Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Auxiliar examen

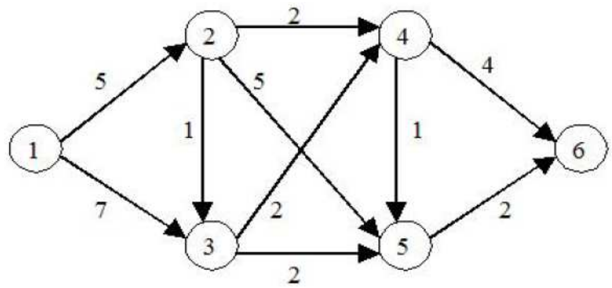
21 de Junio de 2007

Problema 1

1. Sea el siguiente problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ \text{s.a.} & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad f, g_i \in C^1 \end{array}$$

    a. Describa las condiciones necesarias para que un punto x regular sea mínimo local.
    b. Describa las condiciones suficientes para que un punto x sea mínimo global.
2. Explique qué significa que un problema de decisión pertenezca a P, qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP y qué significa que un problema de decisión pertenezca a NP-completo.
3. Demuestre que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua, en el cual no todos los costos asociados a la función objetivo son nulos.
4. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).
5. Se tiene un grafo orientado *G=[N,A]*, en este grafo existe un nodo k que es alcanzado por todos los nodos del grafo, salvo el nodo final, es decir existe un camino del nodo i al nodo k para todo i distinto del nodo final. Se le solicita encontrar la ruta más corta de todos los nodos, salvo el nodo final, al nodo k.
    a. Explique como adaptaría la red dada para poder aplicar el Algoritmo Dijkstra con ese objetivo. Describa las condiciones suficientes para que un punto x sea mínimo global.
    b. Aplique lo expresado anteriormente en (a) al siguiente ejemplo, donde se buscan las rutas más cortas al nodo 5 desde todos los nodos, salvo el nodo 6.



Problema 2 (Examen 2006-2)

Una línea aérea tiene 4 vuelos diarios a un destino determinado y en total 14 tripulantes disponibles para estos vuelos.

Por ley cada vuelo tiene que tener por lo menos 2 tripulantes; si se le asigna más tripulantes sube el beneficio para los pasajeros.

La siguiente tabla muestra el beneficio adicional de dicha asignación.

	3 tripulantes	4 tripulantes	5 tripulantes	6 tripulantes	7 tripulantes	8 tripulantes
Vuelo 1	15	18	20	25	27	30
Vuelo 2	16	20	21	22	28	29
Vuelo 3	17	18	19	23	29	29
Vuelo 4	6	9	10	12	13	14

Por ejemplo asignar 3 tripulantes al vuelo 2 genera un beneficio adicional de 16.
El problema consiste en determinar una asignación que maximice el beneficio adicional.

a. Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.
b. Resuelva el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelva el problema original aplicando programación dinámica.
c. Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
d. ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Problema 3 (Examen 2004-2)

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) ha decidido contratar a dos prestigiosos consultores italianos en optimización, Alessandro Cassado y Paolo Reinetta, a fin de que mediante la utilización de modelos matemáticos diseñen el fixture (programa de enfrentamientos entre los equipos a lo largo del torneo) del Campeonato Apertura del fútbol chileno 2005.

Los datos que les hizo llegar la ANFP son los siguientes:

- Disputarán el campeonato 20 equipos que se enfrentarán todos contra todos a lo largo de 19 fechas. Cada fecha consta de 10 partidos donde juegan los 20 equipos del torneo, y cada enfrentamiento entre dos equipos se da exactamente una vez a lo largo del campeonato.
- Cada equipo debe jugar 9 o 10 partidos en condición de local (y el resto de sus partidos en condición de visita).
- Cada equipo puede jugar a lo más 2 partidos consecutivos como local y 2 partidos consecutivos como visita.
- Cuando la Universidad de Chile juega de local, el Colo-Colo debe jugar como isita, y viceversa.
- Los clásicos (partidos entre sí de la Universidad de Chile, el Colo-Colo y la Universidad Católica) deben jugarse de la fecha 10 en adelante.

Además, se sabe que la fecha 4 y la fecha 12 serán las únicas que se disputarán en miércoles (y no en fin de semana) y que los equipos prefieren no jugar de local los días miércoles porque las recaudaciones bajan sensiblemente. Es por ello que Cassado y Reinetta han pensado en minimizar el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local.
A pesar de sus conocimientos, los consultores no han podido resolver el problema y por ello le están solicitando ayuda a los alumnos del IN34A.

1. Diseñe un modelo de programación lineal entera que minimice el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local, respetando las condiciones solicitadas por la ANFP.
2. ¿Cómo variaría el modelo si se le pide ahora que además de las condiciones mencionadas se incorpore una más que diga que obligatoriamente cada equipo debe jugar un miércoles de local y otro miércoles de visita? (o sea que cada equipo debe ser local en la fecha 4 y visita en la 12, o viceversa).

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Pauta auxiliar examen

21 de Junio de 2007

Problema 1

1.
   a. x debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker.
   b. x debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker y ademas f y gi deben ser C^1 y convexas.

2.
   a. Estar en P: Existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.
   b. Estar en NP: Existe un algoritmo no determinístico polinomial que lo resuelve o que existe un certificado verificable en tiempo polinomial.
   c. Estar en NP-Completo: Está en NP y además todo problema en NP se puede transformar polinomialmente en él.

3. El óptimo del problema lineal debe cumplir las condiciones de Karuch-Kuhn-Tucker. Si un punto es interior, todas las restricciones son no activadas. Luego u_j=0 para todo i. Se tiene que:

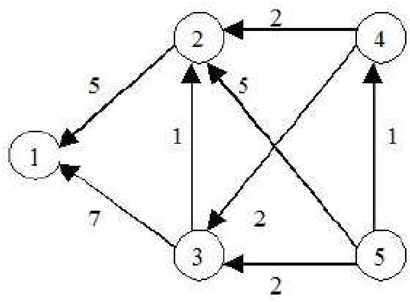
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \qquad \forall\, i.$$

   Esto no se puede cumplir ya que existe al menos un $c_i > 0$, con lo cual se llega a una contradicción. Luego un punto interior no puede cumplir Karush-Kuhn-Tucker.

4. Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.

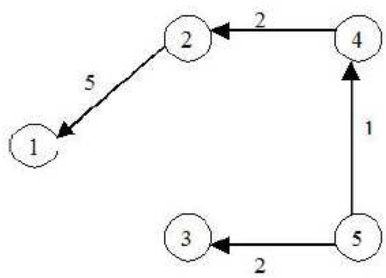
5.
   a. Primero hay que eliminar el nodo final y todos los arcos que llegan a él en el grafo *G=[N,A]*, luego hay que invertir el orden de todos los arcos y aplicar dijkstra en la forma clásica usando como nodo inicial el nodo k. Así la solución que entrega dijkstra es la justamente la pedida, solo hay que invertir el árbol solución.
   b. Aplicando lo expuesto anteriormente sobre el grafo dado, el grafo modificado quedaría como sigue:



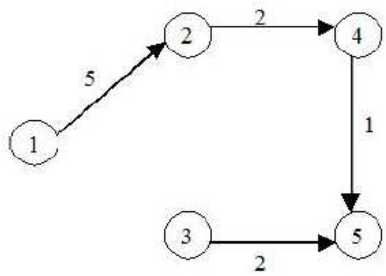
Ahora apliquemos dijkstra sobre este grafo:

- Inicializción:
  $S = \phi$, $\pi(5) = 0$, $\pi(i) = +\infty\ \forall i \neq 1$
- Iteración 1:
  $j = 5 \Rightarrow S = \{5\}$
  $\pi(2) = 0 + 5 = 5$, $P(2) = 5$
  $\pi(3) = 0 + 2 = 2$, $P(3) = 5$
  $\pi(4) = 0 + 1 = 1$, $P(4) = 5$
- Iteración 2:
  $j = 4 \Rightarrow S = \{5, 4\}$
  $\pi(2) = 1 + 2 = 3$, $P(2) = 4$
- Iteración 3:
  $j = 3 \Rightarrow S = \{5, 4, 3\}$
  $\pi(1) = 2 + 7 = 9$, $P(1) = 3$
- Iteración 4:
  $j = 2 \Rightarrow S = \{5, 4, 3, 2\}$
  $\pi(1) = 3 + 5 = 8$, $P(1) = 2$
- Iteración 5:
  $j = 1 \Rightarrow S = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

Luego el árbol solución es:



Luego, al invertir los arcos de este árbol obtenemos la solución final:



Problema 2 (Examen 2006-2)

El orden lógico para responder de esta pregunta es: c – a – b y d.

a) Puede verse que nunca se pondrán 8 tripulantes en un vuelo ya que está dominado por poner 3 tripulantes en cada vuelo (y adicionalmente le sobran 2 tripulantes, que le reportarán beneficio adicional). La primera opción tiene como máximo un beneficio de 30, mientras que la segunda tiene un beneficio mínimo de 48.

Por otro lado, puede verse también que poner 7 tripulantes tiene un beneficio máximo de 45 (haciendo las combinaciones con 1 tripulante en otro vuelo), mientras que el beneficio por poner 1 adicional en cada vuelo (es decir 3 en total) tiene beneficio mínimo de 48 y aún quedan dos tripulantes por distribuir.

Nota de corrección: Estos dos casos bastan para tener los 1,5 ptos. Si alguien elimina algo que afecta en la función objetivo, no se le descuenta en esta parte, sino que en la parte d) tiene 0 ptos. Si alguien elimina el vuelo 4 pónganle 0,55 ptos. (Es decir si eliminan esta y una más tienen en total 1,3 ptos. en esta parte, pero van a tener 0 ptos. en la parte d)).

b) **Nota de corrección: Se encuentran la resolución simplificada (izquierda) y la completa (derecha). Estas están resueltas primero para el vuelo 4 y al final para el vuelo 1, sin embargo esto podía realizarse en el orden inverso sin ningún tipo de repercusión en la solución óptima y por ende está igual de bueno (de echo la solución de la última etapa debe ser igual, independiente del orden). Si simplificaron mal el problema igual tienen todo el puntaje si es que hicieron bien la resolución.**

Cada tabla tiene 0,5 ptos. Si tienen algún error numérico se les descuenta 0,1 en la tabla por error numérico. No consideren errores de arrastre.

Las tablas se realizaron para la variable planteada en la parte c), sin embargo la variable podría haber sido cantidad de tripulantes a asignar. La resolución es análoga.

Caso no simplificado:

S_4	$x_4=0$	$x_4=1$	$x_4=2$	$x_4=3$	$x_4=4$	$x_4=5$	$x_4=6$	V_4^*	x_4^*
6	0	6	9	10	12	13	14	14	6
5	0	6	9	10	12	13	-	13	5
4	0	6	9	10	12	-	-	12	4
3	0	6	9	10	-	-	-	10	3
2	0	6	9	-	-	-	-	9	2
1	0	6	-	-	-	-	-	6	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_3	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	$x_3=6$	V_3^*	x_3^*
6	14	30	30	29	32	35	29	35	5
5	13	29	28	28	29	29	-	29	1-4-5
4	12	27	27	25	23	-	-	27	1-2
3	10	26	24	19	-	-	-	26	1
2	9	23	18	-	-	-	-	23	1
1	6	17	-	-	-	-	-	17	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$x_2=6$	V_2^*	x_2^*
6	35	45	47	47	45	45	29	47	2-3
5	29	43	46	44	39	28	-	46	2
4	27	42	43	38	22	-	-	43	2
3	26	39	37	21	-	-	-	39	1
2	23	33	20	-	-	-	-	33	1
1	17	16	-	-	-	-	-	17	0
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$x_1=6$	V_1^*	x_1^*
6	47	61	61	59	58	44	30	58	1-2

Si se hace usando la simplificación no es necesario considerar las decisiones $X_i=5$ y $X_i=6$, tal como se hizo en la clase.

c) Etapas: v =1,2,3,4 (vuelos) **(0,2 ptos.)**

Variables de decisión: X_v = Cantidad de tripulantes extra ha asignar en el vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Variables de estado: S_v = Cantidad de tripulantes que quedan para asignar al vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Recurrencia o función de transformación: $S_{v+1} = S_v - X_v$ **(0,2 ptos.)**

Función de recursión: $V_v(X_v, S_v) = BA(X_v) + V_{v+1}^*(S_{v+1})$ **(0,5 pto.)**

Función de beneficio: $V_v^*(S_v) = \max\limits_{\substack{X_v \\ s.a. X_v \leq S_v}} \{V_v(X_v, S_v)\}$ **(0,2 ptos.)**

Condiciones de Borde: $V_5^* = 0$ **(0,05 pto.)**

$S_1^* = 6$ **(0,05 pto.)**

Nota de corrección: La variable puede haber sido cantidad de tripulantes ha asignar en total. En este caso se debe exigir en las restricciones que la variable sea mayor o igual a dos para todos los vuelos, adicionalmente la condición de borde para la cantidad de tripulantes inicial cambia a 14.

BA se refiere al beneficio adicional que reporta asignar tal cantidad extra de tripulantes al vuelo en cuestión.

La recurrencia es parte de la función de recursión, por lo que no es necesario ponerla separada explícitamente si es que la función de recursión la incluye esto es, si en vez de decir $+V_{v+1}^*(S_{v+1})$**, dice** $+V_{v+1}^*(S_v - X_v)$**.**

Las condiciones de borde así como la restricción (que vale 0,1, que están incluidos en los 0,2) son parte de la función objetivo.

d) Existen dos políticas óptimas, estas son:

x_1^*	1
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	2

x_1^*	2
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	1

Y reportan un beneficio adicional de 61.

Nota de corrección: 0,25 cada una. Binarias por separado: Tienen que estar completamente bien cada una, sino cero.

Problema 3 (Examen 2004-2)

Parte 1:

Xijk =1 si i juega contra j de local en la fecha k; 0 en caso contrario

Yi = 1 si i juega sus dos partidos de local los miércoles; 0 en caso contrario

Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_i Yi$$

1) Cada equipo juega una vez por fecha

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + Xjik = 1 \qquad \forall i \qquad \forall k$$

2) Cada partido se disputa una vez en el torneo

$$\sum_{k} (Xijk + Xjik) = 1 \qquad \forall i \neq j$$

3) Cada equipo tiene 9 o 10 localías por torneo

$$9 <= \sum_{k,j\ (j\neq i)} Xijk <= 10 \qquad \forall i$$

4) Un equipo no puede jugar 3 seguidos de local

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+1) + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+2) <= 2 \qquad \forall i\ \forall k$$

4') Lo mismo para visita

5) La U (1) y el Colo-Colo (2) no pueden ser simultáneamente locales

$$\sum_{j\neq 1} X1jk + \sum_{j\neq 2} X2jk = 1 \quad \forall k$$

5') Idem 5 para visita

6) Los clásicos de la fecha 10 en adelante

Xijk =0 para todo (i,j) formado por 2 de los 3 grandes y k<=9

7) Condición de variables Yi

$$2*Yi <= \sum_{j\neq i} Xij4 + \sum_{j\neq i} Xij12 <= 1 + Yi \quad \forall i$$

Parte 2:

Condición de miércoles: el que es local en la 4ª tiene que ser visitante en la 12ª

$$\sum_{j\neq i} Xij4 + \sum_{j\neq i} Xij12 = 1 \quad \forall i$$

Retiro las variables Yi y la condición 7). Como busco ahora sólo una solución factible en la función objetivo puedo poner cualquier cosa.

Dudas y/o comentarios a:
Leonardo López
lelopez@ing.uchile.cl