Solución ejercicios complementarios Teoría de Perturbaciones
FI34A Física Contemporánea
Profesor: Nelson Zamorano

P1.- (a) La ecuación de movimiento del cuerpo es:

$$m\frac{dv}{dt} = -av + bv^2, \quad v(0) = V_0$$

Utilizando el cambio de variables dado resulta:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = V_0\frac{dy}{dx}\frac{a}{m}$$

con lo que se obtiene la ecuación que se nos pide.

(b) La ecuación no perturbada:

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(0) = 1$$

tiene por solución:

$$y(x) = e^{-x}$$

Haciendo el cambio de variables dado, la solución de la ecuación está dada por:

$$y_{exacta}(x) = \frac{e^{-x}}{1 + \epsilon\left(e^{-x} - 1\right)}$$

(c) Expandimos $y(x)$ en su serie de perturbación:

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \ldots$$

$$\begin{aligned} y'_o + \epsilon y'_1 + \epsilon^2 y'_2 + \ldots &= -\left(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \ldots\right) + \epsilon\left(y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \ldots\right)^2 \\ &= -y_0 + \epsilon\left(-y_1 + y_0^2\right) + \epsilon^2\left(-y_2 + 2y_0 y_1\right) + \ldots \end{aligned}$$

Usamos la condición inicial:

$$y(0) = y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \ldots = 1$$

$$\epsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad y_0(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + \ldots = 1$$

Dividiendo por ϵ y haciendo sucesivamente $\epsilon \to 0$ resulta:

$$y_1(0) = y_2(0) = \ldots = 0$$

Resolviendo:

<u>Orden 0:</u> $y'_0 = -y_0, \quad y_0(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = e^{-x}$

<u>Orden 1:</u> $y'_1 = -y_1 + y_0^2, \quad y_1(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'_1 + y_1 = e^{-2x}, \quad y_1(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = e^{-x} - e^{-2x}$

<u>Orden 2:</u> $y'_2 = -y_2 + 2y_0 y_1, \quad y_2(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'_2 + y_2 = 2\left(e^{-2x} - e^{-3x}\right)$
$\Leftrightarrow \quad y_2(x) = e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}$

Así, una solución aproximada resulta ser:

$$y_{aprox}(x) = e^{-x} + \epsilon\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) + \epsilon^2\left(e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}\right)$$

(d) Si hacemos:

$$k = \epsilon\left(e^{-x} - 1\right)$$

Podemos usar que, para k pequeño:

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - k^3 + \dots$$

Así,

$$\begin{aligned} y_{exacta} &= e^{-x}\frac{1}{1+\epsilon\left(e^{-x}-1\right)} = e^{-x}\left(1 - \epsilon\left(e^{-x}-1\right) + \epsilon^2\left(e^{-x}-1\right)^2 - \dots\right) \\ &= e^{-x} + \epsilon\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) + \epsilon^2\left(e^{-x} - 2e^{-2x} + e^{-3x}\right) \end{aligned}$$

Definiendo:

$$E(x) = y_{exacta} - y_{aprox} = m_1(x)\epsilon^3 + m_2(x)\epsilon^4 + \dots$$

para m_1, m_2 funciones que se pueden calcular. Decimos entonces que $E = O(\epsilon^3)$.