UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

GUÍA PREPARACIÓN EXAMEN
ECONOMÍA II

Profesores: Igal Magendzo
David Rappoport
Auxiliar: Carlos Ramírez

P1) Pago a los factores del modelo de Solow

Recuerde que en el modelo de Solow el productoY , viene dado por:

Y = F(K,L) (1)

donde estamos ignorando los incrementos de productividad; K y L denotan capital y trabajo; y la función de producción F exhibe retornos constantes de escala, es creciente en cada uno de sus argumentos, tiene retornos decrecientes en cada uno de los argumentos y cumple con las condiciones de Inada. La razón capital-trabajo se denota mediante k = K/L y la forma intensiva de la función de producción viene dada por

y = f(k) (2)

donde f(k) = F(K/L , 1). La dinámica del capital queda caracterizada por (3):

$$\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$$

donde s, n y δ denotan la tasa de ahorro, tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación del capital, respectivamente. Las tres tasas son exógenas al modelo. En este problema consideramos una economía pobre (es decir, con menos capital que en estado estacionario) y estudiamos como evolucionan los precios de los factores (salario y retornos al capital) camino al estado estacionario.

a) Suponga que el pago al capital r, viene dado por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ y el salario, w, por $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$. ¿Bajo que condiciones es apropiado este supuesto?

Estas expresiones sólo se dan bajo competencia perfecta.

b) Muestre que r = f´(k) y w = f(k) – kf´(k). Aún si no puede responder esta parte, puede usar estos resultados en las partes siguientes.

Tenemos que Y=F(K,L)=LF(k,1)=Lf(k), por lo tanto derivando con respecto a L tenemos que:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w = f(k) - Lf'(k)\frac{K}{L^2} = f(k) - kf'(k).$$

Por otra parte tenemos que si

$$\max_{\{K\}} F(K,L) - rK - wL$$

Factorizando por L obtenemos que

$$\max_{\{k\}} L(f(k) - rK - w)$$

la condición de primer orden es f´(k)=r.

c) Muestre que la suma de los pagos a ambos factores es igual al producto, es decir, que rK + wL = F(K,L).

Sabemos que la función de producción tiene retornos constantes a escala, es decir:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

Derivando con respecto a λ obtenemos que

$$F_K K + F_L L = F(K, L)$$

Sabemos que bajo competencia perfecta se tiene que $r=F_k$ y $w=F_L$. Por lo tanto bajo estos supuestos se tiene que:

$$rK + wL = F(K, L)$$

d) Determine si el pago al capital crece o cae camino al estado estacionario. Haga lo mismo para los salarios.

Sabemos que el pago del capital esta dado por r = f(k). Para determinar qué sucede con este pago cuando la economía se aproxima al estado estacionario, derivamos esa expresión respecto a k. Esto nos da:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f''(k) < 0$$

es decir a medida que mantenemos fijo el stock de trabajo y aumentamos la cantidad de capital su rentabilidad cae, esto porque cada unidad extra de capital rinde menos. Para determinar qué sucede con el salario, derivamos la expresión del salario y la derivamos respecto a k, esto nos da:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = -kf''(k) > 0$$

e) Suponga que la función de producción es de tipo Cobb-Douglas. Determine la tasa de cambio del pago al capital $\gamma_r = \dot{r}/r$ y la tasa de cambio del salario $\gamma_w = \dot{w}/w$. Relacione ambas tasas con la tasa de crecimiento del capital.

Si la función de producción es Cobb-Douglas entonces Y = F(K;L) = $K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Expresando la función en términos per capita se tiene que y = k^{α}. Por lo tanto se tiene que:

$$\gamma_r = \frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)} = \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\dot{k}}{\alpha k^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{\dot{k}}{k}$$

Por otro lado:

$$\gamma_w = \frac{\dot{w}}{w} = \frac{-\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}\dot{k}}{(1-\alpha)k^{\alpha}} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

f) En 1998, la tasa de retorno al capital en Chile fue considerablemente menor que en años anteriores. ¿Es posible explicar este fenómeno en base a los resultados de este problema? Justifique.

$$\gamma_r = (\alpha-1)\gamma_k$$

Por supuesto, a medida que el capital crece, éste presenta cada vez menores retornos. Por lo tanto la tasa de retorno cada año debería ser menor.

g) En el mismo escenario, los salarios reales (medidos correctamente) crecían sostenidamente, sin que se notara una caída en la tasa de crecimiento. ¿Es consistente con los resultados de este problema? Si su respuesta es afirmativa, justifique cuidadosamente. Si es negativa, discuta cuál aspecto excluido del modelo estudiado en este problema puede explicar la aparente discrepancia.

$$\gamma_w = \alpha\gamma_k$$

Este resultado nos indica que la tasa de crecimiento de los salarios debería ir cayendo en el tiempo. Sin embargo los datos muestran que vienen creciendo constantemente, por lo tanto el resultado teórico no es consistente con los datos observados. El punto es que este modelo no incorpora el avance tecnológico, el cual hace aumentar la productividad y por ende, los salarios.

P2) Considere una economía con función de producción Y = AK + BKα L 1- α, donde A,B,α, son constantes positivas. Esta economía cumple todos los supuestos del modelo de Solow. Suponiendo que no hay progreso tecnológico y que sA >= n + δ, responda lo siguiente:

a) Derive y explique la ecuación fundamental de acumulación de capital e identifique cada uno de sus componentes.

Resp:

- Suponemos que la tasa de crecimiento de la población es constante y que es la misma que el crecimiento de la fuerza laboral, por lo que se tiene que ΔL/L = n. (L:= tamaño de la fuerza laboral)
- Además, no se considera progreso tecnológico.
- Se asume que k= K/L, por lo que la tasa de crecimiento k es Δk/k = ΔK/K - ΔL/L = ΔK/K - n

Por lo tanto, ΔK = (Δk/k)K + nK . Dividiendo ambos lados de la ecuación por L, queda ΔK/ L = Δk + nk.

Luego, al reemplazar ΔK/L = k_{t+1}- k_t en la ecuación (c) k_{t+1}- k_t = sy_t - δk_t , se obtiene la *ecuación fundamental de acumulación de capital*

$$\Delta k= sy_t - (n+\delta)k_t$$

Esta ecuación afirma que el capital se acumula en función de lo que se invierte (pues en el modelo de Solow ahorro es igual a inversión) menos lo que se deprecia el capital (pues n+δ es la depreciación efectiva).

b) Determine el nivel de capital per cápita y el ingreso per cápita en el estado estacionario. Represente el nivel de estado estacionario en los dos gráficos vistos en clases.

Resp:

*E*n **estado estacionario**, es decir la posición del equilibrio de largo plazo de la economía, el coeficiente de capital por trabajador alcanza un valor de equilibrio y permanece invariable a ese nivel. Como resultado, el producto por trabajador también alcanza un estado estacionario. Por lo tanto, tanto k como y alcanzan un nivel permanente. Además, para alcanzar el estado estacionario, el ahorro per cápita debe ser exactamente igual a la ampliación de capital, de modo que Δk=0. Con esto, la relación de equilibrio queda

$$sy_t^* = (n+\delta)k_t^*$$

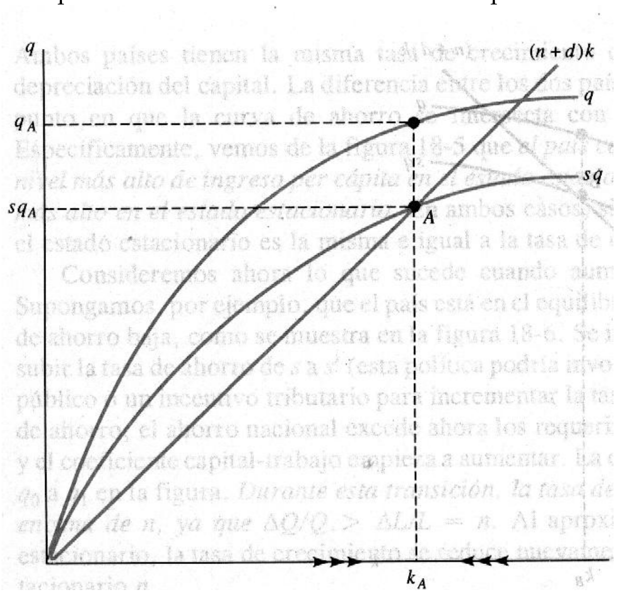
Expresamos F(K,L) en términos per cápita:
$F(K,L)=AK+BK^{\alpha} L^{1-\alpha} \Rightarrow F(k,1)=f(k) = Ak+Bk^{\alpha}$
Reemplazando $yt=f(k)=Ak+Bk^{\alpha} \Rightarrow s(Ak+Bk^{\alpha})= (n+\delta)k \Rightarrow s(A+Bk^{\alpha-1})= (n+\delta)$

$$k^* = \left(\frac{B}{n+\delta - sA} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y^* = \left(\frac{B}{n+\delta - sA} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Por lo tanto, en el estado estacionario tanto y^* como k^* tienen un **valor constante**, lo que no significa que el crecimiento sea cero, sino existe un crecimiento positivo de **tasa n**. Esto, debido a que el coeficiente capital-trabajo k es constante, lo que significa que $\Delta K/K = \Delta L/L = n$. Como tanto L como K crecen a tasa n, el producto también crece a tasa n (Otra forma de mirar esto es que el producto per cápita Y/L es constante, de modo que Y está creciendo a la misma tasa que L, esto es $\Delta Y/Y = \Delta L/L = n$)

Gráficamente:
El punto A del siguiente gráfico representa el estado estacionario del modelo de Solow, que corrsponde a la intersección de las curvas representadas en la relación anterior.



c) Calcule la tasa de crecimiento de k: $\gamma_k = \Delta k/k$. ¿A qué valores converge γ_k a medida que k crece?

Resp:
$\Delta k = s(Ak + Bk^{\alpha}) - (n+\delta)k$
$\gamma_k = \Delta k/k = s(A + Bk^{\alpha-1}) - (n+\delta)$
$\lim_{k \to \infty} \gamma_k = sA - (n+\delta)$

d) ¿En cuánto aumenta γ_k si : i) s aumenta en Δs
ii) n disminuye en Δn

Determine en cada caso si el efecto es transitorio o permanente. Compare su respuesta con los resultados del modelo de Solow.

Resp:
i) $\gamma_k = s(1+\Delta)A - (n+\delta)$. Luego γ_k aumenta en $A\Delta s$.
ii) $\gamma_k = sA - n(1+\Delta) - \delta$ Luego γ_k aumenta en Δn.

En ambos casos el efecto es permanente.

En el modelo de Solow un aumento de s y una disminución de n tienen efectos transitorios (aumentan la tasa de crecimiento del capital, producto y consumo **en la transición al estado** estacionario), pues en el largo plazo sabemos que no hay crecimiento. En la parte anterior, el efecto es permanente.

P3) Crecimiento e Impuestos.

Considere una economía, sin crecimiento de la población (entonces podemos normalizar la población a uno) con la siguiente función de producción:

$$y = f(k) = Ak^{1-\alpha}$$

el capital se deprecia a una tasa δ.

El gobierno gasta un flujo g, el cual es financiado con una tasa de impuesto τ proporcional al ingreso (se recauda τy). El gobierno sigue una política de presupuesto equilibrado, o sea en todo momento los ingresos de gobierno son iguales a sus gastos.

Las personas ahorran una fracción s de su ingreso disponible (neto de impuestos).

a) Escriba la restricción de recursos de esta economía (demanda agregada igual producción o ahorro igual inversión).

b) Determine el stock de capital de estado estacionario (k^*). Determine también el consumo (c^*) y la producción (y^*) de estado estacionario.

c) Discuta intuitivamente el efecto que tienen los impuestos sobre el capital de largo plazo y discuta que pasa con el crecimiento en la transición. Para esto último compare dos economías que tienen distintos τ , uno alto y uno bajo, y suponga que ambas parten de un nivel de capital menor que el capital de largo plazo. ¿Cuál de las dos economías crece más rápido?

d) Considere una economía sin impuestos ni gasto de gobierno. ¿Cuál es el nivel de capital de la regla dorada (k^{RD})? Compare el nivel de capital de estado estacionario de la regla dorada con k^* de la parte b. Determine cual debería ser la tasa de impuesto (que si es negativa sería un subsidio) para que se llegue a la regla dorada. Discuta su resultado considerando la tasa de ahorro s y como se compara con la tasa de ahorro requerida para llegar a la regla dorada.

e) Ahora cambiaremos un poco el problema para suponer que el gasto de gobierno es productivo, pero sujeto a congestión (piense en un camino). En consecuencia la productividad total de los factores A es una función creciente de $g/y = \tau$, es decir $A = A(\tau)$ con $A' > 0$ y $A'' < 0$. Más aún asumiremos que $A(\tau) = B\tau^{\varepsilon}$. Calcule la tasa de impuesto que maximiza el consumo de estado estacionario (que usted ya ha calculado en la parte d, aunque ahí se asumió que A era constante). Comente intuitivamente por qué el impuesto óptimo no es cero.

P4) Crecimiento e inversión[1].

Considere una economía con los siguientes datos en un período de tiempo (la notación es la de los apuntes de José De Gregorio):

$$\frac{I}{Y} \equiv i = 30\% \quad \text{tasa de inversión bruta} \tag{1}$$

$$\gamma = 5.5\% \quad \text{crecimiento del PIB agregado} \tag{2}$$

$$\frac{K}{Y} = 2.5\% \quad \text{razón capital producto al inicio del período} \tag{3}$$

$$\delta = 5\% \quad \text{tasa de depreciación} \tag{4}$$

$$\hat{L} = 2\% \quad \text{tasa de crecimiento del empleo} \tag{5}$$

Suponga además que la función de producción está dada por:

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

responda lo siguiente:

(a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento del stock de capital?

(b) Usando contabilidad del crecimiento determine cuánto fue el crecimiento de la productividad total de factores durante ese período (denótelo x).

(c) Si esta economía quisiera crecer en vez de 4.5 a 8%, dados constantes los valores de x y $\hat{L}$ determine a cuánto tendría que subir la tasa de inversión.

(d) Considere que x es el valor de crecimiento de la productividad de largo plazo. Suponga además que la población crece a la misma tasa que el empleo dado por la ecuación (5). ¿Cuál es el crecimiento de largo plazo del producto per capita y del producto agregado en esta economía? Compárelo con el crecimiento actual e interprete la diferencia de acuerdo al modelo neoclásico de crecimiento.

(e) Suponga que la tasa de ahorro de la economía, s, es 30%. ¿Es este supuesto razonable (considere que en la economía no hay gobierno)? ¿Cuál es la relación capital producto a la cual converge la economía?[2]

(f) Calcule la tasa de ahorro consistente con la regla dorada. ¿Cómo se compara con el 30% supuesto en este problema? ¿Cómo se compara con la que usted calculó en la parte (c)? Podría argumentar, suponiendo que la economía está en estado estacionario, que el 30% o el valor encontrado en la parte (c) son subóptimos. ¿Por qué?

---

[1] Para efectos de este problema puede usar la aproximación que el crecimiento porcentual de un producto es igual a la suma de los crecimientos porcentuales de cada uno de sus términos.

[2] Para esta parte necesitara recordar, o tendrá que derivar, pero nunca copiar, la relación entre la relación capital-producto de largo plazo como función de s y otros parámetros del modelo.

P5) Crecimiento y planificación.

Considere una economía donde la tasa de ahorro es exógena e igual a s y el capital se deprecia a una tasa δ. Hay muchas firmas que actúan de manera competitiva y cuya función de producción (en términos per cápita) está dada por:

$$y = Ak^{1-\alpha}\bar{k}^{\alpha} \qquad (1)$$

donde k es una medida del capital per cápita promedio que hay en la economía. Son muchas firmas, de modo que las firmas individuales no consideran el efecto de su inversión sobre el capital promedio de la economía.

a) Explique el sentido económico de $\bar{k}$ en la función de producción y explique por qué es razonable suponer que en equilibrio $k = \bar{k}$.

b) Calcule la tasa de crecimiento del capital γ_k y del producto, γ_y, en esta economía, imponiendo, al igual que en el modelo de Solow, la condición de oferta = demanda o bien ahorro = inversión. ¿Cómo es en el largo plazo? ¿Por qué?

Suponga ahora que la función de producción en realidad está dada en términos per cápita por:

$$y = Ak^{1-\alpha}\bar{K}^{\alpha} \qquad (2)$$

donde $\bar{K} = \bar{k} \times L$, es decir es el capital agregado.

c) Interprete económicamente esta nueva función y calcule nuevamente la tasa de crecimiento del capital, k, y del producto, y. ¿Que implicancias tiene su resultado si pensamos en comparar las experiencias de China e India con la de Noruega y Finlandia en materia de crecimiento de largo plazo?¿Cuál especificación le parece má razonable para incorporar externalidades, (1) o (2)?

Ahora supondremos que la tasa de ahorro no es exógena, sino que está dada por:

$$s = s_0 \frac{f'(k)}{A}$$

y que $f'(k)$ es el de la parte (a), es decir la ecuación (1).

d) Encuentre la tasa de ahorro cuando las decisiones de inversión la hacen las firmas descentralizadamente.

e) Encuentre la tasa de ahorro que se obtiene cuando la asignación de recursos la hace un planificador central. ¿Qué supone el planificador respecto de k y $\bar{k}$? Compare su resultado con el encontrado en la parte anterior y diga si es igual, mayor o menor, y en qué caso la tasa de crecimiento es mayor. ¿Cuál es la razón detrás de su resultado?

COMENTE

a) (3 pts.) Dos economistas estaban discutiendo la conveniencia de utilizar política económica activa. Uno de ellos postulaba que las políticas fiscales y monetarias no tienen sentido, pues sólo afectan la determinación de la demanda agregada y no pueden, por ende, influir en el producto de equilibrio (o desempleo). El otro replicaba que, dado un salario nominal, la autoridad económica puede afectar el consumo e inversión mediante cambios en su política fiscal (o monetaria) y provocar variaciones en el producto en respuesta ambos cambios. Analice la validez de cada uno de estos planteamientos especificando las circunstancias bajo las cuales son o no son correctos.

La validez de cada planteamiento depende de si suponemos que la oferta agregada es vertical o no. En el caso en que es vertical, efectivamente las políticas macro, que sólo cambian la demanda agregada, no pueden afectar el producto real de la economía. Esto, no obstante, supone que cambios en la demanda agregada generan cambios en precios iguales al cambio en el ingreso nominal que las acompaña. Si los precios están fijos, sin embargo, estas políticas podrían alterar el producto real. En general, se supone que al menos en el corto plazo, la existencia de contratos y otras rigideces permiten que cambios en la demanda agregada estén acompañados de cambios en la oferta agregada.

Nota de corrección: si responde basado en el modelo Mundell-Fleming, puede tener todo el puntaje siempre y cuando sea consistente con su respuesta.

Verdadero, Falso e Incierto

i. (1 pto.) La inversión se encuentra deprimida desde fines de 1999, período en el que ha estado bajo el 25% del PIB.

FALSO. La inversión ha venido en aumento por el favorable escenario económico mundial, llegando a predicciones de un 28% del PIB a invertir para este año y el próximo.

ii. (1 pto.) La oferta agregada de corto plazo satisface la dicotomía clásica, esto es, que la parte real es independiente del nivel de precios.

FALSO. La Oferta Agregada cumple la dicotomía clásica en el LP, ya que ahí se cumple que la parte real es independiente del nivel de precios. Pero en el CP, la oferta agregada tiene pendiente positiva, por lo que la producción depende del nivel de precios, por lo tanto no se cumple la dicotomía clásica.

iii. (1 pto.) La Teoría del Acelerador plantea que la inversión es un determinante del crecimiento económico.

FALSO. La teoría del Acelerador plantea que cuando la actividad económica crece elevadamente, las empresas invertirán más, y esto produce un proceso acelerador que hace que el crecimiento persista en el tiempo.

iv. (1 pto.) No existe acuerdo entre los economistas por cuanto para unos el déficit en cuenta corriente es el exceso de ingreso nacional sobre gasto, para otros el déficit de la balanza comercial más los servicios financieros, y para otros el aumento de los pasivos netos con el exterior.

FALSO. Esas tres afirmaciones son lo mismo.

v. (1 pto.) Un aumento de la inflación esperada es expansivo desde el punto de vista de la demanda agregada pero contractivo desde el punto de vista de la oferta.

VERDADERO. Pues aumentos de la inflación esperada desplazan la demanda agregada a través de cambios en la LM, pero contraen la oferta agregada a través de cambios en la curva de Phillips.

vi. (1 pto.) La política fiscal es siempre efectiva, en el corto y largo plazo, para aumentar el nivel de actividad económica.

FALSO. La política fiscal en el largo plazo es inefectiva para aumentar el nivel de actividad económica, pues en el largo plazo la oferta agregada es vertical.

Demanda agregada y apetito por inversión (30%).

Suponga una economía donde los distintos componentes de la demanda agregada están dados por:

$$C = 0.9*y$$
$$I = 5 - 10*(i-\pi)$$
$$G = 0$$
$$X = 1 + 0,2*e$$
$$M = 1 - 0,8*e + 0,1*y$$
$y^{pot} = 25$ es el PIB potencial
e es el tipo de cambio real

i) (1 pto.) Derive una demanda agregada para la brecha del PIB al PIb potencial de la forma:

$$y-y_{pot} = A - a_1*(i-\pi) + a_2*e + \eta$$

Calcule A, a_1 y a_2.

Reemplazando los componentes de la demanda agregada se tiene:

$$y = 25 - 50*(i-\pi) + 5*e + \eta$$

Luego, $y - y^{pot} = 0 - 50*(i-\pi) + 5*e + \eta$ (1)

ii) (1 pto.) Calcule el tipo de cambio real de equilibrio. Explique cómo llegó a este resultado y qué supuesto hizo.

Se supone que el tipo de cambio real de equilibrio es tal que iguala las importaciones con las exportaciones. Por lo tanto, se tiene que:

$X = M \Rightarrow e = 0,1y$, pero en equilibrio, $y = y^{pot}$, entonces $e^{eq} = 2,5$

iii) (1 pto.) La oferta agregada está dada por:

Curva de Phillips: $\pi = \pi^{esperado} + 0,5*(y-y^{pot}) + \varepsilon$ (2)

Donde π es la inflación y $\pi^{esperado}$ es el valor esperado de la inflación. Cite y explique brevemente una teoría por la cual se obtiene una curva de Phillips de este tipo, donde la inflación depende del valor esperado y de la brecha entre PIB y PIB potencial.

Las teorías por las que se obtiene la curva de Phillips de la forma de la ecuación (2) provienen de la teoría de "Prices a la calvo" o de "Costos de ajuste a la Rotenberg" donde hay una proporción de firmas que cambian sus precios cada período, mientras que el resto los mantiene constante por un período, lo que genera persistencia en los precios.

iv) (1 pto.) La regla de política está dada por:

$$i = r_{neut} + \pi + b_1*(\pi - \pi^{meta}) + b_2*(y - y^{pot}) + \mu \qquad (3)$$

Donde r_{neut} es la tasa de interés real neutral o de equilibrio. ¿Qué condición se debe cumplir en esta regla para que esta economía tenga un equilibrio nominal?

En equilibrio, se debe cumplir que $\pi = \pi^{meta}$ y que $y = y^{pot}$. Por lo tanto, (3) implica que se cumple la ecuación de Fisher, es decir, $i = r_{neut} + \pi$.

v) (1 pto.) Calcule los valores de equilibrio de A, X, M, C, I, y tasa de interés real.

De la curva de Phillips, se tiene que, en equilibrio $\pi = \pi^{esperado} = 0$, $y = y^{pot}$, por lo tanto, de (1):

$i = r_{neut} = 5*e^{eq}/50 = 0{,}25$

Luego, reemplazando se tiene que:

$$A = 0$$
$$C = 22{,}5$$
$$I = 2{,}5$$
$$X = 1{,}5$$
$$M = 1{,}5$$

vi) (1 pto.) Un economista argumentó que si la gente tiene mayor apetito por invertir, esto no tendría ningún efecto sobre la inversión final de equilibrio. Suponga que la ecuación de inversión cambia a:

$$I = 7.5 - 10*(i - \circledcirc\pi)$$

Resuelva nuevamente los valores de equilibrio del punto anterior. ¿Cambia la inversión? ¿Por qué?

Usando la nueva ecuación de inversión, se tiene que:

$r_{neut} = 0{,}5$
$A = 12{,}5$
$C = 22{,}5$
$I = 2{,}5$
$X = 1{,}5$

M = 1,5

El economista tiene razón y la inversión no cambia, manteniéndose en 2,5, puesto que en la parte anterior se calculó la inversión de equilibrio de la economía, es decir, cuando no hay inflación y se alcanza el PIB potencial (esto significa que no hay otro nivel de inversión consistente con el equilibrio). Luego, el hecho de que la gente tenga un mayor apetito por invertir no afecta el nivel final de inversión, que sino que sólo se repercute en un aumento de la tasa de interés real de equilibrio.

Población e Ideas: El mundo de Isaac Newton (30%).

En este problema analizamos el rol que pueden jugar las ideas o inventos en el crecimiento económico. Supondremos una economía donde la población crece a una tasa exógena n. La población puede en dos sectores, produciendo nuevas ideas o produciendo nuevos bienes. La población que trabaja produciendo nuevas ideas es L_A, mientras la población dedicada a producir más bienes es L_Y, donde además se tiene que $L = L_Y + L_A$, L es la población total. La fracción de la población total que se dedica a producir nuevas ideas se mantiene constante.

La función que describe la producción de nuevos bienes es: $Y = K^{\alpha}(AL_Y)^{1-\alpha}$ (1)

donde K es el nivel de capital, A es un parámetro que mide la productividad del trabajo y se puede interpretar como el stock de "ideas". α es una constante que mide la participación relativa del capital y trabajo en la función de producción.

Por otra parte la productividad crece de acuerdo a: $\dot{A} = \delta L_A^{\lambda} A^{\varphi}$ (2)

a) (1 pto.) Interprete económicamente la ecuación (2) y en particular analice que significa que los parámetros $\lambda<1$ o $\lambda>1$ y que sea $\phi>0$ y $\phi<0$. ¿Por qué es razonable suponer que $\lambda < 1$ y $\phi > 0$?

La ecuación (2) dice que el crecimiento de las ideas depende de la cantidad ideas existentes, A y de la cantidad de gente dedicada a la producción de ideas, LA. Donde δ es la tasa de depreciación de las ideas. ϕ indica la externalidad de las ideas existentes, si $\phi > 0$ entonces mientras más ideas existen mayor es la la creación de nuevas ideas. Mientras que si $\phi <0$ ocurre lo contrario. λ refleja algún grado de externalidad producto de la duplicidad de conocimiento. Si $\lambda < 1$ entonces una mayor cantidad de científicos, o gente dedicada a la producción de ideas, produce más ideas pero no en un relación 1 a 1, producto de que existe una cierta duplicidad de ideas. Si $\lambda > 1$ no existe esta duplicidad, sino por el contrario un científico más aumenta la producción de las ideas en más de uno.

b) (1 pto.) Suponga que en el largo plazo el capital crece a una tasa constante, demuestre usando la restricción de recursos de la economía (o sea la ecuación que describe la dinámica del capital) que:

$$g_y = g_k = g_A$$

donde los términos en minúscula son los términos per-cápita de las variables en mayúscula. Además se tiene que $g_x = \dot{x}/x$.

Dividiendo la ecuación (1) por L se obtiene:

$$y = \frac{Y}{L} = k^{\alpha} A^{1-\alpha} \left(\frac{L_Y}{L} \right)^{1-\alpha} \tag{3}$$

La ecuación de la acumulación del capital es:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{y}{k} - (\delta + n) \tag{4}$$

como la tasa de crecimiento del capital es constante entonces de la ecuación (4) se concluye que y y k crecen a la misma tasa ($gy = gk$). De lo contrario no es posible que $\dot{k}/k$ sea constante. Aplicando logaritmo y diferenciando la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{A}}{A} + (1-\alpha)\left(\frac{\dot{L}_Y}{L_Y} - \frac{L}{L} \right) = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{A}}{A} \tag{5}$$

donde la última igualdad proviene del hecho que como L_Y es una fracción constante de L, por lo tanto crece a la misma tasa que L. Como $gy = gk$ de la ecuación (15) se tiene que:

$$g_y = g_k = g_A$$

c) (1 pto.) Usando la ecuación (2) encuentre una expresión para g_A en función de λ, ϕ y n.

Como $g_y = g_k = g_A$ son constantes, entonces aplicando logaritmo a la ecuación:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta\frac{L_A^{\lambda}}{A^{1-\phi}}$$

y derivando se obtiene:

$$0 = \lambda\frac{\dot{L}_A}{L_A} - (1-\phi)\frac{\dot{A}}{A}$$

como $\dot{L}_A / L_A = n$ entonces la última ecuación se puede escribir:

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda n}{1-\phi} \tag{6}$$

d) (1 pto.) En el año 10.000 antes de cristo los continentes de Australia, Europa y América se separaron y no tuvieron ningún contacto hasta la época en que Cristóbal Colon descubrió América. Se sabe con bastante precisión que en el año 10.000 antes de cristo la población de Europa era mayor a la de América y esta mayor a la de Australia. Sin embargo el nivel tecnológico era similar. Usando los resultados de las partes anteriores que puede inferir sobre el nivel tecnológico de los tres continentes al momento en que Colon descubrió América. Suponga que las tasas de crecimiento de las poblaciones en los tres continentes fueron similares.

De acuerdo a la ecuación (2) la región que tiene mayor cantidad de población la tasa de crecimiento de la productividad es mayor, por lo tanto se puede concluir que la región de Europa tenía mayor nivel tecnológico en el año 1500 que los demás continentes.

e) (1 pto.) A partir del resultado en (c) qué sucede con el crecimiento económico si $\lambda = 0$. De alguna intuición a su resultado.

Si $\lambda = 0$ entonces la ecuación (2) queda:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \delta \frac{1}{A^{1-\phi}}$$

es decir mientras más ideas hay menor es la tasa de crecimiento de las ideas. En este caso por lo tanto lo óptimo no es desarrollar ideas. En este caso la tasa de crecimiento de la productividad es cero. Puesto que mientras más se desarrolla menor es su tasa.

f) (1 pto.) Isaac Newton una vez dijo:
….Si he visto más lejos que otros, es porque estoy parado en las espaldas de gigantes….
Usando esta afirmación discuta las fuentes del crecimiento del modelo recién presentado. Analice el rol de las ideas y de la población.

En el modelo recién analizado el crecimiento proviene de la producción de nuevas ideas. Sin embargo esta producción depende de cuánta gente este dedicada a la producción de ideas y cuántas ideas existen. Para correr es necesario saber caminar antes. Por lo tanto el modelo resume de buena forma la afirmación de Newton, para producir ideas es necesario que existan algunas ideas y que haya gente dedicada a la producción de ellas.