Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

Modelamiento de Problemas de Programación Lineal con Variables Continuas.

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@cec.uchile.cl

1. Introducción

No existe una metodología muy concreta acerca de como se debe modelar matemáticamente un problema y el asunto tiene mucho de intuición y arte. En la siguiente clase intentaremos dar una introducción al modelamiento de problemas de optimización, mostrando un par de problemas típicos y discutiendo un poco las dificultades que pueden presentarse y cuales son los errores mas comunes.

Una forma sencilla y bastante general de ordenar el proceso de modelación, consiste en dividirlo en tres partes:

1. Definición de variables de decisión.
2. Planteamiento de las restricciones del problema.
3. Planteamiento de la función objetivo.

1.1. Definición de variables.

Como primer paso para poder modelar ordenadamente un problema de optimización debemos distinguir que variables son aquellas sobre las que podemos tomar decisiones en el problema y darles un nombre, es decir, debemos darnos cuenta que variables estan bajo nuestro control. A veces es necesario incluir variables que si bien no podemos ejercer una decisin directa sobre ellas, nos sirven como herramienta auxiliar ya sea para plantear restricciones o para escribir nuestra función objetivo. Serían variables de decisión por ejemplo la cantidad de producto a enviar desde el centro de producción i hasta el centro de consumo j (que podríamos llamar x_{ij}), la cantidad de insumos a adquirir en el período t (que podríamos llamar y_t), el numero de horas que destinaremos la máquina i a trabajar en el proceso j en el período t (que podríamos llamar z_{ij}^t), etc.

1.2. Planteamiento de restricciones.

En un problema de optimización, intentaremos buscar combinaciones de variables de decisión que generen un mejor valor de la función objetivo, pero en la práctica nuestro problema esta limitado por un gran número de restricciones físicas, económicas, técnicas, etc. Es por esto que en el planteamiento de nuestro problema debemos especificar que limitantes tienen los valores que puedan tomar las variables de decisión. En síntesis, en esta parte debemos escribir matemáticamente las limitaciones que nos impone la naturaleza del problema.

1.3. Planteamiento de función objetivo.

En general podemos decir que en un problema de optimización se intenta encontrar el mejor valor[2] de algo. Es por esto que necesitamos especificar que criterio usaremos para decir que una solución es mejor que otra. Para ello deberemos especificar una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ en que una combinación de variables será mejor que otra si genera un mayor valor de la función en el caso de maximización y un menor valor de la función en el caso de minimización. Ejemplos típicos de funciones objetivos vienen dados por maximización de utilidades y minimización de costos, los que deben ser escritos en función de las variables del problema.

En esta parte del curso, veremos un muy importante caso particular de problemas: *problemas de programación lineal (PPL)* en que tanto las restricciones como la función objetivo son lineales[3]. En esta clase introductoria veremos un subconjunto aún mas reducido: solo consideraremos variables continuas (mas adelante incluiremos variables discretas y binarias).

2. Problemas

Partiremos con un par de problemas bien sencillos para que se entienda la idea y *soltar un poco la mano.*

2.1. Problema 1

La oficina técnica coordinadora de cultivos (OTCC), tiene a su cargo la administración de 3 parcelas. El rendimiento agrícola de cada parcela está limitado tanto por la cantidad de tierra cultivable como por la cantidad de agua asignada para regadío de la parcela por la comisión de aguas. Los datos proporcionados por este organismo son los siguientes:

Parcela	**Tierra Cultivable [ha]**	**Asignación de agua** [m^3]
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Las especies disponibles para el cultivo son la remolacha, trigo y maravilla, pero el ministerio de agricultura ha establecido un número máximo de hectareas que pueden dedicarse a cada uno de estos cultivos en las 3 parcelas en conjunto , como lo muestra la siguiente tabla:

[2] mínimo o máximo según corresponda

[3] No existen multiplicaciones de variables de decisión

Especie	**Consumo de Agua** $[m^3/ha]$	**Cuota Máxima** [ha]	**Ganancia Neta** [$/ha]
Remolacha	3	600	400
Trigo	2	500	300
Maravilla	1	325	100

Los dueños de las parcelas, en un acto de solidaridad social, han convenido que en cada parcela se sembrará la misma fracción de su tierra cultivable. Sin embargo, puede cultivarse cualquier combinación en cualquiera de las parcelas.

La tarea que encara la OTCC es plantear cuantas hectáreas se deben dedicar al cultivo de las distintas especies en cada parcela, de modo de maximizar la ganancia neta total para todas las parcelas a cargo de la OTCC.

Solución

Seguimos los pasos típicos:

1. Variables de Decisión
   x_i = Cantidad [ha] de remolacha a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)
   y_i = Cantidad [ha] de trigo a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)
   z_i = Cantidad [ha] de maravilla a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)

2. Planteamiento de Restricciones

   a) Restricción de Tierra disponible por Parcela
   Parcela 1: $x_1 + y_1 + z_1 \leq 400$
   Parcela 2: $x_2 + y_2 + z_2 \leq 600$
   Parcela 3: $x_3 + y_3 + z_3 \leq 300$

   b) Restricción Disponibilidad de agua por parcela
   Parcela 1: $3x_1 + 2y_1 + 1z_1 \leq 600$
   Parcela 2: $3x_2 + 2y_2 + 1z_2 \leq 800$
   Parcela 3: $3x_3 + 2y_3 + 1z_3 \leq 375$

   c) Restricción de Cuota Máxima de cultivo por especie
   Remolacha: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$
   Trigo: $y_1 + y_2 + y_3 \leq 500$
   Maravilla 3: $z_1 + z_2 + z_3 \leq 325$

   d) Restricción de misma proporció de tierra cultivable
   Parcela 1= Parcela 2: $(x_1 + y_1 + z_1)/400 = (x_2 + y_2 + z_2)/600$

Parcela 2= Parcela 3: $(x_2 + y_2 + z_2)/600 = (x_3 + y_3 + z_3)/300$
Parcela 3= Parcela 1: $(x_3 + y_3 + z_3)/300 = (x_1 + y_1 + z_1)/400$

e) La nunca bien ponderada restricción de no negatividad
$x_i, y_i, z_i \geq 0$ i=1, 2, 3.

3. Planteamiento de la Función Objetivo
máx $F = 400(x_1 + x_2 + x_3) + 300(y_1 + y_2 + y_3) + 100(z_1 + z_2 + z_3)$

$\odot$

2.2. Problema 2

La empresa de productos GOLOSO S.A desea determinar su plan de producción y distribución para los proximos T días. Esta empresa posee K plantas productoras, en cada una de las cuales puede producirse N tipos de productos distintos. Una vez producidos, estos productos deben ser despachados inmediatamente a las bodegas de almacenamiento que se encuentran exactamente en el mismo lugar de la planta (en cada planta hay una bodega adyacente). Los productos son mantenidos en bodega hasta que son enviados a alguno de los I supermercados (centros de venta) disponibles y para ello tienen 2 posibilidades de vías de transporte las cuales difieren en costo y rapidez. Considere los siguientes elementos:

$K_{k,n}$: Capacidad diaria (en kg.) de producción del producto n en la planta k.
F_n: Volumen (en m^3.) ocupado por 1 kg. de producto n.
M_k: Costo diario de Mantención (en \$/unidad de producto.) de inventario en la bodega k.
B_n: Costo uniatrio (en \$.) de elaboración del producto n.
$D_{n,i}$: Demanda diaria (en kg.) del producto n en el supermercado i.
$C_{i,j,k,t}$: Costo unitario de transporte (en $\$/m^3$.) desde bodega k hacia el supermercado i por la vía de transporte j en el día t.
H_k: Capacidad (en m^3.) de la bodega asociada a la planta k.

Para efectos del modelo, considere que el tiempo de transporte desde cualquier supermercado es de 1 día si se elige la vía de transporte 1 (j=1) y de 2 días si se elige la vía de transporte 2 (j=2). Además, suponga que cada bodega tiene un inventario inicial nulo para todos sus productos.

1. Formule un modelo de programación lineal que le permita a GOLOSO S.A encontrar su plan de producción y distribución a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos descritos

2. Suponga que los productos son perecibles y que el tiempo máximo que puede pasar entre la producción y la llegada al supermercado para un producto son 5 días. Reformule el problema internalizando esta nueva restricción.

Solución

1. *a*) Variables de decisión

$x_n^{t,k}$= Cantidad (kg) del producto n, que se produce en la planta k en el dia t (n=1..N, t=1..T, k=1..K).
$y_{n,j}^{t,i,k}$= Cantidad (kg) del producto n, que se envia desde la bodega k hacia el supermercado i por la via j en el dia t (n=1..N; j=1,2; t=1..T; i=1..I, k=1..K).
$z_n^{t,k}$= Inventario (kg) del producto n en la bodega k, al final del dia t (n=1..N, t=1..T, k=1..K).

Observación: En un problema de optimización pueden existir varias formas alternativas de definir las variables de decisión. Así por ejemplo, en este problema, podria haberse omitido la variable de inventario ($z_n^{t,k}$) pues queda determinada implícitamente por la producción ($x_n^{t,k}$) y los despachos ($y_n^{t,i,k}$). Sin embargo, se incluye por claridad de resolución[4]. Notar que al incluir esta variable, debemos agregar una restricción que una lógicamente $z_n^{t,k}$ con $x_n^{t,k}$ e $y_n^{t,i,k}$ (lo relevante son los *grados de libertad del problema*). En general, la forma en que escojamos nuestras variables hará que sea mas fácil o mas dificil el planteamiento de las restricciones y función objetivo.

b) Restricciones

1) Capacidad productiva de cada planta.

$$x_n^{t,k} \leq K_{k,n} \ \forall \, t, k, n.$$

2) Capacidad de almacenaje en bodega.

$$\sum_{n=1}^{N} F_n \cdot z_n^{t,k} \leq H_k \ \forall \, t, k.$$

3) Satisfacción demanda de supermercados.

$$\sum_{k=1}^{K} y_{n,1}^{t,i,k} + \sum_{k=1}^{K} y_{n,2}^{t-1,i,k} \geq D_{n,i} \ \forall \, n, i, t.$$

Observación:

- $D_{n,i}$ no depende de t porque se supone que todos los dias hay la misma demanda.
- En la restricción anterior, se utilizó un signo de $\geq$, pero tambien podria haberse utilizado uno de = ya que es obvio pensar que en el óptimo no mandaremos mas producto del que sea estrictamente necesario.

[4]Como se verá, en el planteamiento de restricciones es mas corto y mas fácil de entender escribir la cantidad directamente como inventario que como una diferencia entre producción y despacho

4) Balance de flujo de inventario (Restricción que liga producción, despacho e inventario).

$$z_n^{(t-1),k} + x_n^{t,k} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} = z_n^{t,k} \quad \forall\, t, k, n.$$

5) Factibilidad de los despachos (no puedo mandar lo que no tengo en inventario).

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} \leq z_n^{t-1,k} + x_n^{t,k} \;\; \forall\, n, i, t.$$

6) Condición de Borde.

$$z_n^{t,k} = 0 \;\; para\, t = 0, \; \forall\, k, n.$$

7) No negatividad.

$$x_n^{t,k}, y_{n,j}^{t,i,k}, z_n^{t,k} \geq 0 \;\; \forall\, i, j, k, n, t.$$

Observación: Notar que la restricción 5) es redundante pues se deduce de las restricciones iv) y vii), luego podría eliminarse.

c) Función Objetivo.

$$\text{mín } F = \underbrace{\sum_{n,t,k} B_n \cdot x_n^{t,k}}_{\text{Costos de Produccion}} + \underbrace{\sum_{i,j,n,t,k} C_{i,j,k,t} \cdot F_n \cdot y_{n,j}^{t,i,k}}_{\text{Costos de Transporte}} + \underbrace{\sum_{n,t,k} M_k \cdot z_n^{t,k}}_{\text{Costos de Almacenaje}}$$

⊙

2. Hay que agregar la siguiente restricción:

$$x_n^{(t_0-5),k} \leq \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=t_0-5}^{t_0-1} y_{n,1}^{t,i,k} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=t_0-5}^{t_0-2} y_{n,2}^{t,i,k} \quad \forall\, k, n, t_0 = 6, 7, ..T.$$

Que en castellano quiere decir que lo producido hace 5 días del producto n en la bodega k debe ser menor que lo enviado de ese producto y bodega hacia los supermercados de modo que llegue a tiempo. Para que llegue a tiempo, debe ser enviada hasta 1 dia antes al supermercado si se envía por medio de transporte 1 y hasta 2 días de anticipación si se envía por el medio 2[5].

⊙

[5] Se supone que los despachos se realizan siguiendo regla FIFO, es decir un producto elaborado antes que otro igual no puede ser despachado despues que este.

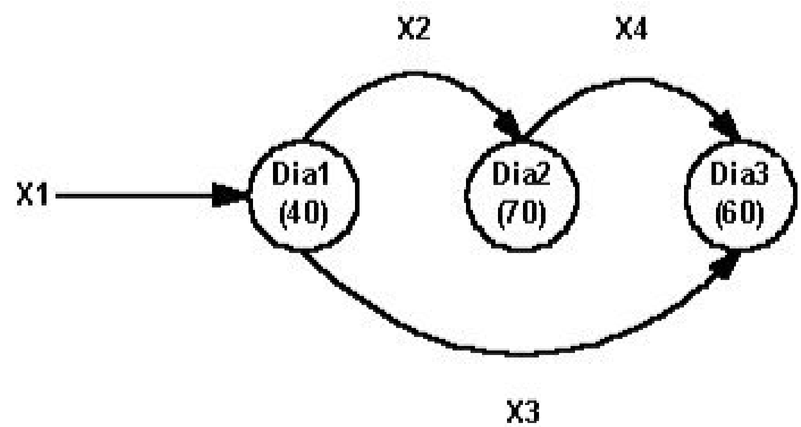
2.3. Problema 3

El dueño de un restaurante necesitará en 3 días sucesivos 40, 60 y 70 manteles. El puede adquirir manteles a un costo de $20 cada una y después de haberlos usado, puede mandar manteles sucios a lavar, para lo cual tiene 2 servicios de lavanderia disponibles: uno rápido (el lavado tarda 1 día) que cuesta $ 15 por cada mantel y uno normal (tarda 2 días) que cuesta $8 por mantel. Formule un modelo que permita conocer al dueño del restaurante que número de manteles debe comprar inicialmente y que número debe mandar a lavar cada día para minimizar sus costos.

2.3.1. Solución

1. Variables de Decisión.

   Muchas veces ayuda hacer un dibujo. En el presente se indican los días, las variables y la cantidad de manteles a ocupar cada día.



   x_1= Cantidad de Manteles comprados (sólo se puede comprar el primer día).
   x_2= Cantidad de Manteles mandados a lavar en servicio rápido el primer día.
   x_3= Cantidad de Manteles mandados a lavar en servicio normal el primer día.
   x_4= Cantidad de Manteles mandados a lavar en servicio rápido el segundo día.

   Notar que tambien podriamos haber definido entre otras

   x_5= Cantidad de Manteles no usados el primer día.
   x_6= Cantidad de Manteles no usados el segundo dia

   Sin embargo, esto no es necesario pues

$x_5 = x_1 - 40.$
$x_6 = x_1 - 40 - 70$

2. Restricciones.

   a) Satisfacción de la necesidad de manteles al primer día
   $x_1 \geq 40$
   b) Satisfacción de la necesidad de manteles al segundo día.
   $(x_1 - 40) + x_2 \geq 60 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 \geq 100$
   c) Satisfacción de la necesidad de manteles al tercer día.
   $(x_1 - 40) + x_2 - 60 + x_3 + x_4 \geq 70 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 170$
   d) El número de manteles mandados a lavar el primer día, puede a lo mas ser igual al número de manteles usados ese día.
   $x_2 + x_3 \geq 40$
   e) El número de manteles mandados a lavar hasta el segundo día, puede a lo mas ser igual al número de manteles usados hasta ese día.
   $x_2 + x_3 + x_4 \geq 40 + 60 \Longleftrightarrow x_2 + x_3 + x_4 \geq 100$
   f) No negatividad.
   $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

3. Función Objetivo.
   mín $Z = 20x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 15x_4$

⊙

2.4. Problema Propuesto

Un granjero esta engordando cerdos para luego venderlos en la primera feria ganadera del milenio y desea determinar las cantidades de cada tipo de alimento disponible que deben darse a cada cerdo para satisfacer con los requerimientos nutricionales a un costo mínimo. Para ello cuenta con la siguiente información:

Ingrediente Nutritivo	**Maiz [kg.]**	**Residuos Grasos [kg.]**	**Alfalfa [kg.]**	**Requerimiento Diario Minimo**
Carbohidratos	90	20	40	200
Proteinas	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Costo	21	18	15	-

⊙