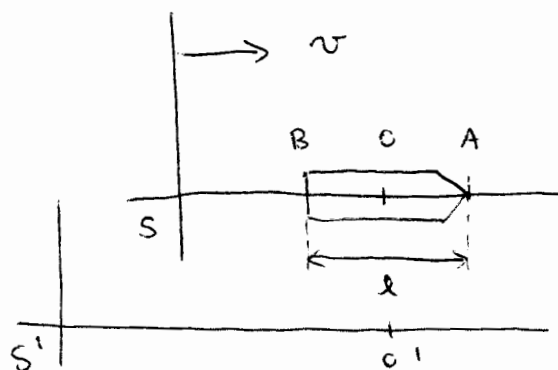


P2]



En el sistema S (solidario al cohete), las fuentes A y B están en reposo, entonces el tiempo que transcurre desde que son emitidas las señales en A y B hasta que llegan a O es

$$\Delta t_A = \Delta t_B = \frac{l}{2c} \quad 2 \text{ pts}$$

Para determinar los tiempos en el sistema S', $\Delta t_A'$ y $\Delta t_B'$, aplicamos la transf. de Lorentz de S a S'.

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$$

Para A, $\Delta x_A = -\frac{l}{2}$, pues la luz avanza hacia la izquierda.

$$\Rightarrow \Delta t_A' = \gamma \left(\frac{l}{2c} - \frac{v}{c^2} \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{2c} \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{2c} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad 2 \text{ pts}$$

Para B, $\Delta x_B = \frac{l}{2}$, pues la luz avanza hacia la derecha.

$$\Rightarrow \Delta t_B' = \gamma \left(\frac{l}{2c} + \frac{v}{c^2} \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{2c} \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{2c} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad 2 \text{ pts}$$

Notar que $\Delta t_B' > \Delta t_A = \Delta t_B > \Delta t_A'$

P1 Considere un sistema de dos electrones descrito por el Hamiltoniano $H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + V(x_1) + V(x_2)$, donde

$V(x) = \infty$ para $x < 0$ y $x > a$; $V(x) = 0$ para $0 < x < a$. Suponga que los electrones tienen el mismo spin.

(a) ¿Cuál es la energía y la función de onda del estado fundamental del sistema?

(b) ¿Cuál es la energía y la función de onda del primer estado excitado?

Sol:

(a) Este problema corresponde a un pozo potencial con dos electrones que no interactúan entre ellos.

Si el sistema fuera de una sola partícula, el resultado es conocido:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \underbrace{\left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}\right)}_{\equiv K} n^2 \quad (*)$$

Para el caso de 2 electrones, no es difícil concluir que la solución de la ec. de Schrödinger respectiva es:

$$\Psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2), \quad E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2)K$$

donde $\Psi_{n_1}(x_1)$ y $\Psi_{n_2}(x_2)$ están dados por (*)

Sin embargo, como se trata de electrones, que son fermiones, hay que antisimetrizar $\Psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ con respecto al intercambio de etiquetas de las partículas: $1 \leftrightarrow 2$.

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1 n_2}^{(A)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \Psi_{n_1}(x_1) & \Psi_{n_1}(x_2) \\ \Psi_{n_2}(x_1) & \Psi_{n_2}(x_2) \end{vmatrix} \quad (\text{determinante de Slater}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2) - \Psi_{n_1}(x_2) \Psi_{n_2}(x_1)) \end{aligned}$$

La antisimetría de $\Psi_{n_1 n_2}^{(A)}(x_1, x_2)$ implica que los electrones deben estar en niveles de energía distintos, pues si $n_1 = n_2$

$$\Rightarrow \Psi_{n_1 n_1}^{(A)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_1}(x_2) - \Psi_{n_1}(x_2) \Psi_{n_1}(x_1)) = 0$$

Entonces, en el estado fundamental de este sistema, un electrón se encuentra en el nivel $n=1$, y el otro en el nivel $n=2$

$$\Rightarrow \psi_{21}^{(A)}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

$$\text{Y } E_{21} = E_{12} = (2^2 + 1^2)K = 5K$$

(b) El primer estado excitado corresponde a $n=1$ para un electrón y $n=3$ para el otro

$$E_{13} = E_{31} = (3^2 + 1^2)K = 10K$$

$$\psi_{31}^{(A)}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{3\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \right]$$

El siguiente estado excitado es $E_{23} = E_{32} = 13K$

" " " " $E_{14} = E_{41} = 17K$

Así sucesivamente, aumentando las energías del sistema.

Si el sistema fuera de 3 electrones, entonces la función de onda del sistema sería:

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}^{(A)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(x_1) & \psi_{n_1}(x_2) & \psi_{n_1}(x_3) \\ \psi_{n_2}(x_1) & \psi_{n_2}(x_2) & \psi_{n_2}(x_3) \\ \psi_{n_3}(x_1) & \psi_{n_3}(x_2) & \psi_{n_3}(x_3) \end{vmatrix}$$