



Profesores: Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Richard Weber, Gabriel Weintraub
Auxiliares: Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Andrés Pardo, Juan Pablo Troncoso, Richard Vega

I

a) Comente o responda las siguientes preguntas.

- En 1972 Klee and Minty demostraron que el algoritmo Simplex para resolver problemas de optimización lineal tenía una complejidad exponencial. A pesar de ello, en la actualidad este procedimiento aún es el más empleado para ese tipo de problemas. ¿Cómo se explica esta aparente contradicción? (Para responder esta pregunta no es necesario conocer específicamente el algoritmo Simplex.)
- ¿La segunda Ley de Newton (fuerza igual a la masa por la aceleración) corresponde a un modelo matemático? ¿Cabe dentro del ámbito de la Investigación Operativa? ¿Por qué sí o por qué no?
- En clases se vieron ejemplos de modelos de control de inventarios en los cuales el objetivo era minimizar los costos totales. ¿De un ejemplo sobre cómo validaría uno de estos modelos?

b) Optimización Irrestricta.

- Mencione las desventajas del método de Newton.
- Considere la función $f(x, y) = ye^{x-1} + \frac{y^3}{3} - x - 2y$. Analice su convexidad. Verifique si el punto (1,1) es estacionario y concluya sobre si es un mínimo global.
- Considere una función f dos veces continuamente diferenciable y tal que su hessiano es siempre definido positivo. Escriba la estructura general de un método de descenso que en cada iteración utilice la misma dirección que el método de Newton y escoja el “paso λ ” de la misma forma que en el método del Gradiente.

II

Una empresa fabrica dos tipos de productos líquidos (P_1, P_2) a partir de 4 componentes líquidos (C_1, C_2, C_3, C_4). No hay ningún componente ni producto en stock. (almacenados previamente)

Los componentes tienen los siguientes precios (en unidades monetarias por litro (UM/lit)) y disponibilidades (en litros):

	C_1	C_2	C_3	C_4
Precio (en UM/lit)	10	12	30	5
Disponibilidad (en litros)	100	1000	5000	200

Existen restricciones acerca de la contribución de los componentes a los productos según la tabla siguiente:

Producto	Restricciones de C ₁	Restricciones de C ₂	Restricciones de C ₃	Restricciones de C ₄
P ₁	máx. 10%	min. 5%	-	máx. 30%
P ₂	máx. 15%	-	min. 12%	máx. 60%

Durante el proceso de producción de los productos P₁ y P₂ hay una pérdida de 2% y 3% del volumen inicial, respectivamente. Esta pérdida es homogéneo para todos los componentes, es decir, se pierde un mismo porcentaje del volumen inicial de C₁, C₂, C₃ y C₄, 2% o 3%, según el producto en cuestión. El proceso de producción de un litro final de los productos P₁ y P₂ tiene un costo de 2 UM y 3 UM respectivamente. Se desprecian otros costos.

Además, en el producto P₁ la relación entre la cantidad de litros de los componentes C₁ y C₃ debe ser 3:5. En el producto P₂ la cantidad de litros de C₂ debe ser menor que la cantidad de litros de C₃ y C₄ juntos.

Por otro lado, la demanda para los dos líquidos con sus respectivos precios se muestra en la tabla siguiente:

Producto líquido	Demanda (litros)	Precio (en UM por litro)
P ₁	1200	35
P ₂	1500	40

Finalmente, se sabe que no es posible vender la producción de líquidos que supera la demanda total.

Plantee un modelo de programación lineal continua que permita resolver este problema de planificación de la producción de los dos productos líquidos a un beneficio máximo. (ingresos totales menos costos totales)

III

Sea el problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } f(x_1, x_2) &= (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \\
 \text{s.a.: } X_1 &\leq 2 \\
 X_2 &\leq 2 \\
 X_1 &\geq 0 \\
 X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

a) Mediante análisis gráfico determine si $X_1=2$ $X_2=2$, es solución óptima. Determine si este punto cumple o no las condiciones de Kuhn-Tucker.

b) Verifique si los puntos $X_1=2$ $X_2=1$ y $X_1=1$ $X_2=1$ cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker. Determine si son o no óptimos. Explique la situación.

c) Sea el problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } f(x_1, x_2) &= x_2 \\
 \text{s.a.: } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 1 \\
 (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 1
 \end{aligned}$$

Mediante análisis gráfico determine la solución óptima.

Verifique si cumple o no las condiciones de Kuhn-Tucker. Explique la situación.

IV

Un ingeniero ha partido hace dos semanas a Estados Unidos a realizar un postgrado en una importante universidad. Su esposa que lo acompaña, preocupada del financiamiento de los estudios de su marido, ha decidido iniciar un negocio de venta de vinos chilenos por internet a estudiantes de la misma universidad en cuestión. Ella, que también es egresada de Ingeniería, se ha visto entonces frente a varias alternativas que debe combinar lo mejor posible para vender N tipos de vinos a lo largo de un horizonte de T períodos. En primer lugar, mediante estudios preliminares acerca de la demanda, sabe que la demanda por un vino “ i ” en el período t corresponde a “ a_{it} ” botellas. En efecto, las ventas a lo más serán de a_{it} para un producto “ i ” en el período “ t ”. Para responder a esta demanda, se cuenta con una bodega que permite almacenar una cantidad máxima de “ W ” botellas de vino. Se sabe que al inicio del primer período ella cuenta con un inventario inicial de I_{i1} botellas de vino.

El abastecimiento o la adquisición de botellas de vino se puede realizar bajo tres modalidades:

- i) Abastecimiento a 2 meses: corresponde a encargar al inicio de un período hasta una cantidad máxima de G_{it} botellas de vino, las cuales llegan al inicio del mes subsiguiente al mes en que fue hecho el pedido (i.e., 2 meses después).
- ii) Abastecimiento rápido: corresponde a encargar al inicio de un período hasta una cantidad de MR_{it} botellas, las cuales alcanzan a llegar en el mismo mes para satisfacer la demanda del mes que no alcanza a cubrirse con los inventarios que provienen de meses anteriores.

Los beneficios (ingresos menos costos) unitarios de vender una botella de vino tipo “ i ” en el período “ t ” ascienden a b_{it1} en el caso en que las unidades **no** fueron encargadas en forma rápida. En caso contrario (abastecimiento rápido), estos ascienden a b_{it2} y es necesario también cancelar un costo fijo igual a c_{it} por orden de vino tipo i en el período t , el cual será necesario pagar, obviamente, sólo si se efectúa abastecimiento rápido de un tipo de vino “ i ” en un período t .

Otras consideraciones adicionales:

- Es posible que aunque se disponga de botellas de vino suficientes para satisfacer toda la demanda, se deje una fracción de ésta insatisfecha. Esto se debe a que puede ser conveniente guardar botellas para venderlas en períodos en que los beneficios derivados de las ventas sean mayores.
- La cantidad encargada en forma rápida no debe superar la cantidad a vender en el período y se debe vender completamente.
- El costo mensual de almacenar una unidad en inventario de un mes t al mes $t+1$ corresponde a h_{it} unidades monetarias.

Formule un modelo lineal mixto que permita resolver este problema maximizando los beneficios totales durante los T períodos en análisis.

Notas y avisos de IN34A se encuentran en la página web del curso:

dii.uchile.cl/~in34a

PAUTA

P1) a)

- i) La definición de complejidad está basada en la peor instancia posible del problema. Luego, que el algoritmo SIMPLEX tenga complejidad exponencial significa que en el peor caso demora un tiempo de esas magnitudes en encontrar la solución. Sin embargo, el hecho que el algoritmo SIMPLEX sea el más utilizado en la actualidad demuestra que los problemas que interesan en la práctica están lejos del "peor caso" y para ellos el tiempo de resolución no es exponencial.

Además hay un factor histórico (el SIMPLEX es el algoritmo más viejo para resolver las PPL) y un factor computacional (existen implementaciones muy eficientes) que también favorecen la "popularidad" del SIMPLEX pero no eran el sentido de esta pregunta.

- ii) La expresión $F = m \cdot a$ si es un modelo matemático. Corresponde a la representación abstracta de una realidad física mediante relaciones matemáticas. La I.O. utiliza modelos matemáticos para específicamente para apoyar la toma de DECISIONES relacionadas con las operaciones de una organización. Luego, a excepción de algún caso particular en la cual se utilice la relación $F = m \cdot a$ para apoyar una decisión, la segunda la Ley de Newton NO cabe dentro del ámbito de la I.O.
- iii) Aquí cualquier procedimiento que permita verificar la capacidad del modelo para predecir "razonablemente" el desempeño del sistema (o la realidad) es válido. Por ejemplo usar datos históricos y comparar las costas totales que en realidad se obtuvieron con aquellas que habría predicho el modelo.

b)

- 1) - tener que invertir la matriz hessiana en i -ésima iteración significa una dificultad computacional a veces prohibitiva en la práctica.
- la matriz hessiana puede ser no invertible con lo cual el método se define, además la dirección $d_k = -[H_f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$ es una dirección de descenso si y solo si la matriz hessiana es definida positiva.
- la convergencia del método depende drásticamente del pto. inicial y solo se tiene éxito si se parte cerca de un punto estacionario. de lo contrario el método puede diverger en cualquier parte.

2) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} ye^{x-1} - 1 \\ e^{x-1} + y^2 - 2 \end{pmatrix}$, $H_f(x) = \begin{bmatrix} ye^{x-1} & e^{x-1} \\ e^{x-1} & 2y \end{bmatrix}$

las determinantes de las sub-matrices principales de $H_f(x)$ son

$$\det[ye^{x-1}] = ye^{x-1}$$

$$\det \begin{bmatrix} ye^{x-1} & e^{x-1} \\ e^{x-1} & 2y \end{bmatrix} = 2y^2e^{x-1} - (e^{x-1})^2$$

Claramente, para distintos valores de (x,y) las determinantes pueden ser mayor, menor o igual a cero luego no es posible afirmar que la función f sea convexa (o cóncava) en todo \mathbb{R}^2 .

Para el pto. $(1,1)$ se tiene $\nabla f(1,1) = (0,0)$ luego es estacionario. Por otro lado el hessiano en $(1,1)$ $H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es definido positivo y por lo tanto $(1,1)$ es un mínimo LOCAL.

Sin embargo, NO es un mínimo GLOBAL ya que $f(1,1) = -\frac{5}{3}$ y por ejemplo $f(-20, -20) \ll -\frac{5}{3}$

no es necesario calcular su valor, a todas luces el término que "manda" es $\frac{y^3}{3}$ y al evaluarlo en -20 da algo mucho

iii)

(0) Determinar el pto. inicial x_0
y hacer $K=0$

(1) Determinar la dirección de descenso
 $d_K = -[H_F(x_K)]^{-1} \nabla F(x_K)$

(2) Determinar λ_K resolviendo la minimización unidimensional

$$\min_{\lambda \geq 0} F(x_K + \lambda d_K)$$

(3) Definir $x_{K+1} = x_K + \lambda_K d_K$

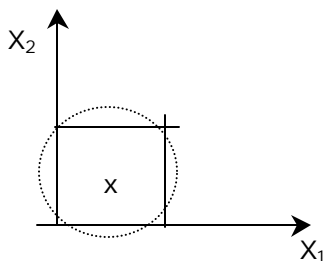
(4) Comprobar si se cumple el criterio de parada. De lo contrario se sigue iterando.

(5) $K \leftarrow K+1$, Ir a (1)

Dado que el hessiano es definido positivo (i.e. la fun. es convexa) la dirección d_K es siempre de descenso

Control 1, solución pregunta 3, semestre 1999/2

a)



Claramente $x_1=2$ $x_2=2$ es solución óptima

$$\begin{pmatrix} -2(x_1-1) \\ -2(x_2-1) \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Son activos la primera y segunda restricciones.

$$\text{Luego: } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el punto $x_1=2$ $x_2=2$ cumple Kuhn-Tucker con $m_1=2$ $m_2=2$ $m_3=0$ $m_4=0$.

b) Para $x_1=1$ $x_2=1$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solo la primera restricción es activa.}$$

Luego $x_1=2$ $x_2=1$ cumple Kuhn-Tucker con $m_1=2$ $m_2=0$ $m_3=0$ $m_4=0$.

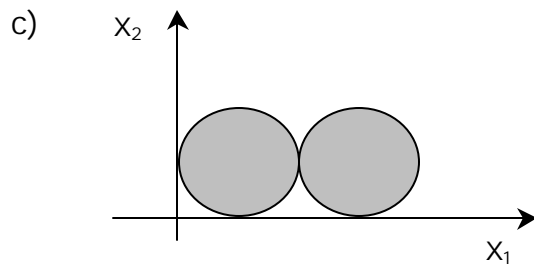
Para $x_1=1$ $x_2=1$ Todas las restricciones son no activas.

$$\text{Se tiene: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este punto cumple Kuhn-Tucker ya que $m_1=m_2=m_3=m_4=0$

Estos 2 puntos no son óptimos.

Las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias, es decir, toda solución óptima regular debe cumplirlas. Pero pueden existir puntos que cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker sin ser soluciones óptimas. Es el caso de estos 2 puntos.



El problema tiene un único punto factible que es $x_1=2$ $x_2=1$:
 Este punto es solución óptima. Pero no es regular. Por esto no cumple Kuhn-Tucker.

i) $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1 \leq 0$ $x_1=2$ $x_2=1$
 $(x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 - 1 \leq 0$ Cumplen las restricciones como igualdad estricta.

ii) luego $m_1=0$ $m_2=0$

iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 2 & (x_1-1) \\ 2 & (x_2-1) \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 2 & (x_1-3) \\ 2 & (x_2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Reemplazando valores:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2m_1 - 2m_2 = 0 \\ -1 \neq 0 \end{matrix}$$

No se puede cumplir Kuhn-Tucker.

Pauta pregunta 4 control 1, semestre 1999/2

Variables de decisión:

q_{it} : Cantidad de botellas de vino i a vender en período t . $i=1..n; t=1..T$

b_{it} : Cantidad de botellas de vino i a ordenar en período t a 2 meses $i=1..n; t=1..T$

r_{it} : $\begin{cases} 1 & \text{Si se encargan botellas en forma rápida en período } t \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$ $i=1..n; t=1..T$

f_{it} : Cantidad de botellas de vino i a ordenar en forma rápida en período t $i=1..n; t=1..T$

l_{it} : Cantidad de botellas de vino i en inventario al inicio del período t . $i=1..n; t=1..T$

Restricciones.

0) No negatividad.

$$q_{it} \geq 0 \quad i=1..n; t=1..T$$

$$b_{it} \geq 0 \quad i=1..n; t=1..T-2$$

$$f_{it} \geq 0 \quad i=1..n; t=1..T$$

$$l_{it} \geq 0 \quad i=1..n; t=1..T$$

1) Balance de Inventario

$$t=1..2 ; i=1..N \quad l_{it} + f_{it} = q_{it} + l_{it}$$

$$t=3..T ; i=1..N \quad l_{it} + b_{it-2} + f_{it} = q_{it} + l_{it}$$

2) Tamaño máximo de orden:

$$t=1..T ; i=1..N \quad b_{it} \leq G_{it}$$

$$t=1..T ; i=1..N \quad f_{it} \leq r_{it} * MR_{it}$$

3) Capacidad de bodega:

$$\sum_{i=1}^N l_{it} \leq S \quad t=1..T$$

4) Ventas a lo más a_{it}

$$t=1..T ; i=1..N \quad q_{it} \leq a_{it}$$

5) La cantidad encargada en forma rápida no debe superar la cantidad a vender en el período:

$$t=1..T ; i=1..N \quad f_{it} \leq q_{it}$$

Función Objetivo.

$$F.O. = \text{Beneficios} - \text{Costos}$$

$$\text{Beneficios} = (q_{it} - f_{it}) * b_{it1} + f_{it} * b_{it2}$$

$$\text{Costos} = \text{Costo Inventario} + \text{Costo Fijo Órdenes}$$

$$\text{Costo Inventario} = \sum_{i,t}^{N,T} I_{it} * h_{it}$$

$$\text{Costo Fijo Órdenes} = \sum_{i,t}^{N,T} c_{it} * (r_{it})$$