Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización

Profesor: Guillermo Durán.
Daniel Espinoza.
Richard Weber.
Auxiliares: Leonardo López.
Gonzalo Romero.
Rodrigo Wolf.

Auxiliar Nº 4
18 de abril del 2007

Pregunta Nº 1

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{(P) max} \quad & 2X_2 - X_1 \\ \text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 \leq 15 \\ & 4X_2 - X_1 \leq 20 \\ & 4X_2 + 7X_1 \leq 84 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva utilizando Simplex matricial comenzando en el origen. Indique en el gráfico lo que está sucediendo en cada iteración (interpretando variables básicas y no básicas).

Pregunta Nº 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{(P) max} \quad & 4X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ & -X_1 + X_2 \leq 0 \\ & X_2 \leq 2 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolver utilizando Simplex.

Pregunta Nº 3

1. ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema?
2. Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?
3. ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?
4. ¿Cuándo se dice que una solución básica es degenerada?

Pauta Auxiliar Nº 4
18 de abril del 2007

Pregunta Nº 1

Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
(P^*)\ \min \quad & -2X_2 + X_1 \\
\text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 + X_3 = 15 \\
& 4X_2 - X_1 + X_4 = 20 \\
& 4X_2 + 7X_1 + X_5 = 4 \\
& X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Comenzamos del origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2. Las variables básicas son X_3, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix}
$$

Vemos si el punto de partida es óptimo analizando los costos reducidos:

$$
\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (1 \quad -2) - (0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \overline{c_R} = (1 \quad -2)
$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_2.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{a_{is} \geq 0} \left\{ \dfrac{\overline{b_i}}{a_{is}} \right\} = \min \left\{ \dfrac{15}{5} \quad \dfrac{20}{4} \quad \dfrac{84}{4} \right\} \Rightarrow$ sale X_3.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_1 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/5 & 0 & 0\\ -4/5 & 1 & 0\\ -4/5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\\ 7 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R}=B^{-1}\cdot R=\begin{pmatrix}-3/5 & 1/5\\ 7/5 & -4/5\\ 47/5 & 0\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}15\\ 20\\ 84\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}3\\ 8\\ 81\end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R}=c_R-c_B\cdot\overline{R}=(1 \quad 0)-(-2 \quad 0 \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}-3/5 & 1/5\\ 7/5 & -4/5\\ 47/5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{c_R}=(-1/5 \quad 2/5)$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_1.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{a_{is}\geq 0}\left\{\dfrac{\overline{b_i}}{a_{is}}\right\}=\min\left\{\dfrac{40}{7} \quad \dfrac{405}{47}\right\}\Rightarrow$ sale X_4.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_4 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_1 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5 & -3 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/7 & 3/7 & 0\\ -4/7 & 5/7 & 0\\ 32/7 & -47/7 & 1\end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \overline{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 45/7 \\ 40/7 \\ 128/7 \end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (0 \quad 0) - (-2 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{c_R} = (1/7 \quad 2/7)$$

$\Rightarrow$ Estamos en el óptimo.

Este es: $X_1 = 40/7$, $X_2 = 45/7$ y el valor de la función objetivo es $z = 50/7$

Lo importante a indicar gráficamente es que comienzan en el punto (0,0), se mueven al (0,3) y luego terminan en el $(40/7, 45/7)$. Estos valores los determinan las variables básicas y no básicas. Cuando una variable artificial sale de la base, quiere decir que se hace cero, y por tanto la restricción asociada a esa variable básica es activa y nos encontramos en el punto donde lo es.

Pregunta Nº 2

Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$\begin{aligned} (P^*) \min \quad & -4X_1 - 2X_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9 \\ & -X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ & X_2 + X_5 = 2 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tomemos como base a la identidad.

$$\overline{b} = B^{-1}b = I \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{R} = B^{-1}R = I\,R\ ;\ R = \begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B\overline{R} = (-4,-6) - (0,0,0)\ \overline{R} = (-4,-6) \leq 0$$

Por lo que entra x2 a la base, ya que -6 es el menor costo reducido, y -6 esta asociado a x2

Veamos ahora que variable sale

$$\text{Min}\ \{\ \begin{array}{ccc} x3 & x4 & x5 \\ \frac{9}{3}, & \frac{0}{1}, & \frac{2}{1} \end{array}\ \} = 0 \ \rightarrow\ \text{x4 sale}$$

Luego

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x3 & x2 & x5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \ \rightarrow\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \ \rightarrow\ \overline{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B\overline{R} = (-4, 0) - (0, -6, 0) \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (-10,6) \leq 0 \quad \text{por lo que entra x1}$$

Utilicemos ahora el criterio de salida

Min $\{ \frac{9}{5}, \frac{2}{1} \} = \frac{9}{5}$ $\rightarrow$ x3 sale de la base

OJO : $\frac{0}{-1}$ no se considero porque el criterio de entrada nos dice que solo tomemos en cuenta los valores $\overline{ais} \geq 0$ y claramente -1 es menor que cero

Así llegamos a:

$$B = \begin{matrix} x1 & x2 & x5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{matrix} x3 & x4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 9/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B \overline{R} = (0,0) - (-4, -6, 0) \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = (2, 0) \geq 0$$

Luego $\overline{b} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 9/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \end{pmatrix}$

Por su parte la funciòn objetivo evaluada en el punto optimo vale $z = 4 \cdot \frac{9}{5} + 6 \cdot \frac{9}{5} = 18$

Pregunta Nº 3

1. Un vértice será óptimo si todos los costos reducidos no básicos son mayores o iguales a 0.

2. Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido igual a 0, entonces el problema admite óptimos alternativos.

3. El problema es no acotado si existe una variable no básica con costo reducido negativo, tal que la columna de R (con A = [B | R]) asociada a ella tiene sólo elementos negativos.

4. Una solución básica es degenerada cuando existe al menos una variable básica x_b igual a 0.

Dudas y Comentarios a:
Gonzalo Romero - gromero@ing.uchile.cl