Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Auxiliar Programación Dinámica

Problema

En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de K botones, los cuales debe distribuir en los M barrios de su comuna. (con $K > M$).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio m se instalan k botones, el alcalde ganará $P_m(k)$ votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Problema 2

El Gerente Comercial de una compañía está estudiando la introducción de nuevos productos para la próxima temporada, por lo que debe decidir qué productos comercializar y cuántas unidades de c/u producir.
La producción de cada uno de estos productos, según lo informado por el Gerente de Operaciones, tiene asociado un costo fijo que depende del tipo de producto, igual a $\mathbf{C_i}$.
Además, la producción de cada unidad de producto i requiere utilizar un porcentaje de la capacidad disponible en la planta igual a $\mathbf{K_i}$. Suponga que no existen otros costos de producción.

Por otra parte, dadas las condiciones de mercado, sabe que sus ingresos por unidad vendida serán $\mathbf{U_i}$ y que el mercado a lo mas compraría $\mathbf{D_i}$ unidades del producto i elaborado por la compañía.

a. Plantee el modelo de programación dinámica que apoye las decisiones de producción para el problema general descrito, si se busca maximizar las utilidades de la firma.

Supongamos ahora que los productos en evaluación son 3 y que se cuenta con la siguiente información relevante:

	P 1	P 2	P 3
Costo fijo	3	2	0
Ingreso por unidad vendida	2	3	1
% de capacidad usada por cada unidad	20	40	20

Como se ve en la primera fila de la tabla anterior, el gerente sabe que 2 de estos productos requieren un costo fijo importante. También conoce el ingreso que recibirá la empresa por cada unidad producida, una vez que la producción está en marcha.
Además, como se ve en la tercera fila de la tabla, se sabe el porcentaje de capacidad disponible que ocupa cada unidad de producto al ser fabricada. Por condiciones del mercado se sabe que se pueden vender sólo 3 unidades de producto 1, mientras que es posible vender todas las unidades que se puedan fabricar de los otros productos.

b. En esta situación resuelva, ocupando el modelo de programación dinámica planteado en la parte anterior, la estrategia de producción óptima.

Solución

Problema 1

De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas**:
  Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
- **Variables de estado**:
  S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión**:
  X_m, el número de botones asignados al barrio m.
- **Recurrencia de estados**:

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios**:

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

  Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde**:

$$V^*_{M+1}(\%) = 0$$
$$S_1 = K$$

Problema 2

a)

- Etapas: Productos: n=1,2,3,...,N
- Variables de Decisión: X_t = Unidades de producto n a producir.

$$Y_t \begin{cases} \text{Si se fabrica producto n} \\ \text{Si no} \end{cases}$$

- Variables de Estado: S_n = % de la capacidad total disponible para producir producto n.
- Recurrencias: $S_{n+1} = S_n - K_n \cdot X_n$
- Beneficio Acumulado:

$$V_n(S_n, X_n, Y_n) = U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}{}^*(S_{n+1})$$

- Beneficio Máximo:

$$V_n{}^*(S_n) = \max_{\substack{X_n, Y_n \\ s.a. 0 \leq X_n \leq \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n)}} V_n(S_n, X_n, Y_n)$$

- Condiciones de borde: $S_1 = 100$
  $V^*_{N+1} = 0$

b)

Producto 3:

S_3/X_3	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	$X_3^\star$
100 %	0	1	2	3	4	5	5	5
80 %	0	1	2	3	4		4	4
60 %	0	1	2	3			3	3
40 %	0	1	2				2	2
20 %	0	1					1	1
0 %	0						0	0

Producto 2:

S_2/X_2	0	1	2	$V_2[S_2]$	$X_2^\star$
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

Producto 1:

S_1/X_1	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	$X_1^\star$
100 %	5	3	4	5	5	0-3

Por lo tanto existen 3 configuraciones óptimas:

$X_1^\star$	$X_2^\star$	$X_3^\star$
0	0	5
3	0	2
0	2	1