Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Richard Weber
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Auxiliar N°6

16 de Mayo de 2007

Problema 1

La empresa Máxima S .A., luego del fracaso de Pulschuper para encontrar a la famosa maleante Carmen San Diego, decidió despedirla, motivo por el cual Pulschuper debe abandonar la oficina y no volver nunca más.
El problema es que solo llevó una mochila pequeña con capacidad de 2lt. y en su estante tiene su laptop, una foto de su hija, su polerón favorito y un lápiz. Si los utensilios utilizan una capacidad de 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3 respectivamente y tienen utilidades de 8, 10, 5 y 1 respectivamente, utilice el algoritmo "Branch & Bound" para ayudar a Pulschuper a decidir qué utensilios llevarse a su casa

Problema 2

El presidente de su equipo favorito de fútbol ha pedido su ayuda para decidir qué momento es el indicado para vender a cada uno de sus I jugadores estrellas del momento.
Un experto del mercado de jugadores ha estimando que por cada mes que el jugador i permanece en el club, su pase se valora en c_i miles de euros. Sin embargo, el no vender jugadores perjudica la imagen del club ante los equipos europeos, por lo tanto, el experto ha recomendado que el promedio ponderado de los plazos de venta de los jugadores no supere los M meses. El experto ha estimado el ponderador para cada jugador, indicando que el ponderador del jugador i es w_i.
Fuentes internas del club, le han indicado que por cada mes que permanece el jugador i en el club, el descontento del plantel aumenta en v_i medido en unidades de descontento por mes. El presidente desea mantener un ambiente de tranquilidad al interior del plantel, lo cual sucede solo si el nivel de descontento no supera el nivel crítico V.

1. (2 puntos) Suponiendo que las transacciones de los jugadores sólo pueden realizarse el primer día de cada mes, formule el problema de programación lineal entera que permita encontrar los plazos de venta óptimos de cada jugador.

2. (3 puntos) Resuelva el problema planteado en el punto anterior, utilizando el algoritmo de "Branch & Bound", para la siguiente instancia:

I	c_1	c_2	w_1	w_2	M	v_1	v_2	V
2	5	8	0.5	0.5	3	5	9	45

   Nota: Los subproblemas lineales que genere pueden resolverse gráficamente.

3. (1 Puntos) Si antes de comenzar a resolver un problema entero con "Branch & Bound" usted conociera alguna solución entera factible. ¿Podría aprovechar esta información para hacer más eficiente el algoritmo? ¿Cómo?

Problema 3

1. Suponga que tiene que resolver un problema lineal entero y un problema lineal continuo. Si no tuviera más información que esta, ¿cuál diría que es más difícil? Justifique la respuesta.

2. Suponga que aplica el algoritmo SIMPLEX para resolver la relajación lineal de un problema de programación lineal entera. ¿En qué casos puede afirmar que el óptimo obtenido es el óptimo del problema entero?

3. Explique cuáles son las razones para no ramificar un nodo en el algoritmo de B&B para Programación Entera.

4. Si en el algoritmo de "Branch & Bound" pretende obtener rápidamente una cota para el valor de la función objetivo, ¿elegirá ramificar a lo ancho o en profundidad? Justifique.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Richard Weber
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Auxiliar N°6

16 de Mayo de 2007

Problema 1

Variables:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva notebook} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad x_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva poleron} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva foto} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad x_4 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva lapiz} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

$$1,2x_1 + 0,6x_2 + 0,8x_3 + 0,3x_4 \leq 2 \qquad \text{Capacidad de la Mochila}$$

Función Objetivo

$$\max \quad z = 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 + x_4$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_i \in \{0,1\} \ \forall i = 1...4$$

Para obtener el óptimo del problema relajado, se calculan las razones beneficio/volumen:

Laptop: $8/1,2 = 6,67$ Polerón: $5/0,8 = 6,25$

Foto: $10/0,6 = 16,67$ Lápiz: $1/0,3 = 3,33$

Para obtener la solución se llena la mochila llenándola con los objetos que tienen mayor razón beneficio/costo hasta llenarla. La solución óptima del problema relajado queda

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0,25; x_4 = 0; Z_0 = 19,25$$

Ramificamos para x_3,

x_3 = 1 ==> x_1=0,5; x_2=1; x_3=1, x_4=0; z_1=19

x_1 = 1 ==> x_1=1; x_2=0; x_3=1, x_4=0; z_2=13 *Incumbente*: Z_2=13
x_1 = 0 ==> x_1=0; x_2=1; x_3=1, x_4=1; z_3=16 *Incumbente*: Z_3=16

x_3=0 ==> x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=2/3; z_4=18,66

x_4 = 1 ==> x_1=11/12; x_2=1; x_3=0, x_4=1; z_5=18,33

x_1 = 1 ==> x_1=1; x_2=5/6; x_3=0, x_4=1; z_6=17,33

x_2 = 1 ==> infactible
x_2 = 0 ==> x_1=1; x_2=0; x_3=0, x_4=1; **z_7=9 Peor que el incumbente**

x_1 = 0 ==> x_1=0; x_2=1; x_3=0, x_4=1; **z_8=11 Peor que el incumbente**

x_4 = 0 ==> x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=0; z_9=18 Incumbente: Z_9=18

La solución óptima es

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = x_4 = 0; \quad z = 18$$

Problema 2

1.
Variables de decisión:
x_i =número de meses más en que será vendido el jugador i
Función objetivo:
$$MaxZ = \sum_{i=1}^{I} c_i x_i$$
Restricciones

- Plazo de venta promedio ponderado no debe superar los M meses
$$\sum_{i=1}^{I} w_i x_i \leq M$$
- Mantener la tranquilidad del plantel
$$\sum_{i=1}^{I} v_i x_i \leq V$$
- Naturaleza de las variables
$$x_i \in N \quad \forall i = 1,...,I$$

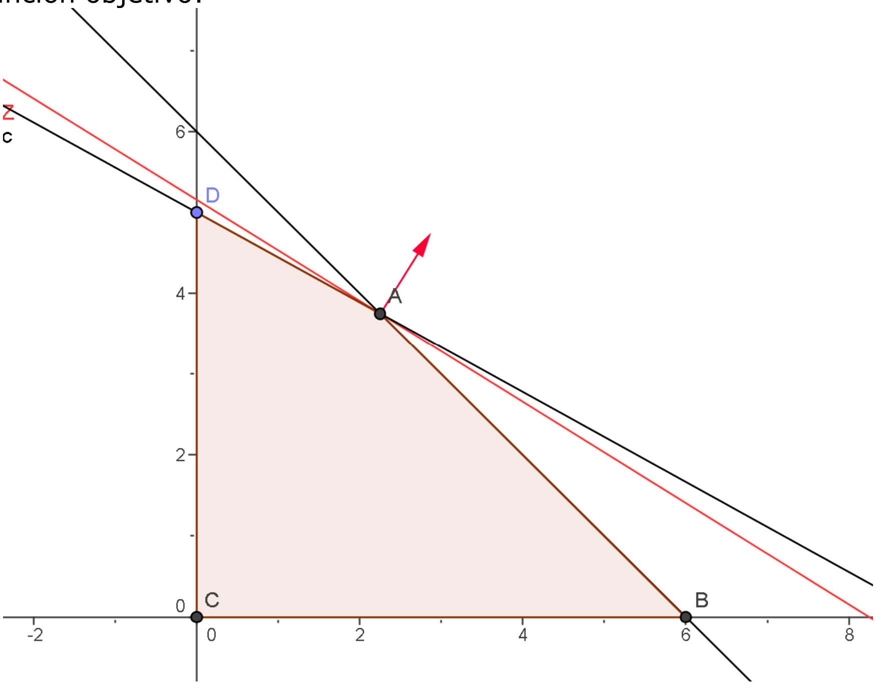
2. En este caso el problema queda:

$$\begin{aligned}(PE) \quad & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & s.a \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \in N\end{aligned}$$

El primer paso de B&B es inicializar el incumbente en $\bar{z} = -\infty$. Luego, debemos encontrar la solución del problema relajado de (PE):

$$\begin{aligned}(P_0) \quad & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & s.a \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \quad \textbf{(1)} \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \quad \textbf{(2)} \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Este problema puede ser resuelto gráficamente. A continuación se observa la región factible y función objetivo:



El óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones (1) y (2), por lo tanto, la solución es: x_1=2.25; x_2=3.75 y z_0=41.25.

Ramificaremos en profundidad para obtener rápidamente un valor más alto para el incúmbete.

Si ramificamos x_2, se generan los problemas:

$$(P_1)\quad \begin{aligned} &MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ &s.a \\ &0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \ge 4 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (P_2)\quad \begin{aligned} &MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ &s.a \\ &0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \le 3 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Resolviendo (P1), se obtiene que: x_1=1.8; x_2=4 y z_1=41, la que tampoco es una solución entera. Ramificado x_1, se generan los problemas:

$$(P_3)\quad \begin{aligned} &MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ &s.a \\ &0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \ge 4 \\ &x_1 \ge 2 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (P_4)\quad \begin{aligned} &MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ &s.a \\ &0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ &x_2 \ge 4 \\ &x_1 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Es posible observar que (P3) resulta infactible, pues si x_1 y x_2 son mayores o iguales que 2 y 4 respectivamente, la restricción número 2 no se satisface.
Resolviendo (P4), obtenemos que: x_1=1; x_2=4.44 y z_4=40.55. Aún la solución no es entera, por lo que debemos ramificar x_2, generando los problemas:

$$(P_5)\quad \begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & s.a \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (P_6)\quad \begin{aligned} & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ & s.a \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolviendo (P5), obtenemos que: x_1=1; x_2=4 y z_5=37, que resulta ser nuestra primera solución entera. Como $z_5 \geq \bar{z}$, entonces actualizamos el incumbente: $\bar{z} = 37$.
Resolviendo (P6), se obtiene: x_1=0; x_2=5 y z_6=40, que es una solución entera mejor que la anterior, por lo que actualizamos el valor del incúmbete: $\bar{z} = 40$.
Con esto, terminamos la rama que nace desde el problema (P1).

Resolviendo (P2), se obtiene que x_1=3; x_2=3 y z_2=39. Cómo $z_2 \leq \bar{z}$, entonces la solución es peor que el incumbente por lo que no es necesario seguir ramificando.

Luego, como la mejor solución entera encontrada es la del problema (P6). La solución óptima del problema (PE) es:

$$x_1{*}=0;\ x_2{*}=5 \text{ y } z{*}=40$$

3. Si, es posible aprovechar esta información. Como se conoce una solución factible para el problema entero, podríamos utilizar su valor en la función objetivo z' como incumbente inicial. Es decir, si se trata de un problema de maximización, podríamos utilizar $\bar{z} = z'$ en lugar de $\bar{z} = -\infty$. Con esto se espera poder eliminar ramas que tienen valores en la función objetivo menores que z' desde un comienzo, pues sabemos que seguir ramificándolas no tiene sentido pues las soluciones, que ya sabemos que no son óptimas, solo pueden empeorar. Dependiendo de la calidad de la solución inicial z', se pueden obtener aumentos considerables en la eficiencia del algoritmo.

Problema 3

1. El problema entero debería ser más difícil, ya que es NP-completo, mientras que el PPL es polinomial (P).

2. Si el óptimo de la relajación lineal es entera, luego significa que esta solución además cumple las restricciones de integralidad que fueron relajadas, por lo cual el óptimo del problema relajado es el óptimo del problema entero.

3.
    - El nodo generó un problema infactible.
    - La solución del problema en ese nodo es entera.
    - La solución del problema en ese nodo es fraccionaria pero es "peor" que alguna entera que ya ha sido obtenida (el valor de la incumbente).

4. Para mejorar más rápido la cota de la función objetivo se recomienda ramificar en profundidad. Al ramificar en profundidad, se acota el problema de una rama en particular y, por lo tanto, nos acercamos más rápidamente a soluciones enteras, encontrando más rápidamente "buenos" valores para el incumbente. Esto permite la poda de ramas, que posteriormente deben ser revisadas por el algoritmo, que tienen problemas con valores de su función objetivo peores que el incumbente encontrado.

Dudas y/o comentarios a:
Leonardo López
lelopez@ing.uchile.cl