



**Profesores:** Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Gabriel Weintraub  
**Auxiliares:** Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Juan Pablo Troncoso  
**Tiempo:** 3 horas

## I

Comente o responda las siguientes preguntas (1,5 puntos cada una):

- En todos los problemas de optimización, lo más conveniente es utilizar un algoritmo para resolverlo, ya que éstos aseguran encontrar la solución óptima.
- Un modelo es una abstracción de la realidad, en la cual se intentan capturar todos los elementos relevantes del problema en la medida de lo posible, es decir mientras el modelo sea manejable. Construya un ejemplo basado en una situación realista relacionada a investigación operativa, en el cual se deben hacer supuestos para simplificar el modelo. Los supuestos deben ser razonables, de modo que el modelo sea una buena aproximación de la realidad.
- Los métodos de descenso para optimización irrestricta garantizan encontrar un óptimo global.
- Escriba la condición necesaria de primer orden para el problema (P), en función del gradiente de  $f$  y del conjunto de direcciones factibles para un punto dado. Explique geoméricamente la condición.

$$(P) \quad \min_{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n} f(x)$$

## II

Una conocida compañía de transporte llama a principio de año a una licitación pública de combustible (petróleo) para así asegurar el abastecimiento de los  $G$  galones que necesita para funcionar todo el período. A la licitación se presentan  $N$  petroleras y cada una de ellas con varias ofertas. Sea  $J(n)$  el número de ofertas que presenta la empresa  $n$ .

La  $j$ -ésima oferta de la petrolera  $n$  consiste en un costo fijo  $C_{jn}$  más un precio  $P_{jn}$  (\$/galón). Si la compañía licitadora acepta la oferta  $j$  de la petrolera  $n$ , le tiene que pagar el monto fijo  $C_{jn}$  y le tiene que comprar, al precio  $P_{jn}$ , más de  $\text{MIN}_{jn}$  galones pero menos de  $\text{MAX}_{jn}$ . La compañía a lo más puede aceptar una oferta por petrolera.

Formule un modelo lineal mixto que le permita a la compañía de transporte decidir cuáles ofertas acepta y cuántos galones le compra a cada petrolera de tal manera que el costo total sea mínimo.

## III

Sea el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x_1, x_2) &= x_1 \\ \text{s.a. } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 &= 5 \\ (x_1 - 3)^2 + x_2^2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Verificar el cumplimiento del sistema de Kuhn-Tucker para los siguientes puntos:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 2 + \sqrt{5} & x_2 = 1 \\ x_1 = 3 & x_2 = 3 \end{array}$$

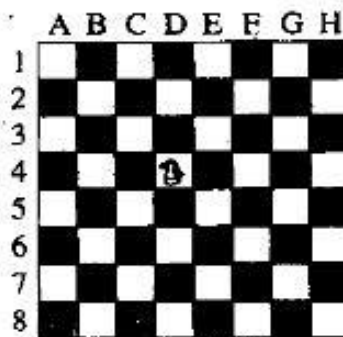
Explique la situación de cada punto y él por qué del cumplimiento o no-cumplimiento. Se recomienda apoyar su respuesta a través de un análisis gráfico

#### IV

*"¿Cuál es el número máximo de caballos que se pueden ubicar en un tablero de ajedrez sin que se coman entre ellos?"*

El tablero de ajedrez posee 8 filas y 8 columnas las cuales generan un total de 64 posiciones. El caballo se puede mover en el tablero de las siguientes formas:

- Avanzando dos espacios horizontalmente y un espacio en dirección vertical. Por ejemplo, si se encuentra en D4 podría moverse a F3, B3, B5 y F5.
- Avanzando dos espacios verticalmente y un espacio en dirección horizontal. Por ejemplo, si se encuentra en D4 podría moverse a E2, C2, E6 Y C6.



(Si un caballo mediante un movimiento puede ocupar la casilla en la cual se encuentra otro caballo, entonces el primer caballo podrá "comer" al segundo, sacándolo del tablero)

Formule un modelo lineal entero que permita determinar el número máximo de caballos que se pueden ubicar en un tablero de ajedrez sin que se coman entre ellos.

Hint: Suponga que se encuentra un caballo situado en una cierta casilla (i,j). Determine cuáles casillas no podrían ser ocupadas por otros caballos. Defina adecuadamente las variables de decisión y plantee esto (i.e., que casillas no podrían ser ocupadas) como una restricción lineal.

**Reclamo Control 1: Martes 25 de abril de 13:30 a 14:30 en el Hall Sur.**

**Notas y avisos de IN34A se encuentran en la página web del curso:**

**[www.dii.uchile.cl/~in34a](http://www.dii.uchile.cl/~in34a)**

P11

PAUTA

Gabriel Weintraub

a) Es cierto que los algoritmos garantizan optimalidad. Sin embargo para algunos problemas, no es posible encontrar algoritmos eficientes (que demoren un tiempo razonable) que los resuelvan. En esos casos, es preferible buscar heurísticas para resolver el problema. Estas no garantizan optimalidad, pero si la heurística es de "buena calidad" podremos encontrar soluciones cercanas a la óptima y en un tiempo "razonable". Es decir, se sacrifica conocer exactamente la solución óptima, pero se gana en eficiencia en la resolución.

b) Acá, existe una infinidad de ejemplos.

Un posible ejemplo es:

Una empresa maximiza su utilidad sujeto a su capacidad de producción. La capacidad no se conoce con certeza, ya que existe incertidumbre (se puede perder una máquina, etc.) sin embargo se tiene una buena estimación de su promedio. Si la variabilidad de la capacidad no es muy alta, el modelo determinístico utilizando la capacidad promedio, es un buen modelo de la realidad.

c) Los métodos de descenso convergen a un punto estacionario (o todo punto de acumulación de la sucesión es estacionario), es decir a punto t.q.  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ , que no necesariamente es mínimo global. Podría ser un mínimo local, por ejemplo.

Para asegurar convergencia a un mínimo global, se requieren condiciones adicionales.

Por ejemplo, si  $f(x)$  es convexa, el método del gradiente, converge a un punto mínimo global.

d) Condición de 1<sup>er</sup> orden para (P):

Sea  $f \in C^1$  y  $x^*$  mínimo local de (P),

entonces  $\nabla f(x^*)^T \cdot d \geq 0$ ,  $\forall d \in \underbrace{D_S(x^*)}_{\text{conj. de direcciones factibles en } x^*}$ .

Geométricamente, significa que si nos movemos en cualquiera de las direcciones factibles, la función crece, por lo tanto,  $x^*$  es mínimo local.

Haciendo Taylor a primer orden, se puede mostrar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x^* + \lambda d) - f(x^*)}{\lambda} = \nabla f(x^*)^T \cdot d$$

es igual a  $Df(x^*, d) \equiv$  derivada parcial de  $f$  en  $x^*$  en la dirección  $d$ .

Si  $Df(x^*, d) \geq 0 \forall d \in D_S(x^*)$ , significa que si nos movemos

"un  $\epsilon$ " en cualquier dirección factible, la función  $f$  crece

$\Rightarrow x^*$  es mínimo local.

NOTA: Si la intuición es correcta, no es necesario hacer Taylor.

P2/ PAUTA

Felipe Caro

(\*) Var. de decision: (2,0 pts)

$$X_{jn} = \begin{cases} 1 & \text{si se acepta la } j\text{-ésima oferta de la empresa } n \\ 0 & \text{no} \end{cases}$$

$Y_{jn}$  = galones de combustible que se le compra a la empresa  $n$  bajo la oferta  $j$

(\*) Restricciones (3,0 pts)

i) se puede aceptar a lo más una oferta por empresa

$$\sum_{j=1}^{J(n)} X_{jn} \leq 1 \quad \forall n=1, \dots, N$$

ii) cantidad max. de la oferta  $j$  de la emp.  $n$

$$Y_{jn} \leq \text{MAX}_{jn} \cdot X_{jn} \quad \forall n=1, \dots, N, \quad \forall j=1, \dots, J(n)$$

iii) cantidad mínima

$$\text{MIN}_{jn} \cdot X_{jn} \leq Y_{jn} \quad \forall n=1, \dots, N, \quad \forall j=1, \dots, J(n)$$

iv) asegurar abastecimiento de  $G$  galones

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{J(n)} Y_{jn} = G$$

v) naturaleza de las var.

$$X_{jn} \in \{0,1\}, \quad Y_{jn} \geq 0 \quad \forall n=1, \dots, N, \quad \forall j=1, \dots, J(n)$$

(\*) Fun. Obj. a minimizar (1,0 pto)

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{J(n)} (P_{jn} Y_{jn} + C_{jn} X_{jn})$$

### Solución Pregunta C1.

Patricio Conca

Sistema de K-T

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 5 = 0 \\ & (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 9 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \mathbf{I} \{ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 - 5 \} = 0 \quad \mathbf{I} \geq 0 \\ & \mathbf{m} \{ (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 9 \} = 0 \quad \mathbf{m} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{I} \begin{Bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{Bmatrix} + \mathbf{m} \begin{Bmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos el sistema para  $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$

- i) Se cumplen ambas restricciones. La segunda es activa.
- ii) Se cumple. No se obtiene información para  $\lambda$  y  $\mu$ .
- iii)  $1 + (-4)\mathbf{I} + (-6)\mathbf{m} = 0$   
 $+ (-2)\mathbf{I} = 0$

Luego  $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$  cumple con K-T con  $\mathbf{I} = 0$  y  $\mathbf{m} = 1/6$

Verifiquemos el sistema para  $x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad x_2 = 1$

- i) La primera restricción se cumple y la segunda se cumple como desigualdad estricta.
- ii)  $\mathbf{m} = 0$
- iii)  $1 + \mathbf{I} \cdot 2\sqrt{5} = 0 \quad \mathbf{I} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Luego  $x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad x_2 = 1$  con  $\mathbf{I} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$  y  $\mathbf{m} = 0$

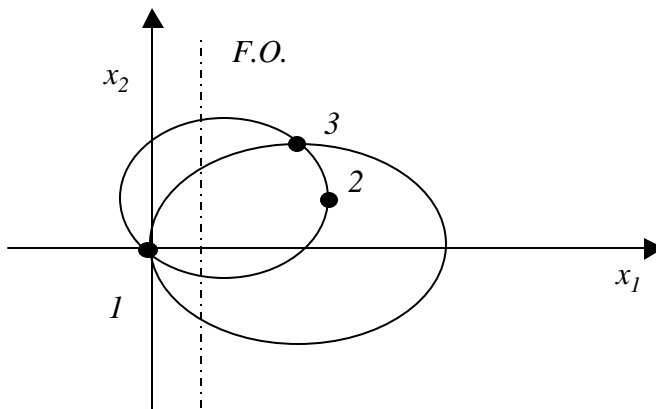
Cumple K-T

Verifiquemos para  $x_1 = 3 \quad x_2 = 3$

- i) Se cumplen ambas restricciones. La segunda como igualdad.
- ii) No se obtiene información para  $\lambda$  y  $\mu$
- iii)  $1 + 2\mathbf{I} = 0 \quad \mathbf{I} = -1/2$   
 $4\mathbf{I} + 6\mathbf{m} = 0 \quad \mathbf{m} = +1/3$

Luego  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 3$  cumple K-T con  $\mathbf{I} = -1/2$   $\mathbf{m} = +1/3$

Gráficamente la situación es:



- |   |                      |           |
|---|----------------------|-----------|
| 1 | $x_1 = 0$            | $x_2 = 0$ |
| 2 | $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ | $x_2 = 1$ |
| 3 | $x_1 = 3$            | $x_2 = 3$ |

Los tres puntos cumplen K-T. Del gráfico  $x_1 = 0$   $x_2 = 0$  es la solución óptima.

$x_1 = 2 + \sqrt{5}$   $x_2 = 1$  es un máximo.

$x_1 = 3$   $x_2 = 3$  es un mínimo local.

Las condiciones de K-T son necesarias, es decir; un punto óptimo local o global debe cumplir K-T, pero pueden existir otros puntos que sin ser óptimos pueden cumplir K-T. En este caso  $x_1 = 2 + \sqrt{5}$  y  $x_2 = 1$  (máximo).

**Pauta.**

Sea  $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el caballo se encuentra en la fila } i \text{ y la columna } j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$$i=1..8; j=1..8$$

Si un caballo se encuentra en  $x_{ij}$  entonces el conjunto de los índices de las casillas que no pueden ser ocupadas por otro caballo corresponde a:

$$D_{ij} = \{ (m,n) \in C_{ij} \text{ tal que } 1 \leq m \leq 8, 1 \leq n \leq 8 \},$$

en que

$$C_{ij} = \{ (i+2, j+1), (i+2, j-1), (i-2, j+1), (i-2, j-1), (i+1, j+2), (i+1, j-2), (i-1, j+2), (i-1, j-2) \}$$

(No interesa que el conjunto de casillas se formule de la misma manera, sino que las casillas queden bien y claramente identificadas. Además esto es sólo un Hint, no hay puntaje por esta parte).

El modelo se puede formular al menos de dos maneras:

**Modelo 1:**

$$\text{Max} \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 x_{ij}$$

s.a.

$$1 - x_{ij} \geq x_{mn} \quad \forall (m,n) \in D_{ij}, \quad i=1..8, j=1..8$$

$$x_{ij} = 0,1 \text{ (binariedad)} \quad i=1..8, j=1..8$$

**Modelo 2:**

$$\text{Max} \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{(m,n) \in D_{ij}} x_{mn} \leq \text{Cardinal}(D_{ij}) (1 - x_{ij}) \quad i=1..8, j=1..8$$

$$x_{ij} = 0,1 \text{ (binariedad)} \quad i=1..8, j=1..8$$

**Puntajes:**

Definición de variables: 1 punto.

Formulación de Función Objetivo: 2 puntos.

Formulación de Restricción: 3 puntos.