Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Richard Weber
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Auxiliar N°5
25 de Abril de 2007

Problema 1

a) ¿Cómo sabe usted que una forma canónica entrega una solución básica no factible? Explique como resolvería usted un problema de programación lineal a partir de una forma básica no factible.
b) Dado un problema de programación lineal en forma estándar, defina el problema que se resuelve para la Fase I del SIMPLEX. Explique por qué en este problema auxiliar se puede obtener una solución inicial factible en forma sencilla.
c) Comente la siguiente afirmación: "La Fase I del Algoritmo Simplex finaliza cuando todas las variables artificiales salen de la base".

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad Máx \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a \quad & x_1 + x_3 \le 2 \\ & x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_3 \ge 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

a) Transforme el problema llevándolo a forma estándar.
b) Aplicando Fase I, determine una solución básica factible inicial.
c) Resuelva el problema utilizando Simplex.
d) Indique qué características presenta esta solución óptima:
   i. ¿Es el problema no acotado?
   ii. ¿Existen óptimos alternativos?
   iii. ¿Existen restricciones redundantes?
   iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

Problema 3

I) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad Máx \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m \\ & x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

a) Amplifique cada restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$. Luego, obtenga la inecuación resultado de sumar cada una de las m restricciones.
b) Determine bajo qué condiciones el termino $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ es una cota superior a la función objetivo del problema (P).
c) Escriba el problema que le permitiría encontrar la mínima cota superior a la función objetivo del problema (P). ¿Con que nombre conoce este problema?

II) Responda las siguientes preguntas:

a) Plantee y describa con palabras el significado del Teorema de la Holgura Complementaria.
b) Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.

Problema 4

Sea (P) el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & Máx & z = 2x_1 + x_2 \\
 & s.a & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & & 3x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) Grafique el conjunto factible de (P) y determine la solución óptima gráficamente. ¿Cuál es el valor de z^*?
b) Formula el dual del problema (P). Encuentre la solución óptima del dual usando el teorema de holgura complementaria y verifique que el valor del óptimo de la función objetivo de ambos problemas coinciden. ¿Cuánto vale el costo reducido óptimo de la variable de holgura correspondiente a la primera restricción del problema (P)?
c) Suponga que x_1 y x_2 representan la cantidad a producir de dos productos, y que las restricciones 1,2 y 3 representan la utilización de 3 insumos diferentes A, B y C. Si a usted le dan dinero para invertir en insumos, ¿en cuál invertiría? Justifique.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Richard Weber
Auxiliares: Leonardo López
Gonzalo Romero
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar N°5
25 de Abril de 2007

Problema 1

a) Si $\bar{b}_i < 0$ entonces la forma canónica entrega una solución básica no factible. Se debe agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego la fase 2.

b) El problema de Fase I tiene la siguiente estructura:

$$Ax + It = b$$
$$x, t \geq 0$$

Donde $t \in R^m$, t variables artificiales.

Para recuperar el problema original, se debe forzar a todas las variables artificiales a tomar valor 0. (Ax = b , Ax + It = b con t = 0).

$$\text{Min } w = \Sigma\, ti$$
$$Ax + It = b$$
$$b, x, t \geq 0$$

La solución básica factible inicial es x = 0 y t = b, B = I. Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial.

c) Falso. La fase I termina una vez que se encuentra el óptimo w* del problema auxiliar. Sin embargo, la base óptima puede contener variables auxiliares. Por ejemplo, si w*>0 el problema original es infactible y necesariamente al menos una de las variables auxiliares es básica.

Problema 2

a) Forma estándar:

$$\text{Min } -z = -x_1 - x_2 - 3x_3$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$
$$x_3 - x_6 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

b) Para aplicar Fase I, se puede resolver alguno de los dos siguientes problemas:

$$\text{Min } t_1 + t_2 + t_3$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 + x_4 + t_1 = 2$$
$$x_2 + x_3 + x_5 + t_2 = 2$$
$$x_3 - x_6 + t_3 = 1$$
$$x_i \geq 0, t_i \geq 0$$

O bien, uno simplificado:

$$\text{Min } t_1$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$
$$x_3 - x_6 + t_1 = 1$$
$$x_i \geq 0, t_i \geq 0$$

Resolvamos este último problema:

Iteración 1:

$$B = \begin{matrix} X_4 & X_5 & t_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = I \Rightarrow \overline{b} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ t_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,0,0) - (0,0,1) \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = (0,0,-1,1)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_3 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet 3} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 3} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1} \right\} = \min \{2,2,1\} = 1 \quad \begin{matrix} X_4 & X_5 & t_1 \end{matrix}$$

Entonces, t_1 sale de la base.

Iteración 2:

$$B=\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}X_4 & X_5 & X_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \overline{b}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_4\\ x_5\\ x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ t_1\\ x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,1,0) - (0,0,0)$$

$$\overline{c}_R = (0,0,1,0)$$ Solución óptima

Como la solución óptima nos indica que $t_1 = 0$, la suma óptima de variables artificiales es nula y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible para el problema original. Además, como ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces podemos tomar dicha base como vértice inicial para la fase II.
Luego, la base óptima de Fase I:

$$B=\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix}X_4 & X_5 & X_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Es una base primal factible para el problema original.

NOTA:
Si la suma óptima de variables artificiales es nula, pero existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.
Si la suma óptima de variables artificiales es no nula, significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.

c) **Iteración 1 (Fase II):**
De acuerdo a la parte b) partimos con la base factible:

$$B=(A4,A5,A3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overline{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_r=(-1,-1,-3)\Rightarrow \text{Solución no es óptima por lo que entra } x_6$$

$$\overline{A}_{\bullet 6}=B^{-1}\cdot A_{\bullet 6}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i6}};\bar{a}_{i6}>0\}=\text{Min}\{\frac{1}{1};\frac{1}{1}\}=1$$

En el criterio de salida hay empate. Luego, podemos predecir que encontraremos una solución degenerada. Escojamos X_4 como variable que sale de la base (podríamos escoger X_5 también).

Iteración 2 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B=(A6,A5,A3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r=(2,-1,3)\Rightarrow \text{Solución no es óptima y sale } x_2$$

$$\bar{A}_{\bullet 2}=B^{-1}\cdot A_{\bullet 2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}};\bar{a}_{i2}>0\}=\text{Min}\{\frac{0}{1}\}=0\Rightarrow \text{Sale } x_5$$

Iteración 3 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B=(A6,A2,A3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\bar{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r=(1,1,2)$$

Luego, como todos los costos reducidos son mayores que cero, la solución es óptima. Entonces, en el óptimo las variables básicas valen: $X_6=1$; $X_2=0$; $X_3=2$ y las no básicas valen todas cero: $X_1=0$; $X_4=0$; $X_5=0$.

d)

i. ¿Es el problema no acotado?

El problema es acotado pues: -z*= -6 => z*=6

ii. ¿Existen óptimos alternativos?

No existen múltiples soluciones óptimas, pues $\bar{c}_R>0$ en el óptimo, es decir, no existe ninguna variable no básica con costo reducido nulo.

iii. ¿Existen restricciones redundantes?

No existen restricciones redundantes. Además, ninguna restricción es una combinación lineal de las otras.

iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

La solución óptima es degenerada pues el vértice óptimo con cualquiera de sus bases posee una variable básica igual a cero.

Problema 3

I.

a) Tenemos el problema:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} Máx & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,...,m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,...,n \end{array}$$

Si amplificamos la restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq b_i y_i$$

Luego, si sumamos las m ecuaciones obtenemos:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq b_i y_i \quad / \quad \sum_{i=1}^{m} ( )$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

b) Debemos encontrar una condición bajo la cual el lado derecho de la inecuación anterior es una cota superior al valor de la función objetivo del problema (P).
Notemos que podemos intercambiar las sumatorias del lado izquierdo de la inecuación:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Como el término $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i$ sólo depende de j llamémoslo d_j:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Notemos que si $d_j \geq c_j \quad \forall j = 1,...,n$ entonces se cumplirá que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Y por lo tanto, el término $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ será una cota superior al valor de la función objetivo del problema (P).

c) Debemos encontrar el mínimo valor de $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ bajo la condición de que $d_j \geq c_j \quad \forall j = 1,...,n$. Como $d_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i$, entonces el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} (D) \quad & Mín \quad w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & s.a \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1,...,n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1,...,m \end{aligned}$$

Este problema (D) es el Dual del primal (P). Acabamos de verificar el teorema débil de dualidad, que establece que si tememos un problema de maximización entonces el valor de la función objetivo de su dual, evaluada en cualquier solución factible (del dual), siempre es una cota superior del valor de la función objetivo del primal, evaluada en cualquier solución factible (del primal).
Es importante mencionar que si el problema primal (P) tiene solución óptima entonces el dual (D) tiene solución óptima y el valor óptimo de sus funciones objetivo tienen el mismo valor. Es decir, $z^* = w^*$. (Teorema fundamental de dualidad).

II.

a)

Sean $x_1, \ldots, x_n$ solución factible del primal e $y_1, \ldots, y_m$ solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para optimalidad simultanea de x e y:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ y/o } x_j^* = 0 \quad \forall j \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ y/o } x_j^* = 0 \quad \forall i$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \left(A_{i\bullet} \cdot x^* - b_i\right) \cdot y_i^* &= 0 \qquad \forall i \\ \left(c_j - y^* \cdot A_{\bullet j}\right) \cdot x_j^* &= 0 \qquad \forall j \end{aligned}$$

Lo que otorga una condición necesaria y suficiente para que x* e y* sean óptimos.

b)

R. Las variables duales en el óptimo representan el valor unitario en $ del recurso i. También se puede decir que es la disponibilidad a pagar por alguna unidad de recurso i. Justificar que el beneficio óptimo con el recurso i modificado en t_i unidades (t_i menor que un cierto ξ) es igual a:

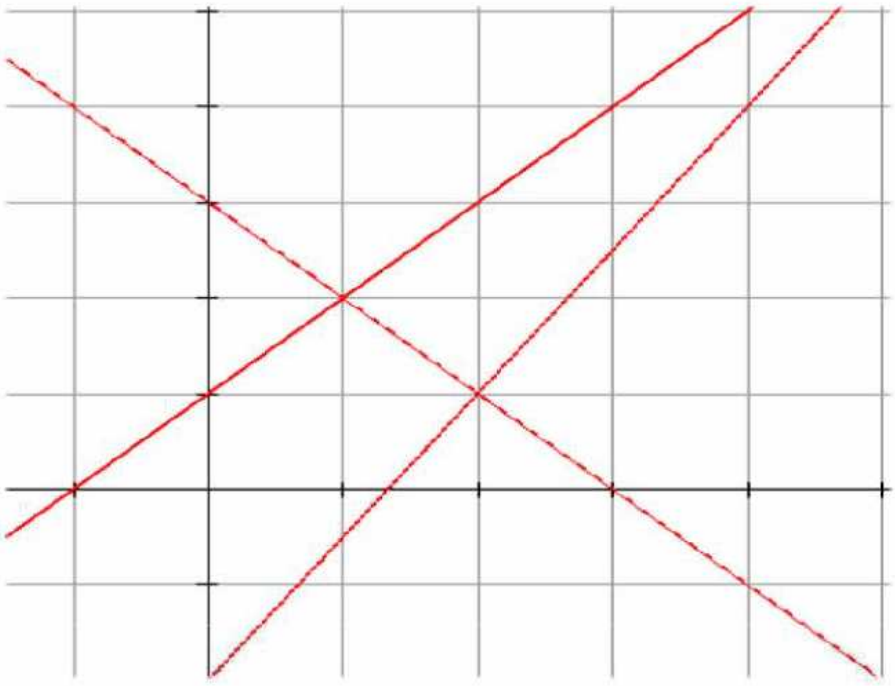
$$z^* + \Sigma\, t_i\, y_i^*$$

Donde, z^* el óptimo del problema original e y_i^* óptimo dual del problema original.

Problema 4

a)

Gráficamente se observa:



El óptimo se encuentra donde las restricciones (1) y (3) son activas, luego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

entonces, los valores en el óptimo son: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$ y $z^* = 5$.

b)

Sea (D) el dual del problema (P), el cual queda:

$$\text{mín } w = 3y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{aligned} s.a. \\ y_1 - y_2 + 3y_3 &\geq 2 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 &\geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Del Teorema de Holgura Complementaria se tiene la condición necesaria y suficiente para que x^* e y^* sean óptimos.

$$\begin{aligned} (A_{i\bullet}x^* - b_i)y_i^* &= 0 \quad i = 1, ..., m \\ (c_j - y^*A_{\bullet j})x_j^* &= 0 \quad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1^* = 2 &\implies y_1^* - y_2^* + 3y_3^* = 2 \\ x_2^* = 1 &\implies y_1^* + y_2^* - 2y_3^* = 1 \end{aligned}$$

Como la restricción (2) no es activa, entonces $y_2^* = 0$. Entonces, resolviendo el sistema anterior se tiene que: $y_1^* = \frac{7}{5}$, $y_2^* = 0$ y $y_3^* = \frac{1}{5}$. Luego, el valor de la función objetivo del dual queda:

$$\text{máx } w = 3 \cdot \frac{7}{5} + 0 + 4 \cdot \frac{1}{5} = 5 = z^*$$

Ahora, sea x_3 la variable de holgura de la restricción (1) de (P).

$$\bar{c_3} = c_3 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 3} = -\pi^* A_{\bullet 3}$$

donde $\pi^* = y^*$. Además, en este caso $A_{\bullet 3} = \hat{e_1}$, vector canónico.

Entonces se tiene que:

$$\bar{c_3} = -\pi_1^* = -y_1^* = -\frac{7}{5}$$

c)

Dado que $y_1^* > y_3^* > y_2^*$, conviene invertir en el insumo A pues al aumentar en una unidad su cantidad, aumenta en $\frac{7}{5}$ el valor de la función objetivo, que corresponde al valor de la producción de los productos.

Dudas y/o comentarios a:
Leonardo López
lelopez@ing.uchile.cl