Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Marianela Pereira
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

Control 1 IN34A
12 de Abril de 2006

Problema 1

1. Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a. (0.5 ptos) Un modelo y una instancia son sinónimos.

Falso: Un modelo es una representación idealizada de una situación donde los valores de los parámetros son genéricos, una instancia es se obtiene al especificar dichos parámetros (darle valores). Así un modelo puede tener muchas instancias.

b. (0.5 ptos) Un problema de clase NP-Completo siempre puede transformarse polinomialmente a un problema de P

Falso: No puede siempre pues si fuese así NP-Completo podría ser subconjunto de P.

2. (1 pto) Defina y enuncie una condición necesaria y suficiente para que una función f(x) sea convexa.

Dos ejemplos:

- Sea la función f de clase C^1. Entonces f es convexa en el conjunto S si y solo si:

$$F(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x) \qquad \forall x, y \in S$$

- Sea *f* de clase C^2 y sea S, un subconjunto de R^n, un conjunto convexo, abierto y no vacío. Entonces f es convexa en S si y solo si la matriz hessiana $Hf(x)$ es semidefinida positiva en todo S

3. (1 pto) Nombre 3 aspectos importantes a tener en cuenta al definir un problema en el área de la investigación operativa

a) Dimensión Espacial del Sistema: Limites entre el sistema y el marco de referencia.
b) Dimensión Temporal del Sistema u Horizonte: Periodo para el cual se hará el diseño y establecimiento de unidades temporales dentro del período.
c) Nivel de las Decisiones: Decisiones que aborda el estudio.
d) Separabilidad de las Decisiones: Grado de interrelación que existe entre las diferentes instancias abordadas en el estudio. Cuando es posible separar componentes de un sistema? Cuando el nivel de influencia de las reacciones a las decisiones tomadas en una componente es débil.

e) Grado de Precisión Numérica: Error que se está dispuesto a aceptar en los valores numéricos de la solución.
f) Tiempo y Recursos Humanos Disponibles: Plazos establecidos para el estudio y características del equipo de trabajo.
g) Tecnología Disponible: Metodologías con las que se cuenta y características de los equipos computacionales.

4. Respecto al método del gradiente:

c. (0.4 ptos) Descríbalo

El método viene dado por el paso iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$$

Con λ_k solución óptima del problema:

$$\min_{\lambda} h_k(\lambda) = f(x^k + \lambda d^k)$$

$$\text{s.a. } \lambda \geq 0$$

d. (0.3 ptos) Justifique por qué es un método y no una heurística
Es un método pues determina la solución del problema, en cambio una heurística es un procedimiento que lleva a "buenas aproximaciones" de la solución.

e. (0.3 ptos) Explique en qué ocasiones la convergencia del método puede ser muy lenta.

- Cuando en iteraciones sucesivas del método los gradientes son ortogonales entre sí, la convergencia se vuelve muy lenta para algunos tipos de funciones.

- Sin embargo, si las superficies de nivel son excéntricas (elipsoides), la convergencia puede ser muy lenta debido a las oscilaciones.

5. Detalle la diferencia entre el método de Newton y el Método de Newton globalizado

Para formar Newton Globalizado a Newton se agrega una minimización unidimensional en la dirección generada:

$$d^k = -[Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

d^k es dirección de descenso si $Hf(x)$ es definida positiva (y esto pasa si *f* es convexa).

En cada iteración se puede buscar un paso λ_k > 0 tal que $f(x^k + \lambda_k d^k) < f(x^k)$

$$\min f(x^k + \lambda_k d^k)$$

$$\text{s.a. } \lambda_k \geq 0$$

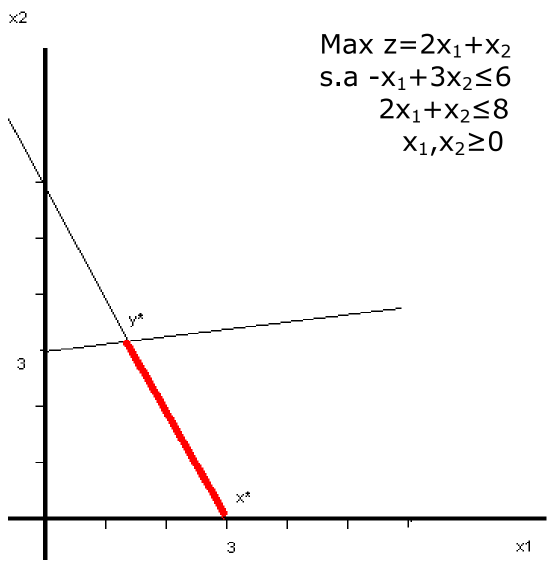
En cambio Newton trabaja con: $\lambda_k = 1$

(0.5 por decir lo que se le agrega en Globalizado y 0.5 por la discusión del lambda)

6. Enuncie y grafique un problema de programación lineal que tenga infinitos óptimos.

Esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (Son paralelas)
Cualquier ejemplo que cumpla con la condición anterior estará bueno. Uno de estos pude ser:

$$\text{Max } z=2x_1+x_2$$
$$\text{s.a } -x_1+3x_2\le 6$$
$$2x_1+x_2\le 8$$
$$x_1,x_2\ge 0$$



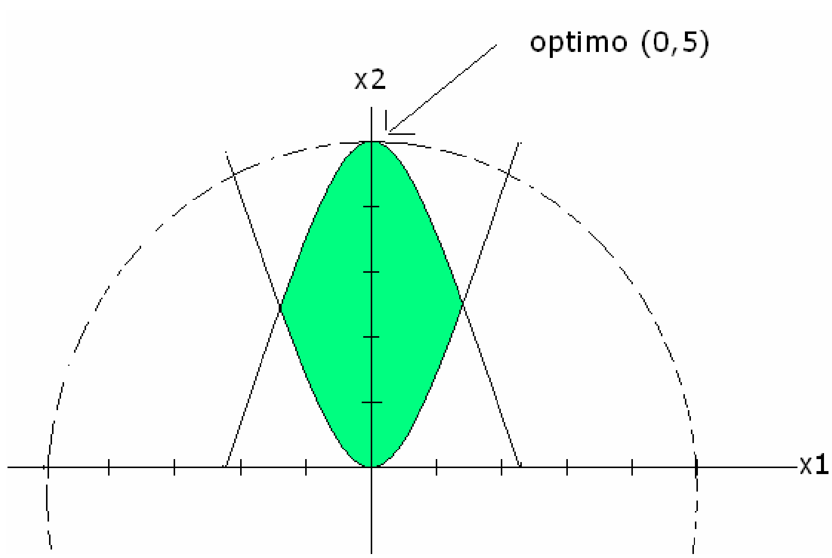
(0.5 por el gráfico y 0.5 por el modelo)

Problema 2

A) Dado el siguiente problema (P):

$$(P) \quad \max \quad x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{s.a} \quad g_1: x_1^2 \le x_2$$
$$g_2: \; x_1^2 + x_2 \le 5$$

a. (0.5 ptos) Encuentre gráficamente el óptimo



b. (1,5 ptos) Verificar gráfica y analíticamente que el punto óptimo cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

(Si tiene mal enunciado KKT restar 0.8 ptos)

Calculemos los gradientes del problema expresado según la forma estándar de un problema de KKT

(P) min $-x_1^2 - x_2^2$

s.a $g_1: x_1^2 - x_2 \leq 0$

$g_2: x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0$

Gradientes

$$\nabla f = (-2x_1, -2x_2)$$
$$\nabla g_1 = (2x_1, -1)$$
$$\nabla g_2 = (2x_1, 1)$$

Condiciones de KKT

$$\nabla f(0,5) + \mu_1 \nabla g_1(0,5) + \mu_2 \nabla g_2(0,5) = 0$$
$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\mu_1(x_1^2 - x_2) = 0 \Rightarrow \mu_1(0-5) \Rightarrow \mu_1 = 0$$
$$\mu_2(x_1^2 + x_2 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2(0+5-5) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re$$

Así se tiene que:

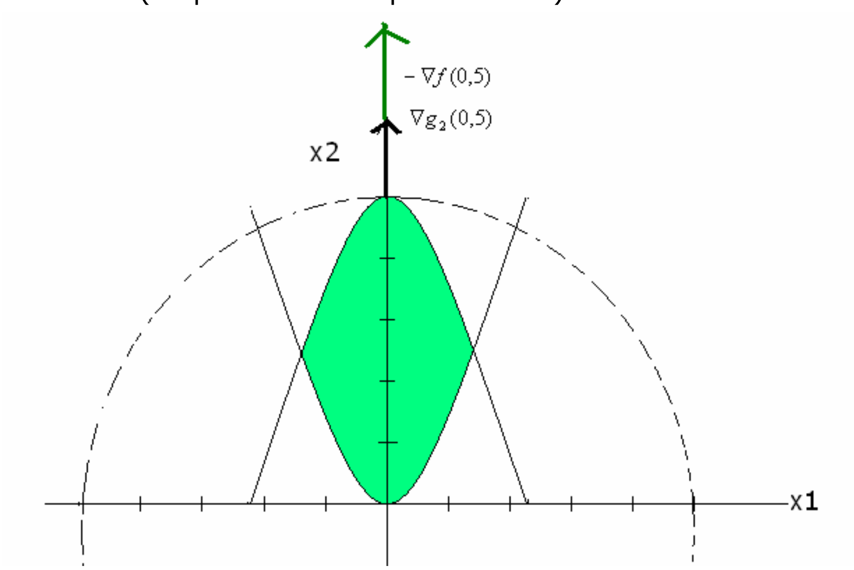
$$\nabla f(0,5) + \mu_2 \nabla g_2(0,5) = 0$$
$$(0.-10) + \mu_2(0,1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 10$$

Luego Analíticamente cumple KKT

Veamos gráficamente: Tenemos los vectores:

$$-\nabla f(0,5) = (0,10)$$
$$\nabla g_2(0,5) = (0,1)$$

Gráficamente se puede ver que menos el gradiente de la función objetivo es una combinación lineal (en particular una ponderación) de la restricción activa.



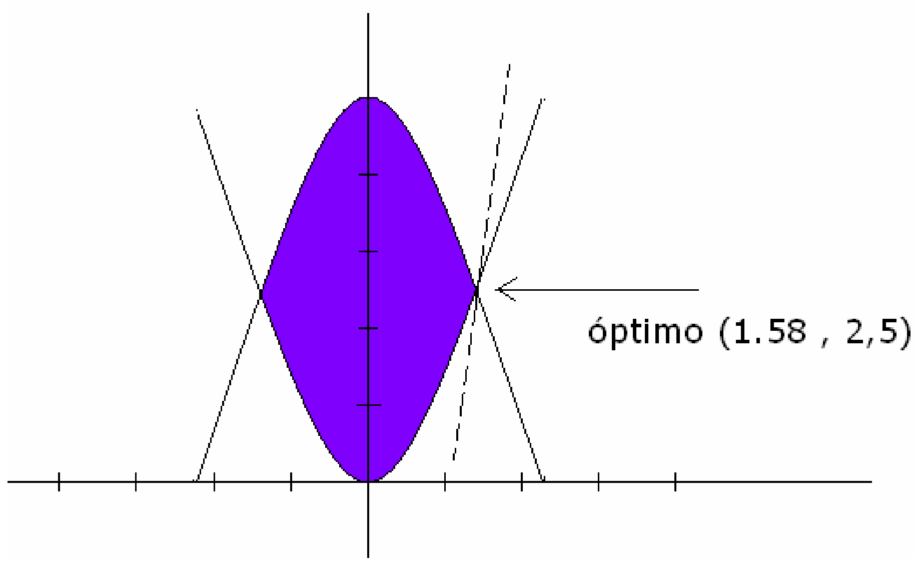
c. (1 pto) Puede haber otro punto que verifique KKT. Justifique.

No, no puede haber otro punto que verifique KKT, si hay más de uno todos tienen el mismo valor. Esto sucede debido a que la región es convexa y también lo es la función objetivo.

B) Supongamos que la función objetivo del problema (P) cambia como lo muestra el siguiente problema:

(P1) min $x_2 - 10x_1$
s.a g_1: $x_1^2 \leq x_2$
g_2: $x_1^2 + x_2 \leq 5$

a. (0.5 ptos) Encuentre gráficamente el óptimo



b. (1,5 ptos) Verificar gráfica y analíticamente que el punto óptimo cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

(Si tiene mal enunciado KKT restar 0.8 ptos)

Calculemos los gradientes del problema expresado según la forma estándar de un problema de KKT

(P) min $- x_2 - 10x_1$
s.a g_1: $x_1^2 - x_2 \leq 0$
g_2: $x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0$

Gradientes

$$\nabla f = (-10, 1)$$
$$\nabla g_1 = (2x_1, -1)$$
$$\nabla g_2 = (2x_1, 1)$$

Condiciones de KKT

$$\nabla f(1.58, 2.5) + \mu_1 \nabla g_1(1.58, 2.5) + \mu_2 \nabla g_2(1.58, 2.5) = 0$$
$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\mu_1(x_1^{\ 2} - x_2) = 0 \Rightarrow \mu_1(5-5) \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2(x_1^{\ 2} + x_2 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2(2.5 + 2.5 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re$$

Así se tiene que:

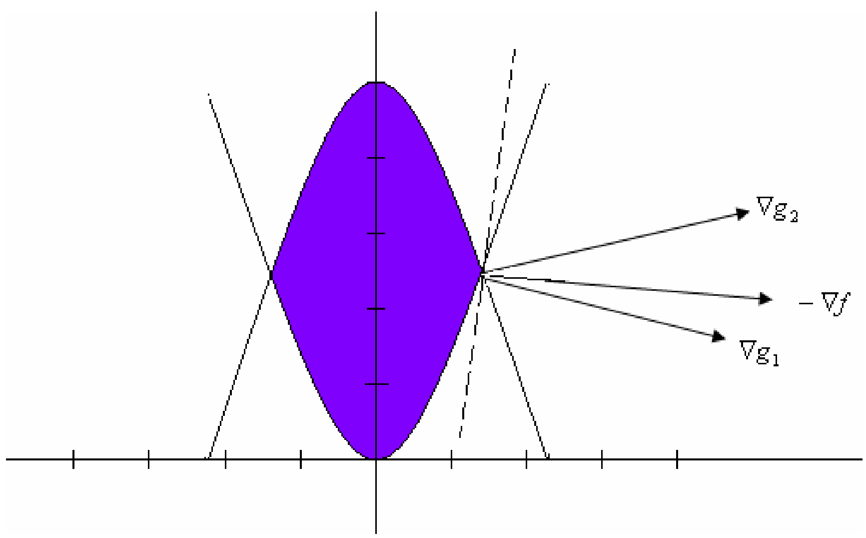
$$\nabla f(1.58, 2.5) + \mu_1 \nabla g_1(1.58, 2.5) + \mu_2 \nabla g_2(1.58, 2.5) = 0$$
$$(-10, 1) + \mu_1(3.16, -1) + \mu_2(3.16, 1) = 0$$
$$\mu_2 = 1.08 \qquad \mu_1 = 2.08$$

Luego Analíticamente cumple KKT

Veamos gráficamente: Tenemos los vectores:

$$-\nabla f(1.58, 2.5) = (10, -1)$$
$$\nabla g_1(1.58, 2.5) = (3.16, -1)$$
$$\nabla g_2(1.58, 2.5) = (3.16, 1)$$

Gráficamente se puede ver que menos el gradiente de la función objetivo es una combinación lineal (en particular una ponderación) de la restricción activa.



c. (1 pto) Puede haber otro punto que verifique KKT. Justifique.

No, tampoco puede haber otro punto que verifique KKT, si hay más de uno todos tienen el mismo valor. Esto sucede debido a que la región es convexa y también lo es la nueva función objetivo.

Problema 3

Una empresa productora desea programar la entrega de *P* pedidos. El tonelaje asociado al pedido *p* es T_p (p = 1, …, P). Estos pedidos son realizados por sus *P* clientes, donde *p* es el pedido del cliente *p* (p = 1, …, P).

Para esto la empresa cuenta con un servicio de transporte externo que posee *K* camiones, siendo C_k la capacidad del camión *k* (k=1, …, K). Los camiones siempre van en una vuelta de la empresa productora al sitio de un cliente y vuelven a la empresa productora, es decir no pueden despachar a diferentes clientes en una vuelta.

La empresa de transporte cobra un costo *de F* por tonelada que se lleva en el camión, y un costo fijo G por viaje.

Se estima que cada camión demora m_p minutos en ir desde la empresa productora hasta *p* (cliente p).

Se supone que el tiempo de la carga en el lado de la empresa productora y la descarga en el lado de cada uno de los clientes tiene tiempo 0.

Desarrolle un modelo de programación lineal mixto que permita a la empresa productora decidir qué camiones utilizar en cada vuelta, y cómo cargarlo, de manera de minimizar el costo a la subcontratación del transporte de los pedidos. Considere que la jornada laboral de un camión es de *H* horas al día.

Variables
(0.7 por cada una)

$$x_{skp} \begin{cases} 1 & \text{Si el camión k va a dejar pedido del cliente p en la salida s.} \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

y_{skp} = Toneladas que el camión k lleva al cliente p en la salida s

Con , k=1,…, K, p=1,…,P, s=1,…, V_k Tal que el número máximo de salidas depende de cada camión y está dado por $V_k = \sum_p \left\lceil \frac{T_p}{C_k} \right\rceil$ que es el caso en que el camión k abastece a todos los clientes.

Restricciones

- (0.7 ptos) Respetar la capacidad en cada visita

$$y_{skp} \leq C_k x_{skp} \qquad \forall s, k, p$$

- (0.7 ptos) Hacerlo antes de H horas

$$\sum_{s=1}^{V_k}\sum_{p=1}^{P} x_{skp}\cdot 2\cdot m_p \leq H\cdot 60 \qquad \forall k$$

- (0.7 ptos) No sobrepasar la carga en cada visita

$$y_{skp} \leq T_p x_{skp} \qquad \forall s,k,p$$

- (0.7 ptos) Visitar a solo un cliente por vuelta

$$\sum_{p=1}^{P} x_{skp} = 1 \qquad \forall s,k$$

- (0.7 ptos) Que cada cliente reciba exactamente su pedido

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} y_{skp} = T_p \qquad \forall p$$

- (0.5 ptos) Naturaleza de las variables:

$$x_{skp} \in \{0,1\} \qquad \forall s,k,p$$

$$y_{skp} \geq 0 \qquad \forall s,k,p$$

Función Objetivo
(0.6 ptos)

$$\min z = \sum_{p=1}^{P}\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} x_{skp}\cdot G + \sum_{p=1}^{P}\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} y_{skp}\cdot F$$

Dudas y/o consultas
mapereir@ing.uchile.cl