Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Dpto. Ingeniería Civil Industrial
Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxiliares: Blas Duarte
Sebastián Guzmán
Marianela Pereira

Control N°1 PAUTA
Miércoles 1 de Septiembre de 2004

Pregunta 2

Sea el siguiente problema,

$$(P)\quad \begin{aligned} Min\ & (x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \\ s.a.\ & x_1+x_2 \le 1 \\ & 6\cdot x_1^3 + x_2^2 \le 1 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Se les pide:

a. **(1,5 pto.)** Desarrollar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).

R. Antes de trabajar debemos pasar el problema a una forma estandar para poder trabajar las condiciones de KKT.

$$(P)\quad \begin{aligned} Min\ & f(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \\ s.a.\ & g_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-1\le 0 && (1) \\ & g_2(x_1,x_2)=6\cdot x_1^3+x_2^2-1\le 0 && (2) \\ & g_3(x_1,x_2)=-x_1\le 0 && (3) \\ & g_4(x_1,x_2)=-x_2\le 0 && (4) \end{aligned}$$

Ahora podemos identificar las condiciones de KKT. Se presentan a continuación.

$$\begin{aligned} & \exists m_i \ge 0, tq \\ & \nabla f(x)+\sum_i m_i \nabla g_i(x)=0 \\ & m_i g_i(x)=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debemos identificar los gradientes de cada uno de las ecuaciones presentes en el problema.

$$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-2) \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 18x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el sistema queda así.

$$\begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-2) \end{pmatrix} + m_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} 18x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + m_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. **(1,5 pto.)** Revisar el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos. A = (0,0) ; B = (¼, ¼) ; C = (½, ½).

- **A(0,0)**

  En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son (3) y (4), y obviamente (1) y (2) no son activas.

  Por lo tanto $m_1 = m_2 = 0$ **y** $m_3, m_4 \in \Re$**. Por lo tanto el sistema queda,**

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + m_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Este sistema tiene como solución.

$$m_3 = -4$$
$$m_4 = -4$$

  Por lo tanto no cumple KKT.

- **B = (¼, ¼)**

  En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son "Ninguna" y obviamente (1), (2), (3) y (4) no son activas. Esto quiere indicar que el punto es un punto interior, por lo tanto $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ **. Por lo tanto el sistema queda,**

$$\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Este sistema no tiene solución.

  Por lo tanto no cumple KKT.

- **C = (½, ½)**

En este punto debemos analizar las restricciones que son activas. De acuerdo a lo anterior debemos identificar que las restricciones activas son (1) y (2), y obviamente (3) y (4) no son activas.

Por lo tanto $m_1, m_2 \in \Re$ **y** $m_3 = m_4 = 0$**. Por lo tanto el sistema queda,**

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

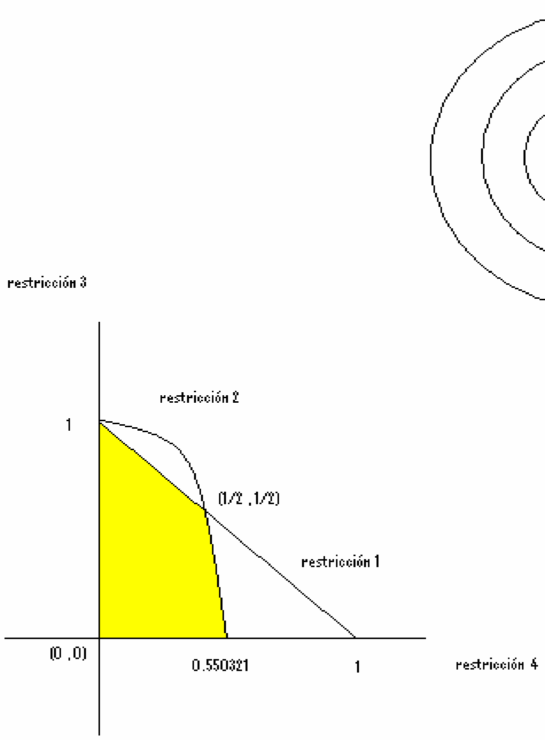
Este sistema tiene como solución.

$$m_1 = 3$$
$$m_2 = 0$$

Por lo tanto cumple KKT.

c. **(1,5 pto.)** Mostrar las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo de forma gráfica.

R. Deben lograr identificar la forma de las restricciones, el espacio de soluciones y la función objetivos.



$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 \le 1 & restriccion_1 \\
6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \le 1 & restriccion_2 \\
x_1 \ge 0 & restriccion_3 \\
x_2 \ge 0 & restriccion_4
\end{array}
$$

d. **(1,5 pto.)** Dar la solución óptima y el valor de la función objetivo al punto asociado.

R. **Analizando gráficamente podemos ver que el valor optimo es (½ , ½). Por lo tanto el valor de la función objetivo es z = 24,5 u.m.**

Deben analizar la convexidad de la función, para lo cual podemos ver que:

$x_1 + x_2 \le 1$ → **Es convexa.**

$6 \cdot x_1^3 + x_2^2 \le 1$ → **Es un espacio convexo (dentro del espacio de soluciones seleccionado).**

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$ → **Son convexas.**

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ → **Función Objetivo es un espacio convexo.**

Tenemos condiciones de convexidad en las ecuaciones presentes, por lo tanto el punto (½ , ½) es optimo global.