lugar en donde se encuentre (la probabilidad que llueva es independiente del punto de partida y el sujeto transporta los paraguas únicamente si está lloviendo al salir a la calle). El grafo y las probabilidades asociadas se detallan a continuación:



2. La idea es que cuando el sistema ha evolucionado en el largo plazo, se tienen probabilidades conocidas como estacionarias (existen bajo **propiedades especiales** que se verán en cátedra), que indican la probabilidad que el sistema se encuentre en un determinado estado. Las ecuaciones que permiten conocerlas son las siguientes:

$$\pi_0 = \pi_3(1-p)$$
$$\pi_1 = \pi_2(1-p) + \pi_3(p)$$
$$\pi_2 = \pi_1(1-p) + \pi_2(p)$$
$$\pi_3 = \pi_1(p) + \pi_0(1)$$
$$**\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

La ecuación señalada con ** se impone puesto que necesitamos que los valores representen probabilidades. Para resolver el problema entonces empleamos 3 de las 4 ecuaciones de flujos, pero incorporamos como 4ª ecuación la señalada con **. Para un valor de p=0.6, el resultado es el siguiente:

$$\pi_0 = 0.1176$$
$$\pi_1 = 0.2941$$
$$\pi_2 = 0.2941$$
$$\pi_3 = 0.2941$$

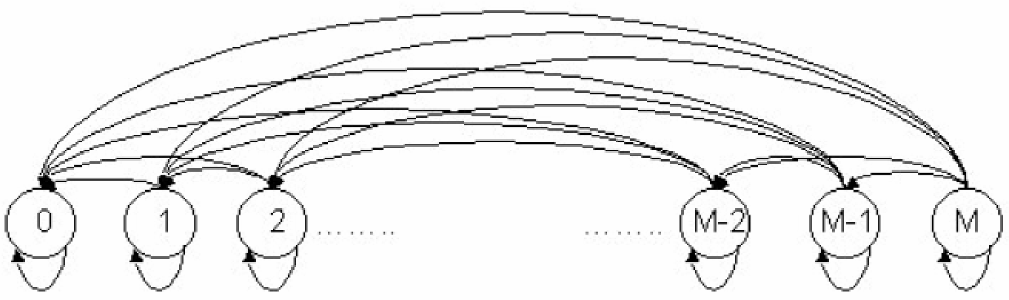
Problema 2

1. La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si me defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

El estado i sería la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, para todo i en {0,. . . ,M}.

Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente fórmula:

$$P(i,j) = P(\text{ir del estado i al estado j}) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!}p^{i-j}(1-p)^j & si M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & si j \geq i \end{cases}$$



Grafo Parte 1

Existen M + 1 clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuesta cada una por uno de los M estados restantes. Recuerden que una clase está compuesta por todos los estados comunicados[2] entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado M –1. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por M-1 en i transiciones})$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en M por i-1 transiciones}) \cdot P(M.M-1)$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}$$

$$P(\text{Pasar por el estado M-1}) = \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1-(1-p)^{M}}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergódica, sé que en el largo plazo con seguridad estaré en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente está compuesta por el estado 0, es que se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegaría al estado 0 y por lo tanto se podrán instalar los equipos.