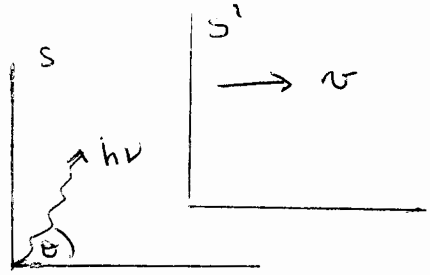
P1 Efecto Doppler Relativista

Considere una fuente en reposo en S que emite fotones de frecuencia ν en una dirección cualquiera. Determine la frecuencia vista por un observador S' que se mueve a $v\hat{x}$.



Sol: La idea es transformar el cuadrivector energía-momen. de Lorentz $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ desde S a S' bajo Transf. de Lorentz

Recordar que para los fotones $(m=0)$: $p = E/c$

$$p^{0\prime} = \gamma(p^0 - \beta p^1) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad y \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \frac{v}{c}p_x\right), \text{ pero } E = h\nu,\ E' = h\nu' \ y \ p_x = p\cos\theta = \frac{E}{c}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{h\nu'}{\cancel{c}} = \gamma\left(\frac{h\nu}{\cancel{c}} - \frac{v}{c}\frac{h\nu}{\cancel{c}}\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu' = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,\nu}$$

En particular, si $\theta = 0$

$$\Rightarrow \nu' = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,\nu$$

$$\Rightarrow \nu' = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\,\nu$$

Si $v > 0$, observador se aleja de la fuente $\Rightarrow \nu' < \nu$

Si $v < 0$, " acerca " $\Rightarrow \nu' > \nu$

(2) $P^{1'} = \gamma \left(P^1 - \beta P^0 \right)$

$\Rightarrow \quad P_x' = \gamma \left(P_x - \frac{v}{c} \frac{E}{c} \right) \qquad P_x = \frac{E}{c} \cos\theta = \frac{h\nu}{c} \cos\theta$

$\Rightarrow \quad \frac{h\nu'}{\cancel{c}} \cos\theta' = \gamma \left(\frac{h\nu}{\cancel{c}} \cos\theta - \frac{v}{c} \frac{h\nu}{\cancel{c}} \right)$

$\Rightarrow \quad \nu' \cos\theta' = \gamma \left(\cos\theta - v/c \right) \nu$

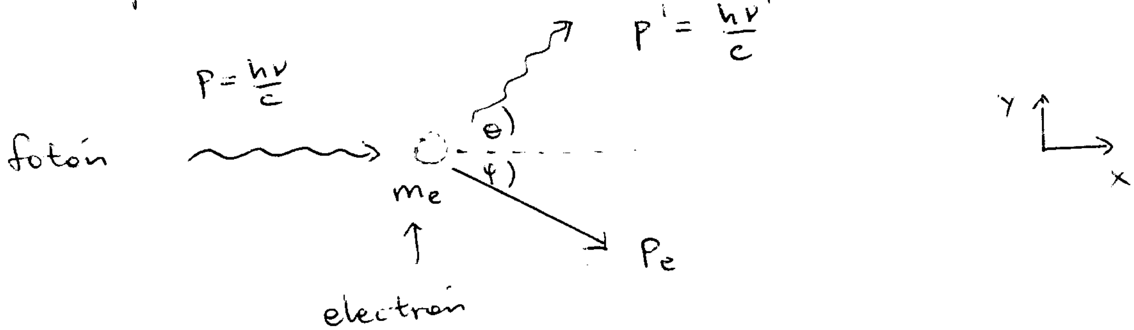
pero de antes, $\nu' = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta \right) \nu$

dividiendo ambas igualdades se obtiene:

$$\boxed{\cos\theta' = \frac{\cos\theta - v/c}{1 - \frac{v}{c} \cos\theta}}$$

P] Efecto Compton

Choque fotón electrón



Demostrar que: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$

Sol: (1) Conservación de la energía

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E_e \qquad (a)$$

(2) Conservación del mom. lineal

en x: $$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + P_e \cos\varphi$$

en y: $$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - P_e \sin\varphi$$

Despejando P_e se tiene

$$P_e^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 \qquad (b)$$

(3) Invariante energía - momentum para el electrón

$$\frac{E_e^2}{c^2} - P_e^2 = m_e^2 c^2 \qquad (c)$$

Reemplazando E_e de (a) y P_e de (b) en (c)

$$\Rightarrow \frac{(h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2}{c^2} - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta - \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = m_e^2 c^2$$

Luego de simplificar términos resulta:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$, y como $\nu = c/\lambda$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)}$$

P] Un electrón que viaja en línea recta con energía cinética K_0 se aniquila con un positrón en reposo, produciéndose 2 fotones. Uno de los fotones resultantes viaja en la dirección del electrón incidente, mientras que el segundo lo hace en sentido contrario. Calcular la energía de cada fotón.

Sol. antes de la colisión | después de la colisión

$\ominus \longrightarrow \qquad \oplus$ | fotón $\leftsquigarrow \quad \rightsquigarrow$ fotón

$E_- = K_0 + mc^2 \qquad E_+ = mc^2$ | $E_2 \qquad E_1$

Cons. energía:
$$E_- + E_+ = E_1 + E_2$$
$$K_0 + mc^2 + mc^2 = E_1 + E_2$$
$$K_0 + 2mc^2 = E_1 + E_2 \quad (1)$$

Cons. mom.:
$$P_- + \cancel{P_+}^{\,0} = P_1 + P_2$$
$$P_- = \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} \quad (2)$$

Invariante E-M:
$$\frac{E_-^2}{c^2} - P_-^2 = m^2c^2 \quad (3)$$

de (3):
$$P_- = \sqrt{\frac{E_-^2}{c^2} - m^2c^2} = \sqrt{\frac{(K_0 + mc^2)^2}{c^2} - m^2c^2} = \frac{\sqrt{K_0^2 + 2K_0mc^2}}{c} \quad (4)$$

(4) en (2):
$$\sqrt{K_0^2 + 2K_0mc^2} = E_1 - E_2 \quad (5)$$

de (1) y (5) se despejan E_1 y E_2:

$$\boxed{\begin{aligned} E_1 &= \frac{K_0 + 2mc^2 + \sqrt{K_0^2 + 2K_0mc^2}}{2} \\ E_2 &= \frac{K_0 + 2mc^2 - \sqrt{K_0^2 + 2K_0mc^2}}{2} \end{aligned}}$$