



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
Avda. Tupper 2007 – Casilla 412-3 - Santiago – Chile
Fono: (56) (2) 678 4210, Fax: (56) (2) 695 3881

APUNTES DE ELECTROMAGNETISMO

Luis Vargas D.

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Versión Primavera 2006

INDICE

CAPITULO 1. ELECTROSTÁTICA EN EL VACIO	4
1.1 Introducción	4
1.2 Ley de Coulomb	6
1.2.1 Descripción	6
1.2.2 Dimensiones	6
1.3 Campo Eléctrico	8
1.4 Principio de Superposición	10
1.5 Campo Eléctrico de Distribuciones Continuas de Carga.....	14
1.5.1 Distribución Lineal	15
1.5.2 Distribución superficial de carga	19
1.5.3 Distribución Volumétrica de Carga	21
1.6 Ley de Gauss	27
1.6.1 Conceptos Matemáticos Incluidos	27
1.6.2 Ley de Gauss	28
1.7 Potencial Eléctrico	32
1.7.1 Trabajo de un Campo Eléctrico	32
1.7.2 Definición de Potencial Eléctrico	34
1.7.3 Relaciones entre Potencial y Campo Eléctrico	37
1.7.4 Ecuación de Laplace y Poisson	39
1.7.5 Campo Eléctrico Conservativo	41
1.8 Dipolo eléctrico	42
1.8.1 Definición Dipolo	42
1.8.2 Potencial Eléctrico de un Dipolo	42
1.8.3 Dipolo de un Conjunto de Cargas y Distribuciones	45
1.8.4 Potencial a grandes distancias	47
1.9 Problemas Resueltos.....	49
1.9 Problemas propuestos	68
CAPITULO 2. PROPIEDADES DIELECTRICAS DE LA MATERIA	70
2.1 Introducción	70
2.2 Modelo de los Materiales Dieléctricos	70
2.2.1 Materiales No Polares	70
2.2.2 Materiales Polares	72
2.2.3 Vector Polarización	73
2.3 Potencial Eléctrico en la Materia	73
2.4 Distribuciones de carga de polarización.....	74
2.5 Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell.....	77

2.6 Constante Dieléctrica	78
2.6.1 Polarización de medios materiales	78
2.6.2 Clasificación de materiales dieléctricos	79
2.6.3 Ruptura dieléctrica.....	80
2.7 Condiciones de borde	81
2.8 Refracción del campo eléctrico.....	86
2.9 Consideraciones sobre Simetría	87
2.10 Problemas resueltos.....	90
2.11 Problemas Propuestos	97
CAPITULO 3. CONDUCTORES EN ELECTROSTÁTICA	99
3.1 Modelo Básico de Conductores	99
3.2 Propiedades	99
3.3 Caso Conductor con Oquedad	101
3.4 Condensadores	106
3.5 Cargas en medios materiales	111
3.6 Problemas Resueltos.....	112
3.6 Problemas Propuestos	119
CAPITULO 4. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA	122
4.2 Energía de un Sistema de Conductores	123
4.3 Fuerza Eléctrica y Energía	124
4.4 Energía en términos de Campos	126
4.5 Problemas Resueltos.....	130
4.6 Problemas Propuestos	133

INDICE FIGURAS

INDICE TABLAS

Tabla 1. Campos en configuraciones multipolares.....	48
Tabla 2: Valores de permitividad dieléctrica y fuerza dieléctrica de materiales.....	81

CAPITULO 1. ELECTROSTÁTICA EN EL VACIO

1.1 Introducción

El fenómeno electromagnético rige un campo vastísimo de nuestra realidad, para dimensionar su alcance consideremos algunos ejemplos:

- Parte de la actividad del sistema nervioso, la interacción neuronal y el mismo ojo con que se leen estas líneas es gobernado por leyes del electromagnetismo.
- Fenómenos climáticos como la aurora boreal, el rayo y el relámpago se explican en base a esta teoría,
- La luz se entiende como ondas electromagnéticas.
- Las aplicaciones prácticas son muy variadas en el mundo moderno:
 - Toda la tecnología electrónica (TV, PC, celulares, video juegos, etc.) esta basada fuertemente en estos principios,
 - Aplicaciones médicas: Rayos X, electrocardiogramas, electroencefalograma, resonancia magnética, etc.
 - Tarjetas de crédito, códigos de barra de supermercados, sistemas de posicionamiento geográfico, etc.

La comprensión acabada de estos temas requiere del estudio de las especialidades de ingeniería, sin embargo, en este curso aprenderemos los fundamentos que nos permitirán tener un entendimiento básico de los principios en que se basan las aplicaciones tecnológicas listadas anteriormente.

Desde el punto de vista de la descripción del fenómeno partiremos adoptando las siguientes propiedades básicas de la carga eléctrica:

- La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia, como la masa o la capacidad calórica.
- En la naturaleza la carga eléctrica se da en dos formas:
 - Electrón (e) con una masa de $9.1066E-31$ [kg], la cual se define como carga negativa.
 - Protón (p) con una masa de $1.67248E-27$ [kg], la cual se define como carga positiva.
- Ambas partículas poseen carga de igual magnitud pero de signo opuesto.

Para entender mejor la interacción de las cargas conviene dividir el estudio en dos partes. La primera parte considera que no hay movimiento de cargas, es decir, las partículas se encuentran en estado de reposo, mientras que en la segunda se considera la interacción de cargas en movimiento. De esta forma, primero abordaremos situaciones estacionarias (electrostática y magnetostática) y luego incorporaremos las variaciones temporales (corrientes y campos variables en el tiempo).

La teoría que describe matemáticamente estos fenómenos fue formulada alrededor de 1865. Mediante el uso de campos escalares y vectoriales se puede resumir toda la teoría en cuatro ecuaciones, llamadas ecuaciones de Maxwell. Desde aquella fecha hasta nuestros días se ha

producido un enorme desarrollo de aplicaciones tecnológicas en prácticamente todos los campos del quehacer humano, pero la teoría básica no ha experimentado mayores cambios.

En esta primera parte revisaremos los principios que rigen a la carga eléctrica en estado de reposo, más conocida como Electrostática.

1.2 Ley de Coulomb

1.2.1 Descripción

Es una ley experimental, que fue descubierta en 1785 por el coronel francés Charles Augustin de Coulomb. El coronel encontró que la magnitud de la fuerza experimentada por una partícula con carga q_1 en presencia de otra partícula con carga q_2 tiene la forma:

$$\left| F_{q_1/q_2} \right| = \frac{kq_1q_2}{R^2} [N] = \left| F_{q_2/q_1} \right| \quad (1.1)$$

Recordemos que $1N=1 \text{ Kg}\cdot\text{m}/\text{seg}^2$.

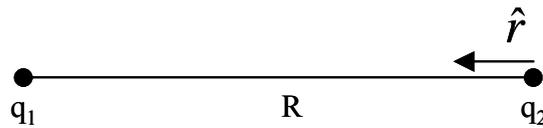


Figura 1. Fuerza de Coulomb

O sea:

- i) Es directamente proporcional al producto q_1q_2 ,
- ii) La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia R

Adicionalmente, se encontró que:

- iii) La fuerza tiene la dirección de la línea que une q_1 y q_2
- iv) Si q_1 y q_2 son de igual signo se repelen, en caso contrario se atraen.

Así, la ecuación de fuerza queda

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = \frac{kq_1q_2}{R^2} \hat{r} \quad [N] \quad (1.2)$$

1.2.2 Dimensiones

Dado que $[k\cdot q_1\cdot q_2]=[F\cdot R^2]=\text{Kg}\cdot\text{m}^3/\text{seg}^2 \Leftrightarrow \text{masa}\cdot\text{distancia}^3/\text{tiempo}^2$

Existe libertad para escoger las unidades de la constante K o de la carga q (pero no ambas). En el sistema MKS se define la unidad 1 Coulomb (C)¹ para las cargas y corresponde a la carga de 6×10^{18} electrones. Así, para un electrón la carga es

$$[q_e] = -1.6030 \times 10^{-19} [C] \approx -1.6 \times 10^{-19} [C]$$

¹ Más tarde veremos que esta unidad es útil en el caso de las corrientes donde se cumple $1 \text{ Ampere} = 1 \text{ C}/\text{seg}$.

Con esta definición experimentalmente se encuentra que:

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \times 10^9 [Kg \cdot m^3 / C^2 \cdot seg^2] \quad (1.3)$$

y definiendo la unidad Farad $[F] = \frac{seg^2}{m}$ la constante ϵ_0 , llamada *permitividad del espacio libre*, corresponde a

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.8541 \times 10^{-12} [F / m]$$

donde c es la velocidad de la luz.

EJEMPLO 1.

Comparar la fuerza de repulsión eléctrica con la fuerza gravitacional entre 2 protones.

Solución:



Figura 2. Módulo fuerza entre cargas.

Fuerza Gravitacional de atracción: $F_g = \frac{Gm_p m_p}{D^2}$ (1.4)

Fuerza eléctrica de repulsión: $F_e = \frac{kq_e^2}{D^2}$ (1.5)

$$\frac{F_e}{F_g} = \left(\frac{Gm_p^2 / D^2}{kq_e^2 / D^2} \right)^{-1} = \frac{kq_e^2}{Gm_p^2} \quad (1.6) \quad G \sim 10^{-10}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9 \times 10^9 [-1.6 \times 10^{-19}]^2}{10^{-10} [1.6 \times 10^{-27}]^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-38}}{10^{-10} \cdot 10^{-54}} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{16}}{10^{-10}} \approx \frac{10^{26}}{10^{-10}} \approx 10^{36}$$

Así, la fuerza eléctrica es 10^{36} veces más intensa que la fuerza gravitacional, por lo que las dos partículas debieran separarse. A partir de este simple ejercicio podemos extrapolar algunas conclusiones:

- La mayoría de los objetos en nuestra vida diaria no están cargados (de otra forma se vería nítidamente su efecto),
- A nivel molecular la gravedad es despreciable como fuerza.
- Entre planetas la fuerza eléctrica es despreciable frente a la gravitacional.
- Toda carga eléctrica es un múltiplo entero de la carga de un protón (igual al electrón con signo opuesto).

1.3 Campo Eléctrico

Para expresar en forma más rigurosa el concepto de fuerza eléctrica se usa el concepto de campo eléctrico. Consideremos el arreglo de cargas de la Figura 3.

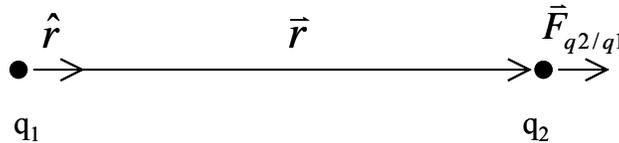


Figura 3. Fuerza entre cargas

Llamemos \vec{F}_{q_2/q_1} a la fuerza que siente q_2 debido a q_1 y escribámosla de la siguiente forma

$$\vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \cdot \frac{q_1 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^2} \quad (1.7)$$

Como $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \left[\frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} \right] \quad (1.7.1)$$

A la expresión $\vec{E} = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ se le denomina campo eléctrico producido por la carga q_1 . Con

esto, la fuerza que siente la carga q_2 en presencia de dicho campo es $\vec{F}_{q_2/q_1} = q_2 \vec{E}$. En términos matemáticos \vec{E} corresponde a un campo vectorial, es decir, una función que asocia un vector a cada punto del espacio. Físicamente corresponde a una perturbación eléctrica en todo el espacio producida por la carga q_1 .

Generalicemos el resultado anterior al de una carga q ubicada en la posición \vec{r}' en un sistema de coordenadas de origen O como en la Figura 4.

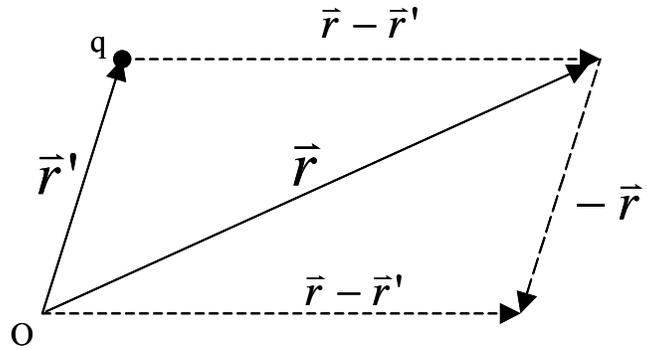


Figura 4. Campo Eléctrico de carga puntual

La expresión del campo eléctrico en un punto \vec{r} de este sistema es

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \text{ [N/C]} \quad (1.7)$$

Las dimensiones son de fuerza sobre carga eléctrica² ; \vec{E} no está definido en el punto $\vec{r} = \vec{r}'$!

Notar que en este análisis q_1 y q_2 son cargas puntuales, es decir, no tienen dimensiones espaciales. Un modelo más preciso de las cargas requiere suponer que existen distribuciones en volumen en donde se reparte la carga. Por ejemplo esferas de radio a y b respectivamente, según se muestra en la Figura 5.

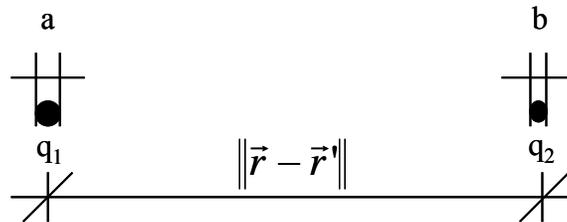


Figura 5. Modelo de cargas puntuales

El modelo de cargas puntuales implica que se cumple $a, b \ll \|\vec{r} - \vec{r}'\|$

Dado que numéricamente la carga de un electrón es muy pequeña (1.6×10^{-19} [C]), es posible definir matemáticamente el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q}{q} \quad (1.8)$$

² Estas dimensiones son equivalentes a volt dividido por metro [v/m] en sistema MKS como veremos más adelante.

1.4 Principio de Superposición

Consideremos n cargas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ localizadas en posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ según se muestra en la Figura 6.

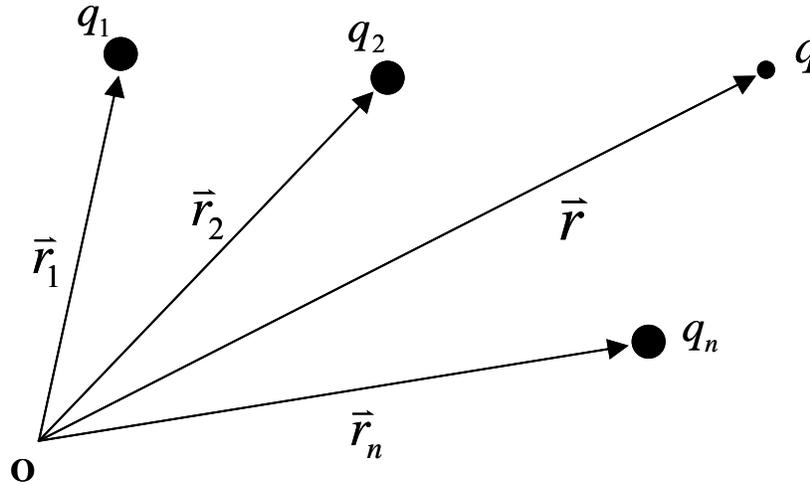


Figura 6. Sistema de Cargas Puntuales

Luego la fuerza resultante que siente una carga q localizada en r es la suma de las fuerzas que cada partícula ejerce sobre ella, es decir,

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}_1 + q \cdot \vec{E}_2 + \dots + q \cdot \vec{E}_n = q \sum_k \vec{E}_k$$

donde
$$\vec{E}_k = \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3}. \quad (1.9)$$

Así, la fuerza puede expresarse como

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \quad (1.10)$$

donde

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{k=1}^n \vec{E}_k \quad (1.11)$$

Este campo \vec{E} es el campo eléctrico resultante de la interacción de todas las cargas en el punto \vec{r} . Así, el campo eléctrico de un conjunto de cargas puede obtenerse como la superposición de todos los campos individuales de cada una de las cargas. Este es el llamado *Principio de Superposición*.

Una manera alternativa de ver esto es considerar el campo eléctrico como una función lineal de la carga. Por lo tanto, satisface las condiciones de linealidad de una función cualquiera $\vec{E}(q_1 + \alpha q_2) = \vec{E}(q_1) + \alpha \vec{E}(q_2)$. (1.12)

EJEMPLO 2.

Considere 2 cargas puntuales de 1 mC y -2 mC ($m = \text{mili} = 10^{-3}$) localizados en (3, 2, -1) y (-1, -1, 4) respectivamente. Se pide calcular la fuerza sobre una carga de 10 nC ($n = \text{nano} = 10^{-9}$) dispuesta en (0,3,1). Calcule la intensidad de campo eléctrico en la posición de dicha carga.

Solución:

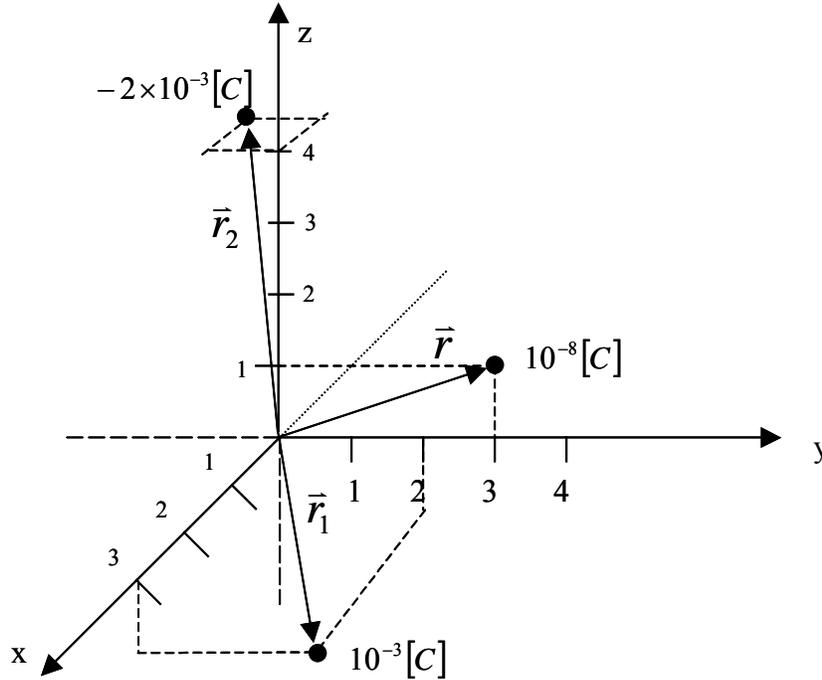


Figura 7. Fuerza entre tres cargas puntuales.

La expresión de la fuerza es

$$\vec{F} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-3} (\vec{r} - \vec{r}_1)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} - \frac{10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-3} (\vec{r} - \vec{r}_2)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3} \quad (1.13)$$

Donde

$$\vec{r} = (0, 3, 1)$$

$$\vec{r}_1 = (3, 2, -1)$$

$$\vec{r}_2 = (-1, -1, 4)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) = (-3, 1, 2) \Rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3 = \left[\sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2} \right]^3 = \left[\sqrt{14} \right]^3 = \sqrt{14}^3 = 14\sqrt{14}$$

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_2) &= (1, 4, -3) \Rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3 = \left[\sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-3)^2} \right]^3 \\ &= \left[\sqrt{26} \right]^3 = \sqrt{(26)^3} = 26 \sqrt{26} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^9 (-3, 1, 2)}{14\sqrt{14}} - \frac{10^{-11} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10^9 (1, 4, -3)}{26\sqrt{26}} = (-6.507, -3.817, 7.506) \text{ mN}$$

Luego el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = (-6.507, -3.817, 7.506) \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-8}} \quad (1.18)$$

$$\vec{E} = (-650.7, -381.7, 750.6) \cdot 10^3 [N/C] \text{ ó } [V/C]$$

EJEMPLO 3

Dos cargas puntuales de masa m y carga q cada una están suspendidas desde un punto común mediante dos hilos de masa despreciable y longitud l . Muestre que en la situación de equilibrio el ángulo α que forma cada hilo con respecto a la vertical satisface la expresión

$$q^2 = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

si α es muy pequeño muestre que

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 mgl^2}}$$

Solución:

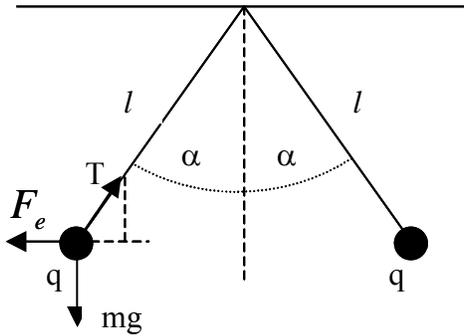


Figura 8. Equilibrio electrostático

Por la situación de equilibrio (estamos en electrostática) se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} F_e = T \sin \alpha \\ mg = T \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{F_e}{mg} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.19)$$

Sabemos que $F_e = \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \alpha)^2}$ (1.20), luego $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4l^2 \sin^2 \alpha} = mg \operatorname{tg} \alpha$ (1.21)

$$\therefore q^2 = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (1.22)$$

si $\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \rightarrow \alpha$, $\cos \alpha \rightarrow 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \alpha$

reemplazando obtenemos $q^2 = 16\pi\epsilon_0 mgl^2 \alpha^2 \cdot \alpha$, $\therefore \alpha = \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 mgl^2}}$ (1.23)

EJEMPLO 4

Se dispone de un material que cae por un tubo desde un proceso minero. Dicho material está compuesto de varias sustancias de donde interesa separar partículas de cuarzo cargadas positivamente de partículas de fosfato de roca cargadas en forma negativa. Para ello se idea el sistema de la Figura 9 en donde se aplica un campo eléctrico horizontal de $E=500.000$ [v/m].

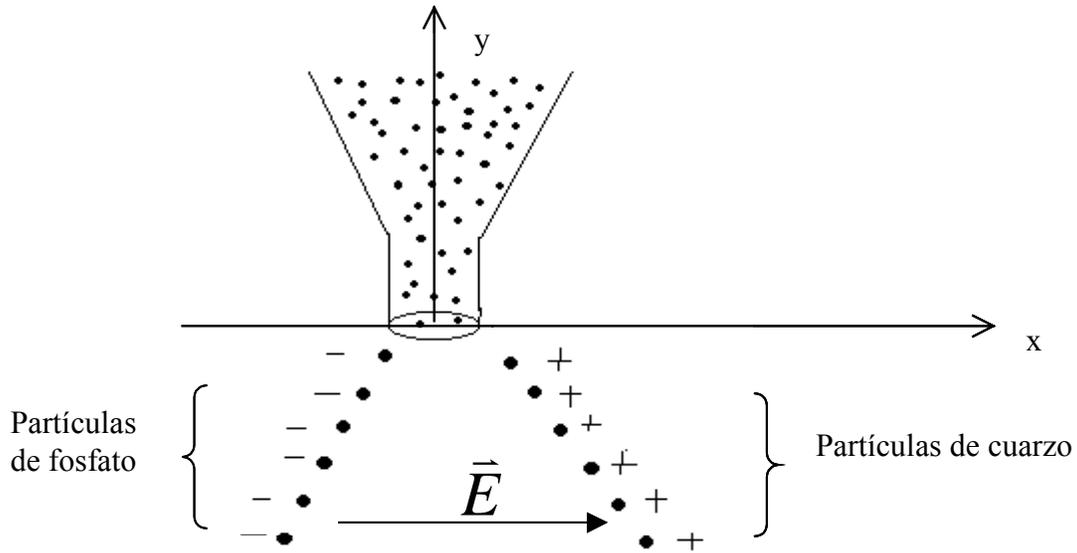


Figura 9. Movimiento de cargas

Suponiendo velocidad y desplazamiento inicial nulo (boca del tubo) y una relación carga/masa de ambas partículas igual a $q/m = 9$ [μ C/Kg.] ($\mu = \text{micro} = 10^{-6}$). Se pide determinar la separación horizontal de las partículas luego de caer 80 cms.

Solución:

Suposición: A pesar de que las cargas se mueven, aquí sólo usamos la fuerza electrostática y despreciamos la interacción entre las cargas en movimiento.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a} & \vec{F} &= F_e \hat{x} + \vec{F}_g \hat{y} \quad (1.24) \\ \Rightarrow q \cdot \vec{E} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.25) & -mg &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ q \cdot 500000 &= m \frac{d^2 x}{dt^2} & -g &= \frac{d^2 y}{dt^2} \quad / \int \\ \frac{q}{m} \cdot 500000 &= \frac{d^2 x}{dt^2} & -gt + c_3 &= \frac{dy}{dt} \quad / \int \\ 9 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^5 &= \frac{d^2 x}{dt^2} \quad / \int & y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4 \end{aligned}$$

$$4.5 = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow 4.5t + c_1 = \frac{dx}{dt} \quad \int$$

$$x(t) = \frac{4.5t^2}{2} + c_1t + c_2$$

C.I. $x(t=0)=0$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{4.5}{2}t^2$$

C.I. $y(t=0)=0, \dot{y}(t=0)=0$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{9.8}{2}t^2$$

Se pide la distancia entre las cargas luego de desplazarse 80 cm en el sentido del eje y, o sea

$$y = -0.8 = -\frac{9.8}{2}t^2$$

Resolviendo se encuentra que esa distancia se alcanza en un tiempo $t^2 = 0.1633$.

Reemplazando este tiempo en la ecuación para $x(t)$ se tiene:

$$\Rightarrow x(t) = \frac{4.5}{2} \cdot 0.1633$$

$$\Rightarrow x = 0.3678m$$

$$\therefore \text{distancia} = 2x = 73.47[cm]$$

Propuesto

Resuelva el mismo problema suponiendo que ahora se tiene una estimación de la velocidad máxima de salida del material por el tubo $v_{\max} = 10m/s$ y se requiere calcular el campo eléctrico de modo que se separen 1 m todas las partículas de cuarzo y fosfato antes de que caigan 80 cm.

1.5 Campo Eléctrico de Distribuciones Continuas de Carga

Habíamos dicho que cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales el campo tiene la expresión:

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^m \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{4\pi \epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3} \quad (1.26)$$

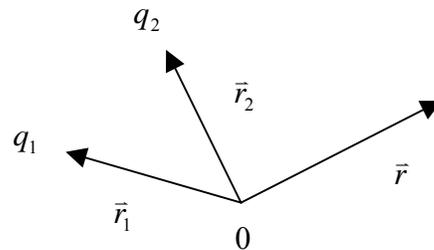


Figura 10. Campo de sistema de cargas

Por extensión, cuando se tiene una distribución continua de carga tenemos $\Sigma \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$ (dq ubicada en r'). Con ello la expresión para el campo queda

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq \quad (1.27)$$

Examinaremos 3 casos: Distribución de carga lineal, superficial y en volumen.

1.5.1 Distribución Lineal

En este caso se tiene una densidad lineal $\lambda(\vec{r}')$ [C/m] de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \lambda(\vec{r}') dl'$ según se muestra en la Figura 11.

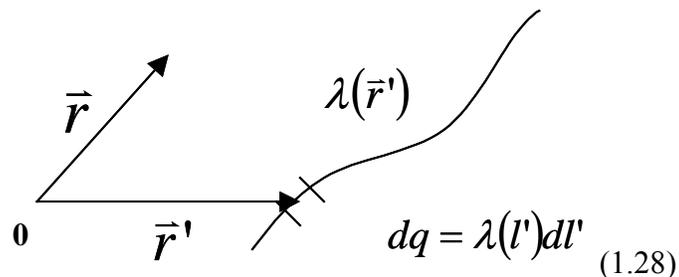


Figura 11. Distribución Lineal de Carga

Luego la expresión del campo es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \lambda(l) dl \quad (1.29)$$

EJEMPLO 5.

Considere una distribución lineal de carga λ que se extiende de A a B a lo largo del eje Z, como se muestra en la Figura 12. Se pide calcular el campo en todo el espacio.

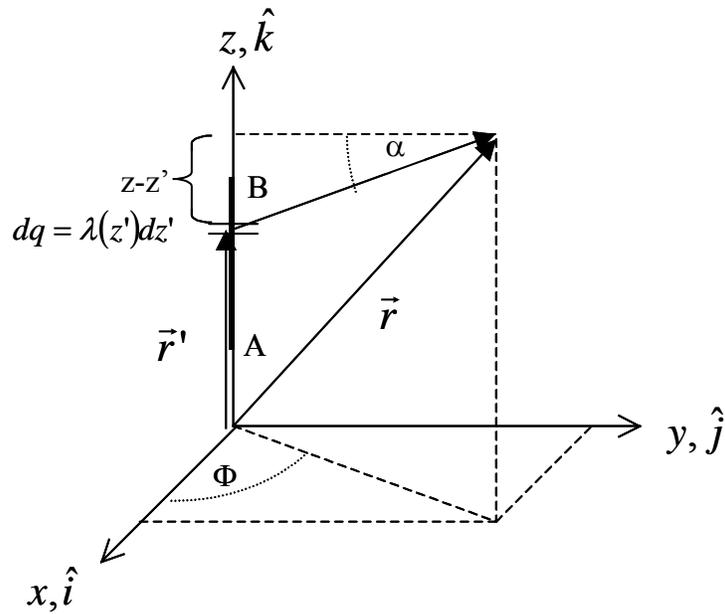


Figura 12. Campo de distribución rectilínea

Solución:

Consideración física inicial: El campo tiene simetría azimutal, es decir, la magnitud no depende de ϕ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{r}' &= (0, 0, z') = z'\hat{k} \end{aligned} \right\} (\vec{r} - \vec{r}') = (x, y, z - z')$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 = \left[\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \right]^3$$

$$dl = dz'$$

$$\lambda(l) = \lambda, \text{ constante}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + (z - z')\hat{k})}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \cdot \lambda \cdot dz'$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{x\hat{i}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' + \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{y\hat{j}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' + \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{(z - z')\hat{k}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' \right\}$$

Necesitamos resolver 2 tipos de integrales, para lo cual usamos las siguientes propiedades geométricas de la configuración

$$\sin \alpha = \frac{z - z'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (1.30)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \quad (1.31)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z - z'}{[x^2 + y^2]^{1/2}} \quad (1.32)$$

Resolvamos ahora el primer tipo de integral.

a) $\int_{z_1'}^{z_2'} \frac{x dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$ hagamos el cambio de variable $z - z' = a \operatorname{tg} \alpha$ con $a^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow dz' = -a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{x dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x[-a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)] d\alpha}{[x^2 + y^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha]^{3/2}}$$

$$= -\frac{xa}{a^3} \times \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha]^{3/2}}$$

además $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

entonces

$$\int_{z_1'}^{z_2'} \frac{x dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{x}{a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = -\frac{x}{a^2} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{x}{a^2} [\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2]$$

Suponiendo que en el punto A $z' = z_1'$ y en B $z' = z_2'$ se tiene

$$\sin \alpha_1 = \frac{z - z_1'}{[x^2 + y^2 + (z - z_1')^2]^{1/2}}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{z - z_2'}{[x^2 + y^2 + (z - z_2')^2]^{1/2}}$$

Luego las dos primeras integrales corresponden a lo siguiente:

$$\int_{z_1'}^{z_2'} \frac{x dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{z - z_1'}{[x^2 + y^2 + (z - z_1')^2]^{1/2}} - \frac{z - z_2'}{[x^2 + y^2 + (z - z_2')^2]^{1/2}} \right]$$

$$\int_{z_1'}^{z_2'} \frac{y dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{y}{(x^2 + y^2)} \left[\frac{z - z_1'}{[x^2 + y^2 + (z - z_1')^2]^{1/2}} - \frac{z - z_2'}{[x^2 + y^2 + (z - z_2')^2]^{1/2}} \right]$$

Resolvamos ahora la tercera integral.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{(z-z')dz'}{\left[x^2+y^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} & \quad \text{usamos el mismo cambio de variable } (z-z')=atg\alpha, \quad a^2=x^2+y^2 \\
 & \quad \Rightarrow dz'=-a(1+tg^2\alpha)d\alpha \\
 & = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{atg\alpha \left[-a(1+tg^2\alpha)\right]d\alpha}{\left[a^2+a^2tg^2\alpha\right]^{3/2}} \\
 & = -\frac{a^2}{a^3} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{tg\alpha \, d\alpha}{\left[1+tg^2\alpha\right]^{1/2}} \\
 & = -\frac{1}{a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos\alpha \, \sin\alpha}{\cos\alpha} d\alpha = -\frac{1}{a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha \\
 & = \frac{1}{a} \cos\alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{1}{a} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \\
 & = \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z_2')^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z_1')^2\right]^{1/2}}
 \end{aligned}$$

Así, tenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
 \bar{E} & = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{z-z_1'}{\left[x^2+y^2+(z-z_1')^2\right]^{1/2}} - \frac{z-z_2'}{\left[x^2+y^2+(z-z_2')^2\right]^{1/2}} \right] \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) \right\} \\
 & + \left[\frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z_2')^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+(z-z_1')^2\right]^{1/2}} \right] \hat{k}
 \end{aligned}$$

Casos particulares:

a) $z_1'=0, z_2'=\infty$, distribución lineal semi-infinita

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} + 1 \right] \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2+y^2} - \frac{\hat{k}}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \right\}$$

b) $z_1' \rightarrow -\infty, z_2' = \infty$ distribución lineal infinita

$$\bar{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \{1+1\} \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2+y^2} \quad \text{luego,} \quad \bar{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2+y^2} \right]$$

y en coordenadas cilíndricas:

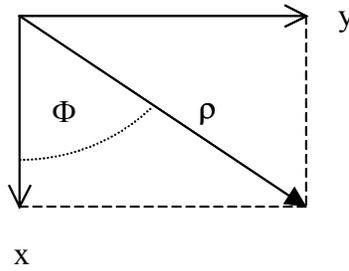


Figura 13. Cambio de coordenadas

$$\left. \begin{aligned} \frac{x\hat{i}}{x^2 + y^2} &= \frac{x\hat{i}}{\rho^2} = \frac{\cos\phi}{\rho}\hat{i} \\ \frac{y\hat{j}}{x^2 + y^2} &= \frac{y\hat{j}}{\rho^2} = \frac{\sin\phi}{\rho}\hat{j} \end{aligned} \right\} \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j} = \hat{\rho}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

Notar que el campo no está definido para $\rho = 0$.

1.5.2 Distribución superficial de carga

En este caso se tiene una densidad superficial $\sigma(\vec{r}')$ [C/m²] de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \sigma(\vec{r}')ds$ según se muestra en la Figura 14.

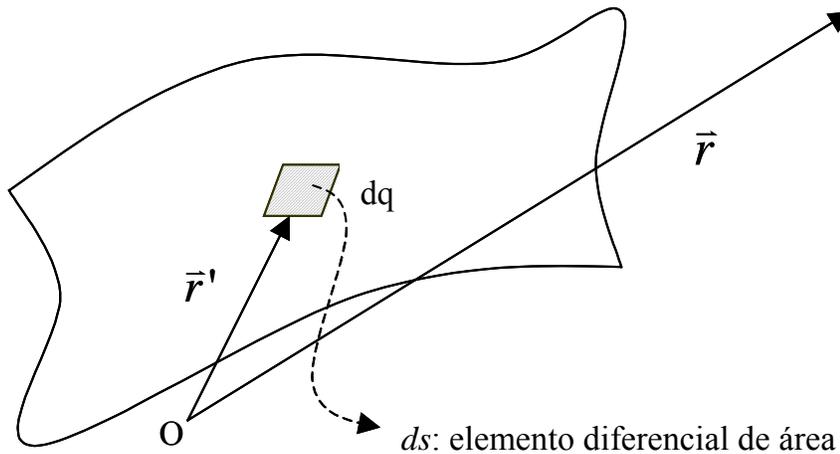


Figura 14. Distribución Superficial de Carga

Aquí $ds = ds(\vec{r}')$ y la ecuación del campo eléctrico queda entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_s \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\sigma(\vec{r}')ds}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.33)$$

EJEMPLO 6.

Considere un disco de radio R, el cual posee una distribución de carga superficial σ constante. Se pide determinar el campo en el eje z, según se muestra en la Figura 15.

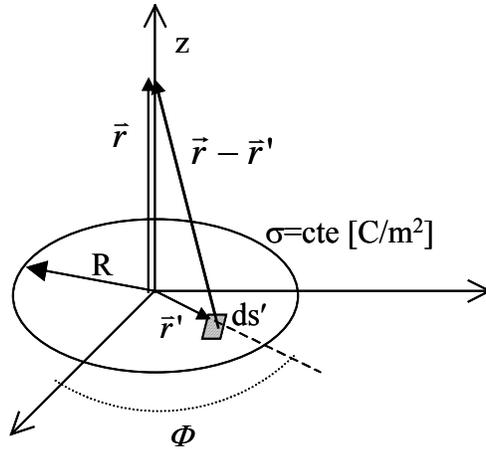


Figura 15. Disco uniformemente cargado

Solución:

Los vectores de posición son

$$\vec{r} = (0,0,z)$$

$$\vec{r}' = (x',y',0)$$

Luego,

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-x',-y',z)$$

El campo eléctrico en el eje z es

$$\vec{E}(\vec{r}) = (0,0,z) = \iint_s \frac{(-x'\hat{i} - y'\hat{j} + z\hat{k})\sigma}{4\pi\epsilon_0 [x'^2 + y'^2 + z^2]^{3/2}} ds$$

Usaremos coordenadas polares:

$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2$$

$$ds' = \rho' d\phi d\rho'$$

$$\vec{E}(z) = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=R} -\frac{\rho' \hat{\rho} + z\hat{k}}{4\pi\epsilon_0 [\rho'^2 + z^2]^{3/2}} \sigma \rho' d\phi d\rho'$$

por simetría

$$\vec{E}(z) = E\hat{k},$$

o sea

$$\int_{\rho=0}^{\rho=R} -\frac{\rho'^2 d\rho' \hat{\rho}}{[\rho'^2 + z^2]^{3/2}} = 0 \quad (\text{probarlo})$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \frac{z\rho' d\rho' \hat{k}}{[\rho'^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-(\rho'^2 + z^2)^{-1/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} \hat{k}$$

$$\therefore \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{k}$$

Caso particular:

$R \rightarrow \infty$, plano infinito \Rightarrow

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 |z|} \hat{k}$$

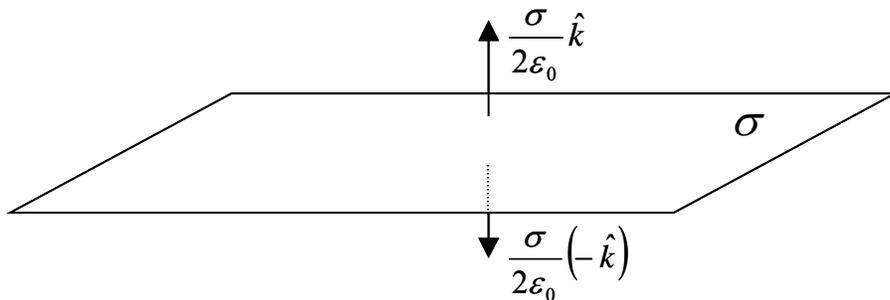


Figura 16. Plano infinito uniformemente cargado.

Notar que el campo es constante y sólo cambia de signo cuando el eje z pasa por cero. Más tarde veremos que este resultado es importante para el estudio de conductores.

1.5.3 Distribución Volumétrica de Carga

Consideremos una distribución de carga en volumen representada por el campo escalar $\rho(\vec{r}')$ [C/m^3] de modo que el elemento diferencial de carga es $dq = \rho(\vec{r}') dv'$ según se muestra en la Figura 17.

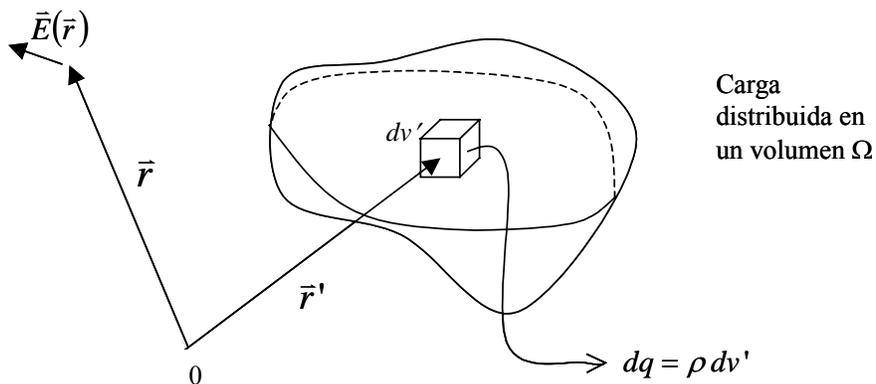


Figura 17. Distribución volumétrica de carga

La expresión para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\rho dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.34)$$

Donde la integral se calcula en todo el espacio Ω donde hay carga.

EJEMPLO 7.

Se tiene una distribución esférica de carga total Q y radio R . Se pide determinar la densidad de carga ρ en toda la esfera suponiendo que ella se distribuye uniformemente.

Solución:

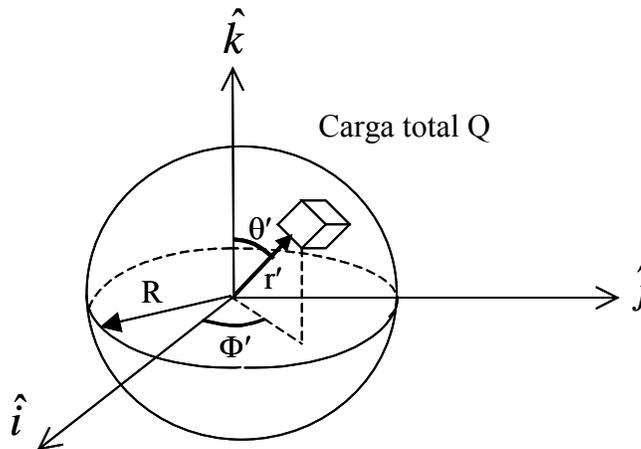


Figura 18. Esfera cargada

La distribución de carga ρ cumple con

$$\iiint \rho dv = Q$$

donde el elemento de volumen dv es

$$dv = r d\theta r \sin \theta d\phi dr$$

$$dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

Reemplazando,

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = Q$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r^2 \underbrace{(-\cos \theta)^\pi}_{1 - (-1) = 2} d\phi dr = Q$$

$$\int_0^R \rho r^2 2 \cdot 2\pi dr = Q$$

$$\rho \frac{R^3}{3} 4\pi = Q \Rightarrow \therefore \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

EJEMPLO 8.

Determine el campo eléctrico producido por la distribución de carga del Ejemplo 7 para $r > R$ en todo el espacio.

Solución:

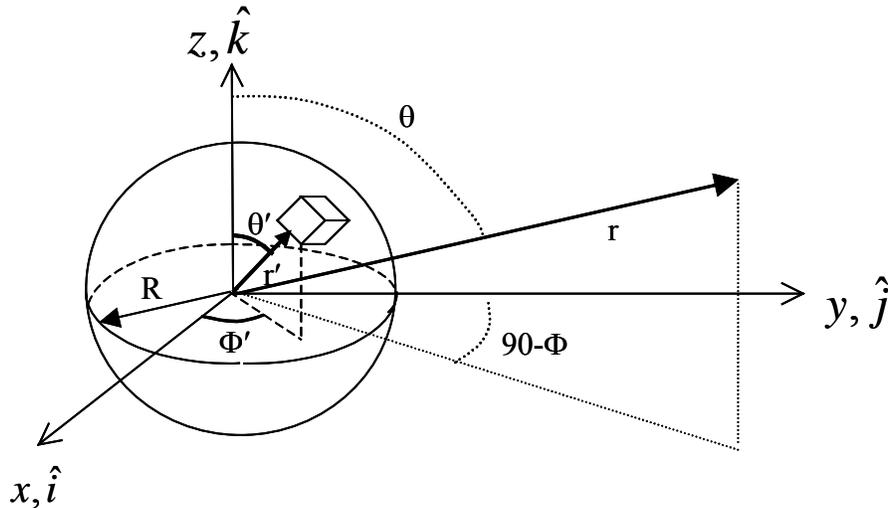


Figura 19. Campo eléctrico esfera cargada.

La expresión para el campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\rho}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv \quad (1.35)$$

Usando coordenadas esféricas

$$\vec{r}' = r' \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + r' \cos \theta' \hat{k}$$

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

con ello la expresión para el campo queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{((r \sin \theta \cos \phi - r' \sin \theta' \cos \phi')\hat{i} + (r \sin \theta \sin \phi - r' \sin \theta' \sin \phi')\hat{j} + (r \cos \theta - r' \cos \theta')\hat{k})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'$$

El problema ahora es resolver esta integral. ¡Tarea ardua!

Por ello en general se recurre a simplificaciones para resolver este tipo de problemas. Veremos aquí una variante. Dado que el problema presenta simetría esférica, basta con calcular el campo en el eje z (además al integrar sobre ϕ' las otras integrales se anulan).

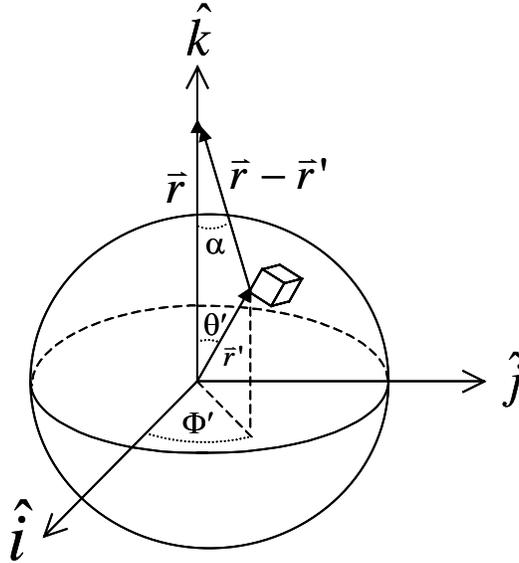


Figura 20. Coordenadas esféricas

Así, calculamos la componente en z del campo, es decir,

$$E_z = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{k} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv \cdot \hat{k} \quad (1.36)$$

Desarrollando el producto punto

$$(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{k} = \|\vec{r} - \vec{r}'\| \cdot \cos \alpha$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{z - r' \cos \theta'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{z - r' \cos \theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'}}$$

además

$$dv = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

Reemplazando

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dv \cos \alpha}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2}$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' dr'}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^2}$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(z - r' \cos \theta') r'^2 \sin \theta'}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{3/2}} d\theta' dr'$$

No depende de ϕ' . Realicemos ahora las integraciones en las otras variables.

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos \theta') r'^2 \sin \theta'}{[z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}} d\theta' dr'$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\int_0^R \int_0^\pi \frac{z r'^2 \sin \theta' d\theta' dr'}{[z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}}}_A - \underbrace{\int_0^R \int_0^\pi \frac{r'^3 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' dr'}{[z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}}}_B \right\}$$

$$A = \int_0^R z r'^2 \left[\frac{[z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{-1/2}}{2r'z} \right]_0^\pi dr'$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^R \left[\frac{1}{z^2 + r'^2 - 2r'z} - \frac{1}{z^2 + r'^2 + 2r'z} \right] r' dr' = \frac{1}{2} \int_0^R \left[\frac{1}{(z+r')^2} - \frac{1}{(z-r')^2} \right] r' dr'$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\int_0^R \frac{r' dr'}{(z+r')^2} - \int_0^R \frac{r' dr'}{z-r'} \right] \quad \begin{array}{l} z+r' = x_1 \Rightarrow dr' = dx_1 \\ r' dr' = (x_1 - z) dx_1 \end{array}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\int_z^{z+R} \frac{(x_1 - z) dx_1}{x_1^2} + \int_z^{z-R} \frac{(z - x_2) dx_2}{x_2^2} \right] \quad \begin{array}{l} z - r' = x_2 \Rightarrow dr' = -dx_2' \\ r' dr' = -(z - x_2) dx_2 \end{array}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\int_z^{z+R} \frac{dx_1}{x_1} - z \int_z^{z+R} \frac{dx_1}{x_1^2} + z \int_z^{z-R} \frac{dx_2}{x_2^2} - z \int_z^{z-R} \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

etc.....

Se llega finalmente a

$$\vec{E}_z = \frac{R^3 \rho}{z^2 \epsilon_0} \quad (1.37)$$

como existe simetría radial, el campo en todo el espacio tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho \hat{r}}{\|\vec{r}\|^2 \epsilon_0} \quad (1.38)$$

y si usamos el hecho de que $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$, también podemos expresar el campo eléctrico

como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q \hat{r}}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \epsilon_0} \quad (1.39)$$

Veamos un camino más corto (pero también más difícil de imaginar). Notemos que se cumple

$$\frac{d}{dz} [z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{-1/2} = \frac{-(z - r' \cos \theta)}{[z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta']^{3/2}}$$

Luego podemos escribir la integral como

$$E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(z - r' \cos \theta') r'^2 \sin \theta'}{[z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{3/2}} d\theta' dr'$$

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{d}{dz} [z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta']^{-1/2} r'^2 \sin \theta' d\theta' dr'$$

Observemos ahora que

$$\frac{d}{d\theta} [z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta]^{1/2} = [z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta]^{-1/2} zr' \sin \theta'$$

luego podemos escribir la integral como

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r'}{z} \frac{d}{d\theta} [z^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta]^{1/2} d\theta' dr'$$

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \int_0^R \frac{r'}{z} [(z^2 + r'^2 + 2zr')^{1/2} - (z^2 + r'^2 - 2zr')^{1/2}] dr'$$

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \int_0^R \frac{r'}{z} [|z + r'| - |z - r'|] dr'$$

Si suponemos que $z > R$ luego $|z + r'| - |z - r'| \cong 2r'$, luego

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \int_0^R \frac{r'}{z} 2r' dr'$$

$$E_z = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} \left[2 \frac{R^3}{3z} \right]$$

$$E_z = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R^3}{z^2} \right]$$

por la simetría radial, el campo tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{R^3 \rho \hat{r}}{\|\vec{r}\|^2 \epsilon_0} \quad (1.40)$$

Al introducir la carga en función de la densidad se obtiene el mismo campo calculado anteriormente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q \hat{r}}{4\pi \|\vec{r}\|^2 \epsilon_0} \quad (1.41)$$

Dado que el cálculo directo de los campos se dificulta con la evaluación de integrales, es de suma utilidad el uso de programas computacionales en aplicaciones prácticas. Además, en muchos casos facilita los cálculos la Ley (o teorema) de Gauss que veremos a continuación.

1.6 Ley de Gauss

1.6.1 Conceptos Matemáticos Incluidos

Antes de ver la Ley de Gauss conviene repasar los siguientes conceptos de cálculo vectorial.

i) **Concepto de Flujo.** Consideremos un campo vectorial \vec{A} definido en todo el espacio y una superficie S cualquiera como se muestra en la Figura 21.

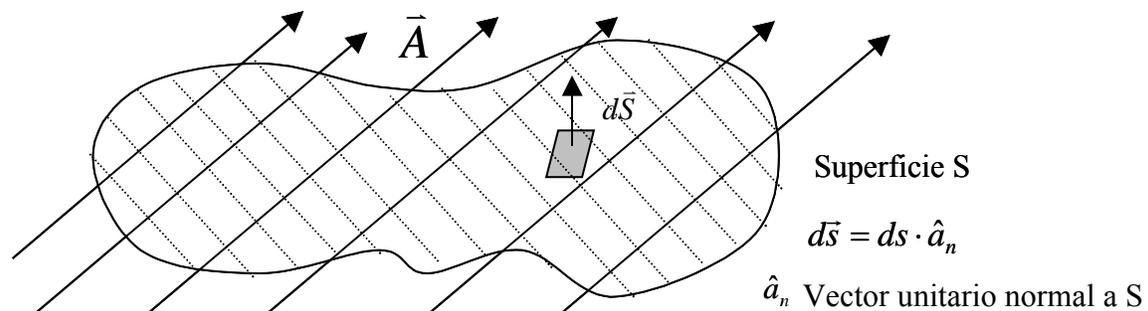


Figura 21. Concepto de flujo

Se define el flujo Ψ de \vec{A} a través de la superficie S como

$$\Psi = \iint_S \vec{A} \bullet d\vec{S} \quad (1.42) \text{ Integral de superficie del}$$

producto de dos vectores³

Notar que Ψ es un campo escalar que depende del sentido en que se escoja el vector unitario \hat{a}_n . Para superficies cerradas

$$\Psi = \oiint_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

³ El símbolo \bullet se usará para designar el producto punto de dos vectores.

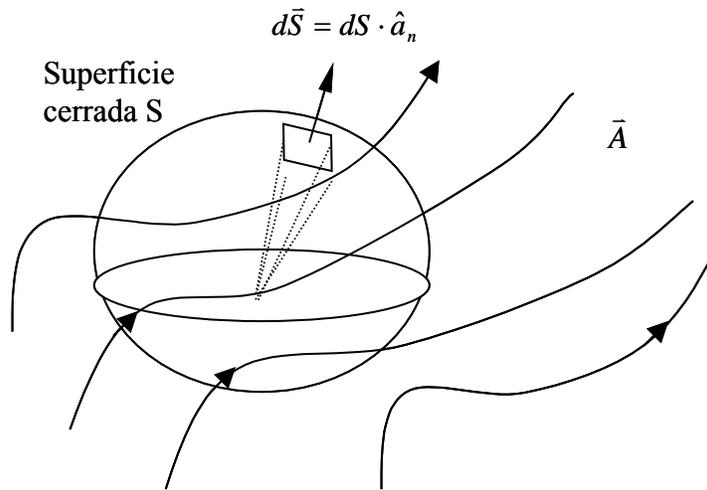


Figura 22. Flujo en esfera cerrada.

ii) Teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \nabla \cdot \vec{A} dv \quad (1.43)$$

donde V es el volumen contenido por la superficie cerrada y ∇ es el operador

$$\nabla = \frac{\partial \hat{i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{j}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial z} \text{ en coordenadas cartesianas.}$$

Si $\vec{A} = \vec{E}$ campo eléctrico, entonces Ψ representa el flujo de campo eléctrico. Interesa el caso de superficies cerradas.

$$\Psi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.44)$$

1.6.2 Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ϵ_0 . Así:

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

Dado que $Q_T = \iiint_V \rho dV$ para una distribución volumétrica entonces:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho dv \quad (1.46)$$

Ahora si aplicamos el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad \text{dado que esto es válido } \forall \text{ volumen } V,$$

entonces

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.47)$$

Esta ley provee un método muy fácil para calcular el campo eléctrico.

Es usual definir el vector $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ como **Vector Desplazamiento** (ya veremos que en medios materiales tiene un significado físico importante), de modo que la ecuación anterior se escribe como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.48) \quad \text{Esta ecuación es la 1ª Ecuación de Maxwell.}$$

EJEMPLO 8.

Calcule el campo eléctrico en todo el espacio producido por una distribución homogénea de carga ρ dispuesta en una esfera de radio R .

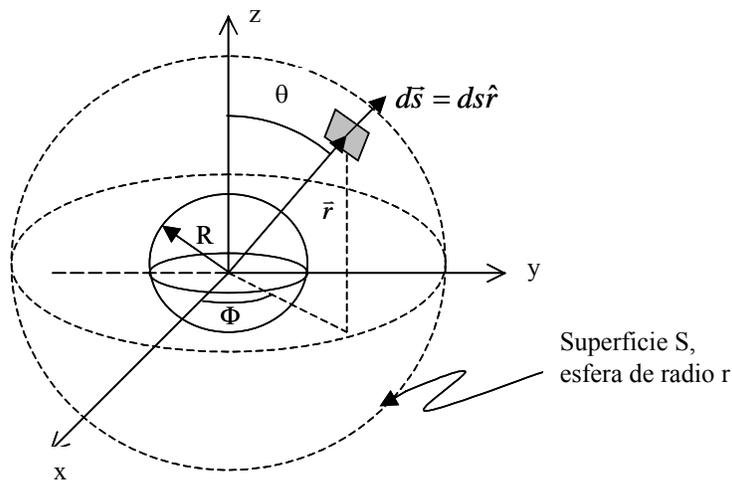


Figura 23. Distribución esférica homogénea de carga.

Solución:

Para $r > R$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}, \quad \text{con } Q_T = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$\|\vec{E}(r)\|$ es constante para r fijo y por simetría $\vec{E}(r)$ apunta en la dirección \hat{r} en coordenadas esféricas, es decir, $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{r}$, luego

$$d\vec{S} = r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi \hat{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(\vec{r}) \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\dots = \int_0^{\pi} 2\pi E(\vec{r}) r^2 \sin \theta d\theta = 2\pi E(\vec{r}) r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$\dots = E(\vec{r}) 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} = 4\pi r^2 E(\vec{r})$$

Reemplazando $\Rightarrow 4\pi r^2 E(\vec{r}) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$

$$\therefore E(\vec{r}) = \frac{R^3}{3r^2} \rho \hat{r}$$

Para $r < R$ tenemos:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(\vec{r})$$

y la carga encerrada por S es

$$Q = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho dv \quad (1.49)$$

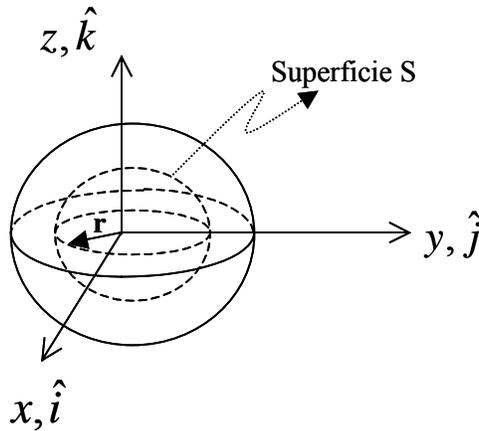


Figura 24. Flujo superficie esférica.

$$\dots = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = \rho \int_0^r \int_0^{\pi} r^2 2\pi \sin \theta d\theta dr$$

$$\dots = \rho \int_0^r r^2 2\pi (-\cos \theta)_0^{\pi} dr = 4\pi \rho \int_0^r r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

luego:

$$4\pi r^2 E \hat{r} = \frac{4\pi r^3}{3 \epsilon_0} \rho \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{r}{3 \epsilon_0} \rho \hat{r}$$

Gráficamente:

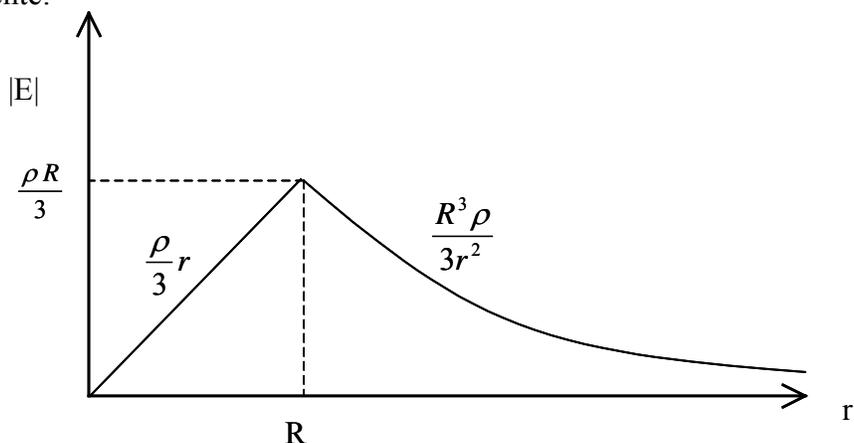


Figura 25. Campo de una esfera.

Así, de acuerdo a la Figura 25 el campo es máximo en la superficie de la esfera, desde donde decae en ambos sentidos.

Este ejemplo sirve para comprender mejor el modelo de cargas puntuales. En efecto, si deseamos calcular el campo en las cercanías de una carga puntual debe recurrirse a un modelo parecido al desarrollado en este ejemplo, en donde se ve que el campo justo en el centro de la partícula es cero.

Conviene puntualizar algunos aspectos de la Ley de Gauss:

i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría, o sea cuando se puede “sacar” la magnitud del campo eléctrico E de la integral de superficie, es decir, cuando se puede efectuar la manipulación

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oiint_S d\vec{s} \Rightarrow E = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0 \oiint_S d\vec{s}}$$

ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio.

iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica). Por ejemplo consideremos que tenemos una carga puntual en presencia de una distribución en volumen como la mostrada en la Figura 26. Se desea calcular el campo en todo el espacio. Una solución simple consiste en aplicar superposición.

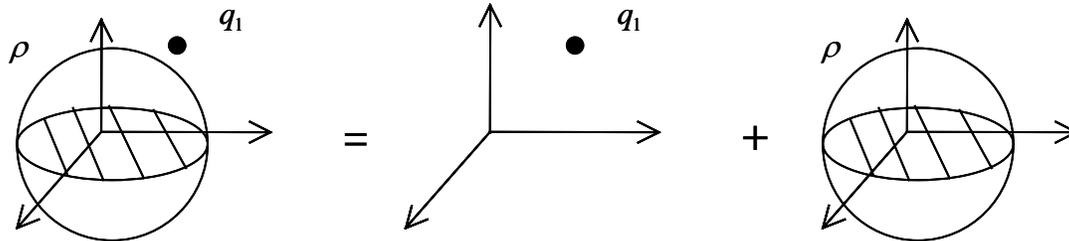


Figura 26. Superposición aplicada.

En este ejemplo no es posible usar directamente la Ley de Gauss en la configuración inicial (lado izquierdo) y, por otro lado, la integración directa resulta de gran complejidad. Sin embargo, al aplicar la superposición se resuelven separadamente los campos para la situación de una carga puntual sola, y luego la de la esfera. El campo total será la suma directa de ambos campos.

1.7 Potencial Eléctrico

Hemos visto que los campos eléctricos son originados por cargas eléctricas, ya sea puntuales o distribuidas espacialmente. Introduciremos ahora el concepto de potencial eléctrico el cual está asociado al trabajo o la energía de un determinado campo eléctrico. Adicionalmente, este concepto de potencial eléctrico entrega una manera alternativa, y en general más fácil, para obtener el campo eléctrico.

1.7.1 Trabajo de un Campo Eléctrico

Supongamos que deseamos mover una carga puntual q desde un punto (A) a otro (B) en presencia de un campo eléctrico \vec{E} como se muestra en la Figura 25.

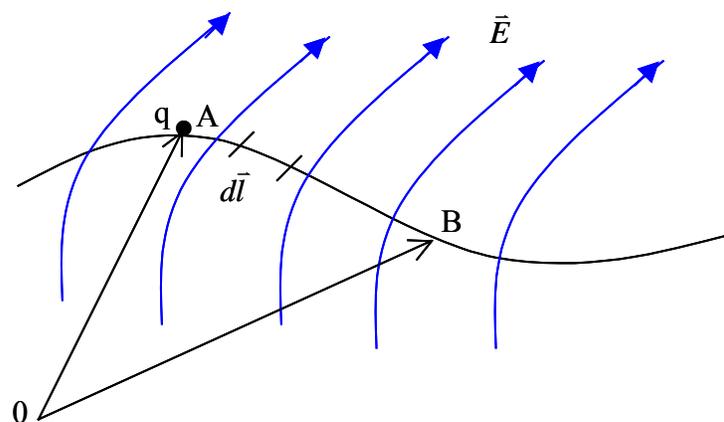


Figura 27. Trabajo de Campo Eléctrico.

La fuerza que experimenta q debido al campo eléctrico es $\vec{F} = q\vec{E}$, de modo que el trabajo que debe realizar un agente externo para mover dicha carga una distancia infinitesimal $d\vec{l}$ es

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.50)$$

El signo negativo indica que el trabajo lo hace un agente externo (por ejemplo un dedo empujando la carga). Si dW es positivo significa que el trabajo lo realiza el agente externo (o sea el campo eléctrico se opone al desplazamiento de la carga en el sentido de $d\vec{l}$). Si dW es negativo significa que el trabajo lo ha realizado el campo eléctrico (no ha sido necesario empujar con el dedo).

Luego el trabajo (externo) realizado para llevar carga desde el punto A a B es:

$$W = \int_A^B dW = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.51)$$

Dividiendo W por q se obtiene el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga. Esta cantidad, llamada V_{AB} , se conoce como la *diferencia de potencial* entre los puntos A y B. Así:

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.52)$$

Notar que:

- i) A es el punto inicial y B el punto final del desplazamiento.
- ii) Si $V_{AB} < 0$ el campo eléctrico es quien hace el trabajo (hay una pérdida en la energía potencial eléctrica al mover la carga desde A a B). En caso contrario es un agente externo quien ha realizado el trabajo
- iii) V_{AB} se mide en [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]

EJEMPLO 10.

Supongamos una carga Q fija en el origen y una segunda carga q ubicada a una distancia r_A . Se desea calcular el trabajo necesario para llevar esta segunda carga a una distancia r_B según se muestra en la Figura 28. Calcule además V_{AB} .

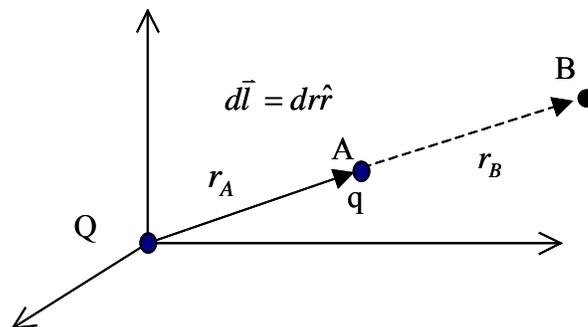


Figura 28. Trabajo carga puntual.

Solución:

Campo:
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.53)$$

Trabajo:
$$W = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.54)$$

$$W = -q \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$
$$W = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Notar que si $r_A < r_B$ (como en la Figura 28) el valor de W resulta negativo si q y Q son del mismo signo. Sabemos que para este caso las cargas se repelen, por lo tanto el campo de Q es quien realiza el trabajo (y no un agente externo).

La expresión para la diferencia de potencial V_{AB} es

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (1.55)$$

Esta expresión no depende de q sino que **de la carga que produce el campo \vec{E}** , en este caso Q . Este resultado permite definir de manera más general el potencial eléctrico como veremos a continuación.

1.7.2 Definición de Potencial Eléctrico

Para el ejemplo analizado anteriormente V_{AB} representa el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para llevar una carga entre los puntos A y B. Si dejamos variable el punto B se genera la función

$$V_A(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (1.56)$$

esta función permite evaluar el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para llevar una carga desde la posición \vec{r}_A a cualquier lugar definido por el vector \vec{r} .

Si ahora hacemos tender $r_A \rightarrow \infty$, obtenemos

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} \quad (1.57)$$

Esta expresión representa el trabajo por unidad de carga que es necesario realizar para traer desde el infinito una carga hasta la posición \vec{r} , cuando existe una carga Q en el origen (la

carga que produce el campo eléctrico \vec{E}). Esta expresión se define como la función *potencial eléctrico* de la carga Q y corresponde a un campo escalar definido en todo el espacio. Para generalizar este resultado consideremos la situación de la Figura 27.

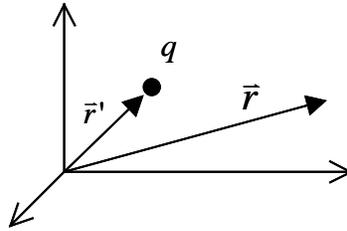


Figura 29. Potencial eléctrico carga puntual.

Así, en un sistema de referencia cualquiera la expresión general para el potencial eléctrico asociado a una carga q en la posición \vec{r}' es

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \text{ [V]} \quad (1.57)$$

Dado que V es una función lineal con la carga, también aquí se cumple la propiedad de superposición, i.e., para n cargas q_1, q_2, \dots, q_n se cumple:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_n\|} \\ \Rightarrow V(\vec{r}) &= \sum \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|} \quad (1.58) \end{aligned}$$

Análogamente al caso del campo eléctrico, para distribuciones continuas de carga se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.59)$$

y dependiendo de la distribución de carga es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r \frac{\lambda(\vec{r}') dr'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.60) \text{ Para lineal}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.61) \text{ Para superficial}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.62) \text{ En volumen}$$

Donde λ , σ y ρ corresponden a las densidades de carga lineal, superficial y de volumen, respectivamente (campos escalares en la variable \vec{r}').

EJEMPLO 11.

Se tiene una línea de largo l con distribución de carga λ cte en el eje z .. Se pide demostrar que el potencial producido por esta distribución lineal de carga en el plano medianero $(x,y,0)$ puede escribirse como:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \quad (1.63) \text{ donde } \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{2\rho}$$

ρ es el radio desde el origen a un punto cualquiera del plano medianero. Expresa el resultado en coordenadas cartesianas.

Solución:

Consideremos la Figura 30.

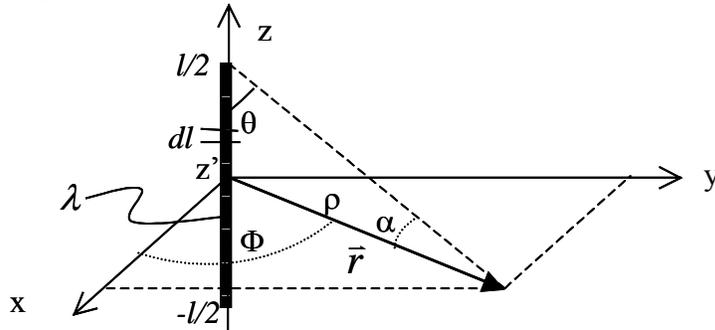


Figura 30. Potencial línea cargada.

Los vectores son

$$\vec{r} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} = \rho \cos\phi\hat{i} + \rho \sin\phi\hat{j}, \quad \vec{r}' = z'\hat{k}$$

luego,

$$\Rightarrow V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} \frac{dz'\lambda}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{1/2}}$$

Haciendo el cambio de variable

$$z' = \rho \operatorname{tg} \theta \\ dz' = \rho \sec^2 \theta d\theta$$

se tiene

$$V(x, y) = \frac{\rho\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\rho [1 + \operatorname{tg}^2 \theta]^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec \theta d\theta$$

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{l}{2\rho} \Rightarrow \theta_1 = -\alpha$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{l}{2\rho} \Rightarrow \theta_2 = \alpha$$

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) - \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg}(-\alpha))]$$

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}\right) - \ln\left(\frac{1}{\cos(-\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}\right) \right]$$

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(1 + \operatorname{sen} \alpha) - \ln(1 - \operatorname{sen} \alpha)]$$

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \right]$$

De la geometría de la Figura 30 se cumple

$$\text{sen } \alpha = \frac{l/2}{\left[(l/2)^2 + \rho^2 \right]^{1/2}},$$

luego

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1 + \frac{l/2}{\left[(l/2)^2 + \rho^2 \right]^{1/2}}}{1 - \frac{l/2}{\left[(l/2)^2 + \rho^2 \right]^{1/2}}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(\rho^2 + l^2/4)^{1/2} + l/2}{(\rho^2 + l^2/4)^{1/2} - l/2} \right]$$

$$\therefore V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x^2 + y^2 + l^2/4)^{1/2} + l/2}{(x^2 + y^2 + l^2/4)^{1/2} - l/2} \right]$$

1.7.3 Relaciones entre Potencial y Campo Eléctrico

A partir de las relaciones de trabajo desarrolladas para cargas puntuales habíamos visto que la función potencial entre dos puntos A y B corresponde a

$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{y haciendo } B = r \text{ y } A \rightarrow \infty, \text{ obteníamos la función potencial como}$$

$$V(\vec{r}) = - \int_{+\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.64) \quad \text{donde } V(r=\infty)=0$$

En el caso general el potencial puede no ser nulo para $r \rightarrow \infty$ (por ejemplo cuando hay distribuciones de carga infinita). Recordemos que la definición obtenida a partir del trabajo nos conducía a la expresión

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

que representa el trabajo por unidad de carga para trasladar una carga desde el punto A al B . Por lo tanto al dejar variable el punto $A=r$, la expresión del potencial queda

$$V(r) = - \int_B^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V(r = B)$$

El valor que adquiere $V(r = B)$ es llamado *referencia* o *potencial de referencia* (o voltaje de referencia V_{ref}). Por ello, la expresión general del potencial eléctrico es

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref} \quad (1.65)$$

Notar que dado que es un valor constante, al calcular el trabajo entre dos puntos cualquiera se cancela. Para simplificar la notación es común asignar un valor nulo a la referencia, es decir, $V_{ref} \equiv 0$.

Del desarrollo anterior se cumple la relación

$$\nabla \bullet V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \quad (1.66)$$

El campo eléctrico se obtiene a partir del gradiente de la función potencial.

EJEMPLO 12

Considere una distribución de carga lineal infinita según se muestra en la Figura 31. Calcule el potencial en todo el espacio.

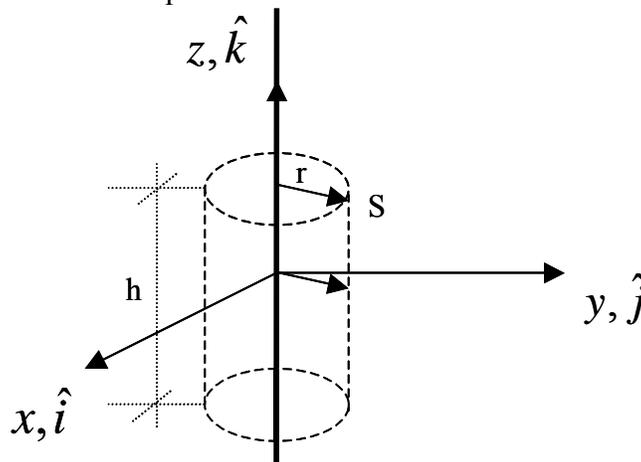


Figura 31. Campo y potencia de línea cargada.

Solución:

Aplicando gauss a la superficie S tenemos

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \bullet d\vec{S} &= \frac{Q_T(s)}{\epsilon_0} \\ d\vec{S} &= r d\theta \cdot dz \hat{r} \\ \iint \vec{E} \bullet d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^h E(\vec{r}) \hat{r} \bullet r d\theta dz \hat{r} \\ \iint_S \vec{E} \bullet ds &= E(r) \end{aligned}$$

Por otra parte, la carga total encerrada es $Q_T(s) = h\lambda_0$. Luego, en coordenadas cilíndricas el campo vale

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi r} \hat{r}$$

Apliquemos ahora la definición de potencial eléctrico.

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi r} \hat{r} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

escogiendo un radio para realizar la integral de línea $d\vec{l} = dr\hat{r}$. Por lo tanto,

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi r} dr + V_{ref}$$

$$V(\vec{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi} \ln(r / ref) + V_{ref}$$

Analizando esta expresión vemos que el potencial en el infinito no es nulo, ya que la función potencial diverge. Por ello, se escoge la referencia para un valor arbitrario de r. Por ejemplo, para $r=ref$ hacemos $V_{ref} = 0$. Así, la expresión para la función potencial de esta distribución infinita de carga queda finalmente,

$$V(\vec{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi} \ln(r / ref)$$

1.7.4 Ecuación de Laplace y Poisson

Habíamos visto que

$$\nabla \bullet V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia a ambos lados obtenemos

$$\nabla \bullet (\nabla \bullet V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.67)$$

Si usamos la 1ª ecuación de Maxwell llegamos a

$$\nabla \bullet (\nabla \bullet V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.68)$$

ó

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (1.69) \text{ ecuación de Poisson.}$$

Cuando no hay carga tenemos:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad (1.70) \text{ ecuación de Laplace.}$$

El operador ∇^2 se conoce también como el *Laplaciano*. En coordenadas cartesianas es

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (1.71)$$

Así, el *Laplaciano* de un campo escalar es también un campo escalar.

Hemos demostrado que el potencial eléctrico satisface la ecuación de Poisson en las regiones donde existen fuentes de carga y satisface la ecuación de Laplace en las regiones sin carga. Adicionalmente se requiere definir condiciones de borde para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales resultantes. Así, una manera alternativa de obtener el campo eléctrico es resolver la ecuación de Laplace (o Poisson) cuando se conocen (o se pueden inferir) las condiciones de borde.

EJEMPLO 12.

Para la configuración de la Figura 32 se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V. Se pide calcular el potencial y el campo para la región entre los semiplanos (no incluido el eje z , o sea $\rho = 0$).

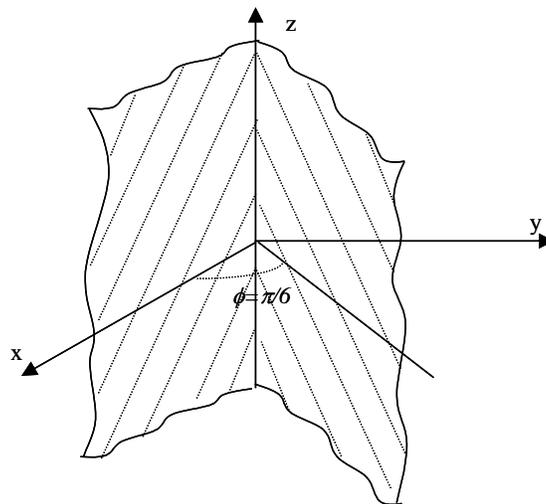


Figura 32. Potencial entre placas.

Solución:

Claramente V depende sólo de ϕ , por lo que la ecuación de Laplace en este caso es

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$

Dado que $\rho=0$ está excluido del cálculo esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.73)$$

cuya solución es de la forma $V = A\phi + B$.

Aplicando las condiciones de borde obtenemos para $\phi=0$ el potencial $V=0$, es decir, $B=0$.

Usando la otra condición de borde para $\phi=\pi/6$ tenemos

$$100 = A\pi/6$$

$$\Rightarrow A = \frac{600}{\pi}$$

Luego el potencial es

$$V = \frac{600}{\pi} \phi$$

y el campo

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \cdot V(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi\rho} \hat{\phi}$$

1.7.5 Campo Eléctrico Conservativo

Otra propiedad importante de los campos eléctricos se obtiene a partir de la propiedad matemática asociada a un campo escalar $f(\vec{r})$, los cuales satisfacen la identidad

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (1.74)$$

Así, dado que $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$ en electrostática⁴.

Luego, para una superficie S cualquiera del espacio se cumple

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.75)$$

y aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.76)$$

Donde $C(S)$ es el contorno que limita a la superficie S. Podemos escribir entonces

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W_{neto} = 0 \quad (1.77)$$

Este resultado implica que el trabajo neto realizado por el campo eléctrico en una trayectoria cerrada es nulo. Es decir, la fuerza proveniente de un campo electrostático es una fuerza conservativa.

Ahora veremos los campos eléctricos en la materia. Pero antes debemos definir el concepto de dipolo, el cual es la base para esos estudios.

⁴ Veremos luego que esto cambia cuando los campos son variables en el tiempo.

1.8 Dipolo eléctrico

1.8.1 Definición Dipolo

Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas idénticas pero de signo contrario, las cuales se encuentran forzadas (por algún medio) a mantener distancia d constante entre ellas, tal como se muestra en la Figura 28.

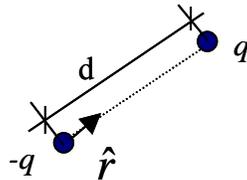


Figura 33. Dipolo eléctrico.

Se define $\vec{p} = qd\hat{r}$ (1.78) como Dipolo eléctrico o Momento dipolar. Notar que la suma neta de las cargas de un dipolo debe ser nula y que el vector \vec{p} apunta desde la carga negativa hacia la positiva. Las unidades del dipolo son $[C \cdot m]$.

1.8.2 Potencial Eléctrico de un Dipolo

Consideremos la configuración de la Figura 34 donde r_1 es la distancia de Q a P y r_2 es la distancia de $-Q$ a P.

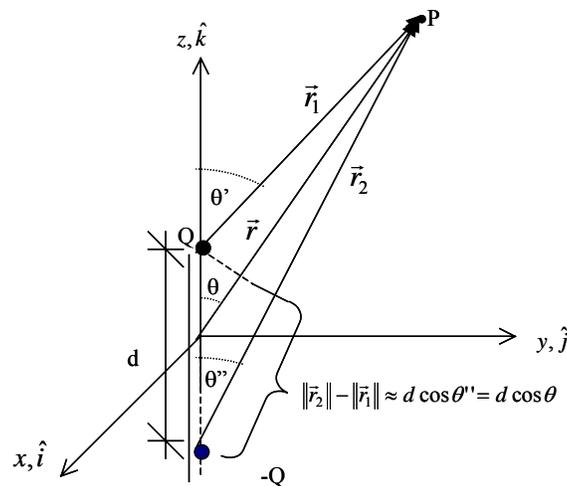


Figura 34. Potencial de un dipolo.

El potencial de esta configuración evaluado en el punto P es:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1\|} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_2\|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2\|} \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|}$$

Interesa el caso cuando $r_1, r_2 \gg d$, o sea, cuando podemos aproximar

$$\|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx (r - \Delta)(r + \Delta) = r^2 - \Delta^2 \Rightarrow \|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \approx r^2$$

Además,

$$r_2 - r_1 = d \cos \theta$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d \cos \theta}{r^2} \right] \quad (1.79)$$

Dado que $d \cos \theta = d\hat{k} \cdot \hat{r}$ y si definimos $\vec{d} = d\hat{k}$ y $\vec{p} = Q\vec{d}$, la expresión del potencial eléctrico producida por el dipolo se puede escribir como

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \quad (1.80)$$

En el caso general, el dipolo está ubicado en un punto cualquiera \vec{r}' (vector que define la posición del punto medio del dipolo) como en la Figura 33.

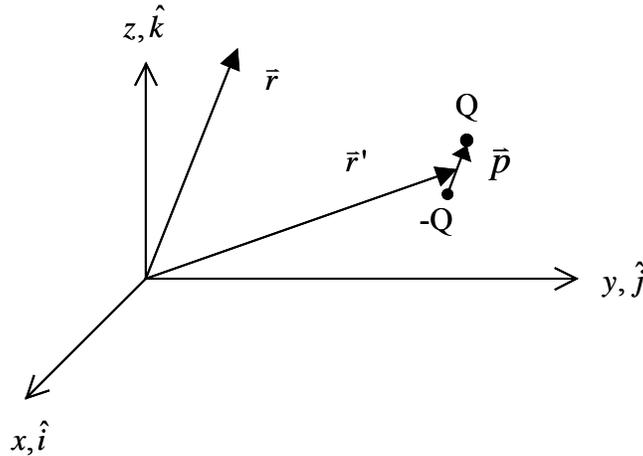


Figura 35. Potencial del dipolo en sistema de coordenadas arbitrario.

En este caso el potencial eléctrico tiene la forma

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.81)$$

EL campo eléctrico de un dipolo se calcula a partir de $\vec{E} = -\nabla V$.

EJEMPLO 13.

Calcule el campo eléctrico de un dipolo $\vec{p} = p\hat{k}$ ubicado en el origen como se muestra en la Figura 36.

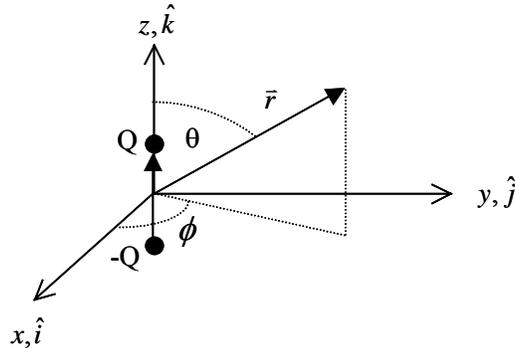


Figura 36. Campo eléctrico dipolo.

Solución:

$$\vec{r}' = 0$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sabemos que $\vec{E} = -\nabla V$, y en coordenadas esféricas

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$

V solo depende de r y θ , luego

$$\nabla V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} (-2r^{-3}) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (-\sin \theta) \hat{\theta}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

El campo resultante no depende del ángulo azimutal, ya que la configuración presenta simetría según ϕ . Además, para el caso $\theta = 90^\circ$ el campo sólo tiene componente según $\hat{\theta}$, es decir es perpendicular al plano x-y.

Para puntos muy alejados del dipolo el campo eléctrico y el potencial disminuyen con la distancia según las expresiones

$$\vec{E}(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^3}, \quad V(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^2}$$

Así, su efecto decae rápidamente con la distancia (un exponente mayor que en el caso de cargas puntuales).

1.8.3 Dipolo de un Conjunto de Cargas y Distribuciones

Por extensión, también se define el momento dipolar para el caso en que se tiene un conjunto de cargas q_1, q_2, \dots, q_n tal que su suma neta es nula, i.e., $\sum_{k=1}^n q_k = 0$, tal como se muestra en la Figura 37.

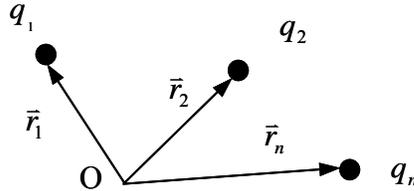


Figura 37. Dipolo de sistema de cargas.

Para este sistema se define el momento dipolar eléctrico como:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{r}_k$$

Claramente para $n=2$ se tiene $\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2$, pero $q_1 = -q_2 = Q$, entonces $\vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}$ según habíamos visto. Notar que no depende del origen.

Para el caso general de una distribución volumétrica de carga el momento dipolar asociado es

$$\vec{p} = \iiint \vec{r} dq = \iiint_{\Omega} \vec{r} \rho dv$$

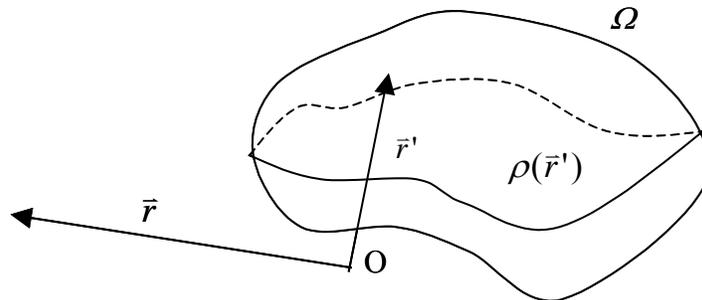


Figura 38. Dipolo de distribuciones de carga.

EJEMPLO 14.

Se tienen 8 cargas dispuestas como en la Figura 39. Se desea saber el efecto de agregar una novena carga Q al sistema.

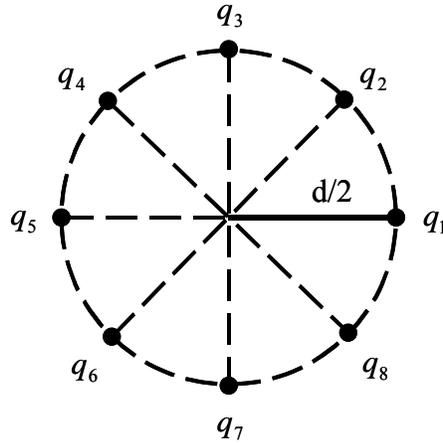


Figura 39. Dipolo de 8 cargas.

Se sabe que las cargas satisfacen las relaciones $Q = -\sum_{i=1}^8 q_i$ (1.82) y $q_i = -\frac{Q}{8}$ (1.83) Se pide

calcular el momento dipolar en los casos:

- Carga Q se ubica en el centro del círculo,
- Carga Q se ubica en la posición $x = -d/4$. Donde d es el diámetro del círculo.

Solución:

a) Tomando el centro del círculo como origen del sistema de referencia se tiene

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^8 q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0 = 0 \quad (1.84) \quad \text{En este caso no existe momento dipolar.}$$

b) En este caso

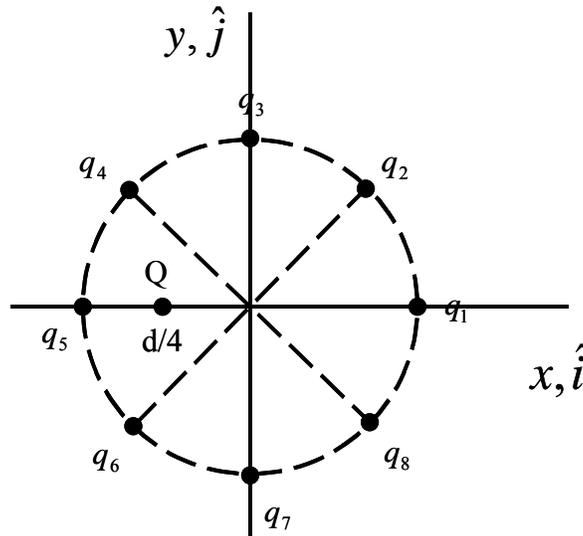


Figura 40. Dipolo 9 cargas.

El momento dipolar es

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i + Q \left(\frac{d}{4} \right) \hat{i} \quad (1.85)$$

$$\vec{p} = -Q \frac{d}{4} \hat{i} \quad (1.85)$$

Luego podemos reemplazar esa distribución por el dipolo:

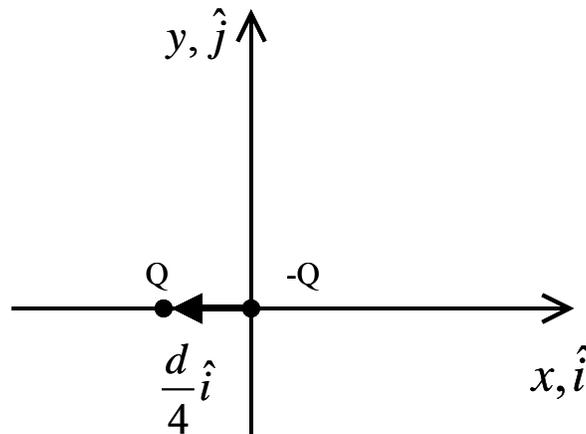


Figura 41. Dipolo equivalente.

Esto es lo que se vería desde una distancia $\|\vec{r}\| \gg \frac{d}{4}$.

Propuesto. Calcular el torque sobre un dioplo en presencia de un campo eléctrico

1.8.4 Potencial a grandes distancias

Habíamos visto que para distribuciones en volumen el potencial eléctrico es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Nos interesa evaluar la situación para el caso en que $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\|$, donde es posible expandir el termino $\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$ en serie de la forma:

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} + \dots \text{Términos de Orden Superior}$$

y reemplazando en la expresión del potencial

$$\Rightarrow V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}\|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{\|\vec{r}\|^3} \rho(\vec{r}') dv' + TOS$$

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r}\|} \iiint \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\|\vec{r}\|^3} \iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' + TO$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{Q_{Total}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^3} + TOS$$

Claramente el primer término corresponde al potencial de la carga concentrada en un solo punto, mientras que el segundo término corresponde al potencial de un dipolo. En general cuando se tiene una distribución de carga vemos:

- i) Desde muy lejos, solo la carga total
- ii) Desde más cerca, pero lejos todavía, dos cargas, es decir, un dipolo
- iii) Desde más cerca aún, cuatro cargas, cuadripolo,
- iv) etc.

La relación con la distancia de los campos y potencial eléctrico de las distintas configuraciones se muestran en la siguiente Tabla:

Tabla 1. Campos en configuraciones multipolares.

Configuración	Potencial Eléctrico	Campo Eléctrico
Una carga q•	$\propto 1/r$	$\propto 1/r^2$
Dos cargas q• (Dipolo) -q•	$\propto 1/r^2$	$\propto 1/r^3$
Cuatro cargas Dos dipolos q• -q• -q• q•	$\propto 1/r^3$	$\propto 1/r^4$

1.9 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Se tiene una esfera de radio 100 cm que tiene una distribución volumétrica de carga dada por $\rho(\vec{r}) = \frac{3r^3}{500} \epsilon_0 [C/m^3]$. Se desea anular el campo en el casquete ubicado a 90 cm del centro. Para ello se dispone de las siguientes alternativas:

- a) Una carga que debiera ubicarse en el origen. Indique monto de la carga.
- b) Un casquete esférico de radio 50 cm con densidad superficial de carga constante σ . Indique el valor de σ .
- c) Un casquete esférico de radio 150 cm con densidad superficial de carga constante σ . Indique el valor de σ .

Solución:

La idea es con las distintas alternativas provocar un campo eléctrico que anule el de la esfera para $r = 90\text{cm}$, es decir que tenga el mismo valor absoluto pero distinto signo que el provocado por la esfera para ese mismo radio.

Primero calculamos el campo al interior de la esfera utilizando Ley de Gauss. Consideremos que la esfera posee radio R , y que la densidad de carga de la esfera es

$$\rho(\vec{r}) = kr^3 \text{ donde } k = \frac{3}{500} \epsilon_0$$

Debido a la naturaleza del problema conviene trabajar en coordenadas esféricas (r', θ', φ') , donde:

- r' es la distancia al origen.
- θ' es el ángulo azimutal.
- φ' es el ángulo superior.

Luego, $dS' = r'^2 \cdot \text{sen}(\varphi') \cdot d\varphi' \cdot d\theta'$ y $dv' = r'^2 \cdot \text{sen}(\varphi') \cdot dr' \cdot d\varphi' \cdot d\theta'$

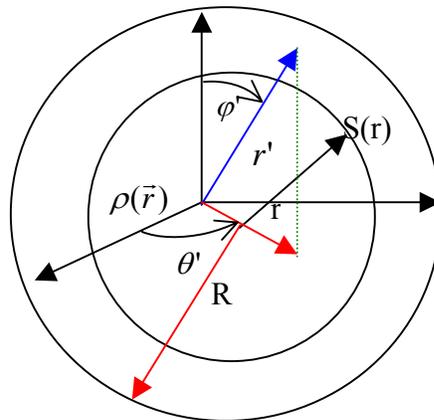


Figura P.1.1

Queremos calcular el campo eléctrico al interior de la esfera para cualquier radio, el que definirá una superficie S, por lo tanto calculamos para $r < R$

Tenemos que
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{Total}(S)}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada por la Superficie S es
$$Q_{Total}(S) = \iiint_{\Omega(S)} \rho(\vec{r}) \cdot dv'$$

$$Q_{Total}(S) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K \cdot r'^3 \cdot r'^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot dr' \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

$$Q_{Total}(S) = 2\pi \left[-\cos(\varphi) \right]_0^\pi \cdot \left[K \cdot \frac{r'^6}{6} \right]_0^r = 4\pi \cdot K \cdot \frac{r^6}{6}$$

Luego
$$Q_{Total}(S) = 4\pi \cdot K \cdot \frac{r^6}{6}$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \cdot K \cdot \frac{r^6}{6\epsilon_0}$$

Por simetría esférica, podemos suponer que el Campo Eléctrico es radial: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

Luego, el flujo eléctrico es:
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)\hat{r} \cdot r'^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \hat{r}$$

$$\begin{aligned} Y \oiint_S E(r)\hat{r} \cdot r'^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \hat{r} &= E(r) \cdot r^2 \cdot \oiint_S \hat{r} \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \hat{r} \\ &= E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi \\ &= 4\pi \cdot K \cdot \frac{r^6}{6\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= K \cdot \frac{r^4}{6\epsilon_0} \cdot \hat{r} \quad (\text{Campo en el interior de la esfera}). \end{aligned}$$

Debemos anularlo para la distancia de 0.9 mt. Examinemos las alternativas:

- a) Supongamos una carga Q en el centro de la esfera, con Q por determinar.

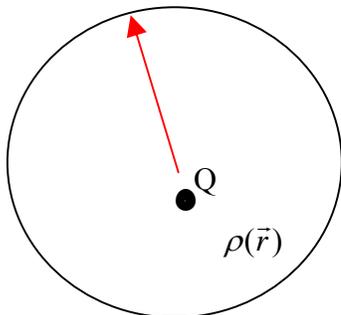


Figura P.1.1.1

El Campo eléctrico producido por una Carga puntual, ubicada en una posición \vec{r}' , sobre \vec{r} es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Con $\vec{r}' = 0$ y $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$ tenemos que

$$\vec{E}_Q(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Por el Principio de Superposición, tenemos que:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \vec{E}_{Esfera}(\vec{r}) + \vec{E}_Q(\vec{r}) \quad \text{para todo } r < 100 \text{ cm.}$$

En particular, esto es válido para $r = 90 \text{ cm}$. Designaremos como r_1 a este radio particular. Determinaremos el valor de Q tal que, $\vec{E}_T(\vec{r}) = 0$, para $r = r_1$.

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = K \cdot \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} \cdot \hat{r} + \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r_1^2} = \vec{0} \quad \text{Entonces, } -K \cdot \frac{r_1^4}{6\epsilon_0} \cdot \hat{r} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r_1^2}$$

$$\text{Finalmente,} \quad Q = -\frac{4\pi \cdot K \cdot r_1^6}{6}$$

$$\text{Reemplazando con los valores numéricos: } Q = -5,9 \cdot 10^{-14} [C]$$

- b) Consideremos un radio $r_2 = 50 \text{ cm}$, El Campo eléctrico al exterior de un casquete uniformemente cargado con una densidad superficial de carga σ , lo calculamos por Gauss:

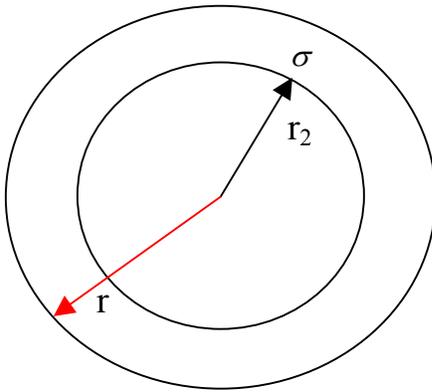


Figura P.1.1.2

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{Total}(S)}{\epsilon_0}$$

La carga total encerrada por la superficie S , de radio r_2 es;

$$Q_{Total}(S) = \oiint_S \sigma \cdot dS'$$

$$\text{Como } \sigma \text{ es constante, } \oiint_S \sigma \cdot dS' = \sigma \cdot 4\pi \cdot r_2^2$$

Por lo tanto, $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \cdot 4\pi \cdot r_2^2}{\epsilon_0}$ y por simetría esférica, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot r^2 \cdot 4\pi = \frac{\sigma \cdot 4\pi \cdot r_2^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{Casquete}(r) = \left(\frac{\sigma \cdot r_2^2}{\epsilon_0 \cdot r^2} \right) \cdot \hat{r}$$

Por el Principio de Superposición, tenemos que:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \vec{E}_{Esfera}(\vec{r}) + \vec{E}_{Casquete}(\vec{r}) \quad \text{para todo } r < 100 \text{ cm.}$$

En particular, esto es válido para $r_1 = 90$ cm.. Determinaremos el valor de Q tal que, $\vec{E}_T(\vec{r}_1)=0$.

$$\begin{aligned}\vec{E}_T(\vec{r}_1) &= \vec{E}_{Esfera}(\vec{r}_1) + \vec{E}_{Casquete}(\vec{r}_1) \\ \Rightarrow \left(K \cdot \frac{r_1^4}{6 \cdot \epsilon_0} + \frac{\sigma \cdot r_2^2}{\epsilon_0 \cdot r_1^2} \right) \cdot \hat{r} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\sigma \cdot r_2^2}{\epsilon_0 \cdot r_1^2} &= -K \cdot \frac{r_1^4}{6 \epsilon_0} \\ \Rightarrow \sigma &= -K \cdot \frac{r_1^6}{6 \cdot r_2^2}\end{aligned}$$

Reemplazando los valores numéricos: $\sigma = -1,88 \cdot 10^{-14} \left[\frac{C}{m^2} \right]$

- c) Consideremos un radio $r_3 = 150$ cm., El campo eléctrico provocado por un cascarón uniformemente cargado al interior de éste es nulo, pues la carga encerrada al aplicar la ley de Gauss será cero. Veámoslo matemáticamente:

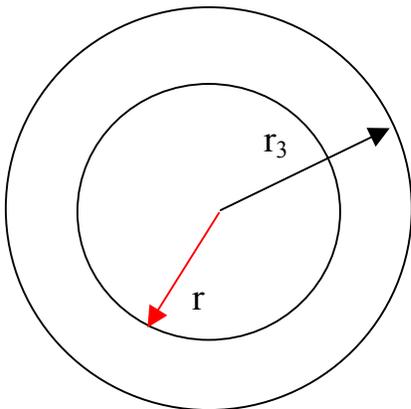


Figura P.1.1.3

Para $r < r_3$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{Total}(S)}{\epsilon_0} = 0$$

Entonces: $\vec{E}_{Casquete}(\vec{r}) = 0$

Con esto se observa que cualquier casquete con alguna densidad de carga, cualquiera que esta sea, no provocará campo eléctrico al interior de él, por lo tanto no podremos anular el campo en algún r , en particular $r = 90$ cm con esta alternativa.

\Rightarrow No existe σ tal que el campo eléctrico en $r = 90$ cm sea nulo.

PROBLEMA 2

Se tiene un disco circular de radio a cargado con una densidad superficial de carga σ_0 como se muestra en la figura P.1.2 Se pide:

- Calcular el potencial en el eje z .
- Calcular el campo en el eje z .

Solución:

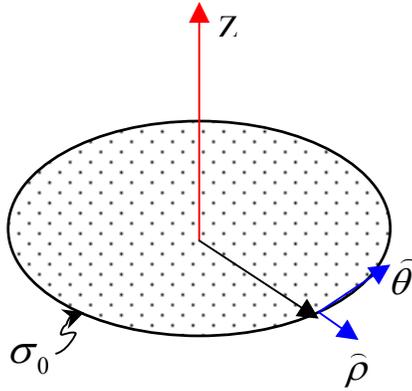


Figura P.1.2

a) Recordando que la fórmula para el Potencial Eléctrico de una distribución superficial de carga es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para nuestro caso (trabajando en coordenadas cilíndricas):

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma_0$$

$$\vec{r} = z \cdot \hat{z}$$

$$\vec{r}' = \rho' \cdot \hat{\rho}$$

$$dS' = \rho' \cdot d\rho' \cdot d\theta'$$

Los límites de integración serán $\rho' \in (0, a)$ y $\theta' \in (0, 2\pi)$.

$$\text{Entonces } \|\vec{r} - \vec{r}'\| = (\rho'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

Luego:

$$\begin{aligned} V(z \cdot \hat{z}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma_0 \cdot \rho' \cdot d\rho' \cdot d\theta'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{\rho' \cdot d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (\rho'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\rho'=0}^{\rho'=a} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|) \\ \Rightarrow V(z \cdot \hat{z}) &= \frac{-\sigma_0}{2\epsilon_0} (|z| - \sqrt{a^2 + z^2}) \end{aligned}$$

b)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{-\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(|z| - \sqrt{a^2 + z^2} \right) \right\} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \cdot \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \cdot \hat{z}}$$

PROBLEMA 3

La figura P.1.3 muestra un tubo de rayos catódicos como los usados en los televisores. El tubo produce un flujo de electrones que entran con una velocidad inicial de v_0 en la dirección horizontal, a un espacio limitado entre dos placas. Estas placas tienen densidades superficiales de carga dadas por $+\sigma$ y $-\sigma$, lo cual provoca un campo eléctrico perpendicular a ellas. A una distancia L de las placas se encuentra una pantalla de largo $2S$. Determine lo siguiente:

- La velocidad con que los electrones salen de la región entre las placas (considere velocidad en las dos direcciones).
- La condición sobre la distancia L para que ningún electrón salga de la pantalla (de largo $2S$).

Datos:

$d = 10e-7$ m.	$M = 9.107e-31$ Kg.
$W = 3$ m	$q = 1.602e-19$ C
$\sigma = 10e-21$ C/m ²	$\epsilon_0 = 8.854e-12$ F/m
$S = 10$ cm	$v_0 = 3e+4$ m/s.

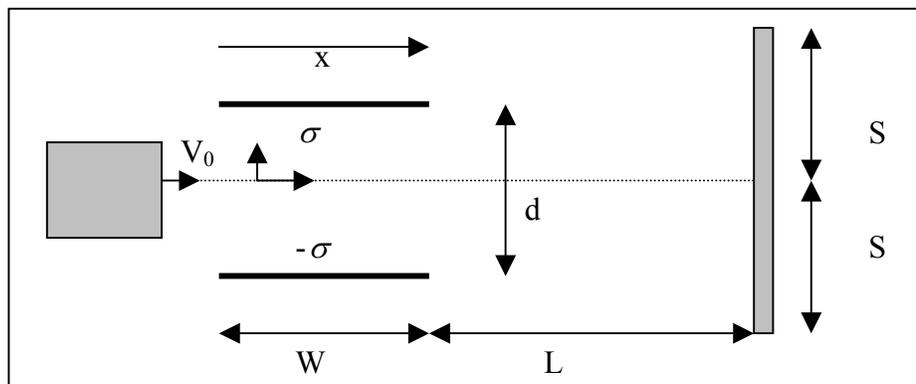


Figura P.1.3

Indicación: Considere que el campo eléctrico es cero fuera de la región entre las placas. Considere asimismo, que existe gravedad.

Solución:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Donde $\vec{F} = \vec{F}_{eléctrica} + \vec{F}_{peso}$ dentro de la zona de placas. Como $\vec{F}_{eléctrica} = q \cdot \vec{E}$, debemos calcular el Campo eléctrico producido por las placas paralelas.

Debido a que el ancho w de cada una de las placas es mucho mayor, que la separación entre ellas, d , podemos considerar que el Campo es el producido por la superposición de dos placas con densidad de carga de signo opuesto. Para determinar el campo eléctrico en esta zona, necesitamos saber el producido por una Placa cargada con una densidad σ uniforme.

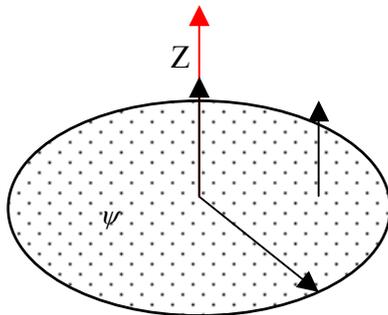


Figura P.1.3.1

Considerando un disco delgado de radio a con densidad de carga uniforme ψ , se sabe que el campo eléctrico en el eje Z es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \cdot \hat{z} \quad (\text{problema anterior})$$

Si $a \rightarrow \infty$, entonces $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \hat{z}$, lo cual equivale a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\psi}{2\epsilon_0} \cdot \hat{z}, \text{ si estamos sobre el Disco, y } \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\psi}{2\epsilon_0} \cdot \hat{z}, \text{ si estamos bajo el disco,}$$

suponiendo que ψ estrictamente positivo.

En el problema utilizaremos los ejes x , y con los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , respectivamente.

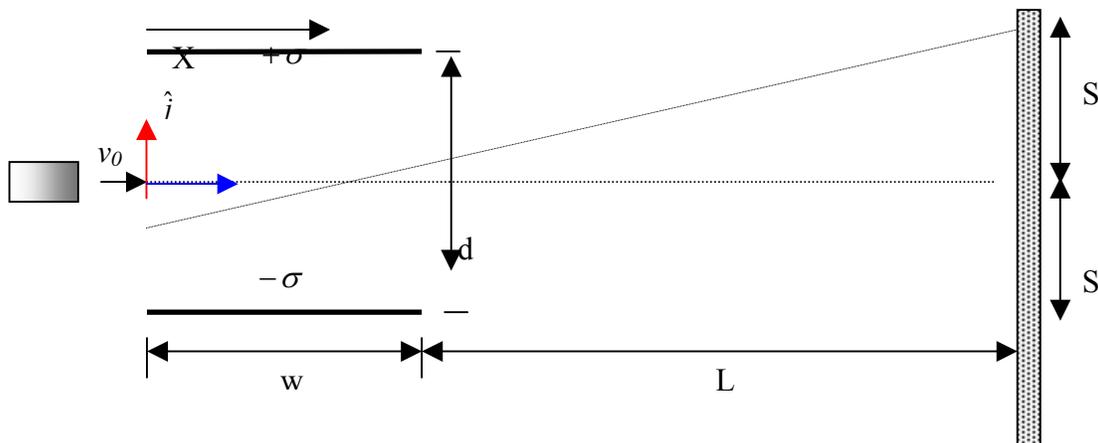
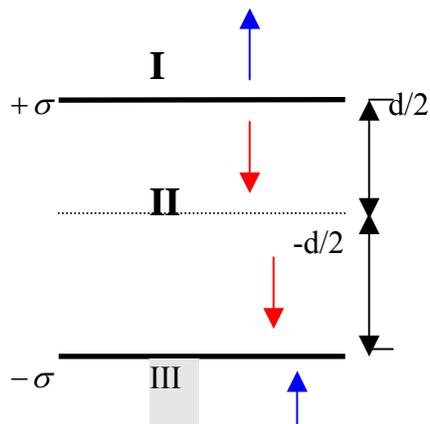


Figura P.1.3.2



Para este sistema de placas,
 En las regiones **I** y en **III** los campos se anulan (por ley de gauss carga total encerrada nula). En **II** se refuerzan, es decir se suman los efectos de ambas placas, quedando un campo que va de la placa con carga positiva, a la placa con carga negativa.

$$\text{Luego, } \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j}, \quad \text{si } y \in \left(\frac{-d}{2}, \frac{d}{2} \right)$$

Figura P.1.3.3

$$\Rightarrow \vec{F}_{el\acute{e}ctrica} = q \cdot \vec{E} = -\frac{q \cdot \sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j}$$

Sea $Q = -q$

Tal que $-Q = -1,602 \cdot 10^{-19} [C]$

Como condición inicial, podemos suponer que los electrones salen por el medio de la zona de placas, con velocidad solo en la horizontal.

$$\text{Con esto: } \vec{F}_{el\acute{e}ctrica} + \vec{F}_{peso} = m \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{-m \cdot g \cdot \hat{j} + \frac{Q \cdot \sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j} = m \cdot \ddot{x} \hat{i} + m \cdot \ddot{y} \cdot \hat{j}}$$

Ecuaciones de movimiento:

Según \hat{i} : De la ecuación anterior, vemos que no hay fuerzas que actúen sobre el eje X

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = cte = v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t + C_1$$

$$\text{Como } x(t=0)=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t .$$

Existe un tiempo t_1 tal que $x(t_1) = w$; Entonces $v_0 \cdot t_1 = w$:

$$\text{luego: } t_1 = \frac{w}{v_0}$$

Según \hat{j} : Ambas fuerzas (eléctrica y de gravedad) actúan sobre el eje Y

$$m \cdot \ddot{y} = -mg + \frac{Q \cdot \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot t + C_2 \quad \text{como } \dot{y}(t=0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot t$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{t^2}{2} + 0 \quad \text{pues } y(t=0) = 0$$

Evaluando en $t_1 = \frac{v_0}{w}$ (tiempo que demora un electrón en salir de las placas)

$$\dot{y}(t_1) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w}{v_0} \quad \wedge \quad y(t_1) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w^2}{2v_0^2}$$

De esta manera, hemos encontrado tanto la posición de salida, como la velocidad de salida del sector de las placas bajo los campos eléctrico y gravitatorio.

$$\text{Luego: } \vec{v}_{salida} = v_0 \hat{i} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w}{v_0} \cdot \hat{j}$$

b) Necesitamos ahora las ecuaciones de las partículas a partir del instante en que dejan las placas hasta que llegan a la pantalla de largo $2S$. Para estas nuevas ecuaciones ya tenemos las condiciones iniciales, las que vienen dadas por continuidad, por las ecuaciones antes encontradas.

$$\vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \hat{i} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w}{v_0} \cdot \hat{j}$$

$$\vec{r}(t=0) = w \cdot \hat{i} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w^2}{2v_0^2} \cdot \hat{j}$$

El electrón se ve afectado por una única fuerza, la que corresponde al de gravedad

$$\vec{F}_{\text{peso}} = m \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} \hat{i} + m \cdot \ddot{y} \hat{j} = -m \cdot g \cdot \hat{j}}$$

Según \hat{i} : No hay fuerzas según x

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \text{cte} = v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t + C_1; \text{ Como } x(t=0) = w \quad C_1 = w$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 \cdot t + w.$$

Existe un tiempo t_2 tal que $x(t_2) = L$; Entonces $v_0 \cdot t_2 + w = L$:

$$\text{Luego: } t_2 = \frac{L - w}{v_0}$$

Según \hat{j} : Tenemos solo la fuerza de gravedad

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -g$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = -g \cdot t + C_3$$

Aplicando la condición de borde

$$\Rightarrow \dot{y}(t=0) = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w}{v_0} = C_3$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = -g \cdot t + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w}{v_0}$$

Ahora, determinamos la posición:

$$y(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w \cdot t}{v_0} + C_4$$

$$y(t=0) = C_4 = \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w^2}{2v_0^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w \cdot t}{v_0} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g \right) \cdot \frac{w^2}{2v_0^2}$$

Ya que con el tiempo t_2 tenemos que la partícula impacta en la pantalla, para que no se salga, en el peor caso, $y(t_2) = -S$. Con $t_2 = \frac{L-w}{v_0}$

$$\Rightarrow y\left(t = \frac{L-w}{v_0}\right) = -g \cdot \frac{(L-w)^2}{2 \cdot v_0^2} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g\right) \cdot \frac{w(L-w)}{v_0^2} + \left(\frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g\right) \cdot \frac{w^2}{2v_0^2} = -S$$

Después de poco de trabajo algebraico, se llega a una Ecuación de Segundo grado para L:

$$L^2 - L \cdot 2w \left(g - \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - 1\right) + w^2 \left(1 + \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g\right) - \frac{2 \cdot S \cdot v_0^2}{g} = 0$$

Para discernir datos sobre esta ecuación, se sustituimos los valores entregados, en el Discriminante, resultando este ser positivo. Por ello, esta ecuación posee Raíces Reales y Distintas. Tomaremos la que sea positiva, o en el caso de que ambas sean positivas, la de menor módulo.

$$L_{1,2} w \left(1 + \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0} - g\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8 \cdot S \cdot v_0^2}{g} + 4w^2 \cdot \left(g - \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0}\right) \cdot \left(g - 1 - \frac{Q \cdot \sigma}{m \cdot \epsilon_0}\right)}$$

Para los valores del problema, la solución que nos sirve, es:

$$L = 4319,03439 [m]$$

Como comentario: A pesar de que sea un valor muy alto, es razonable, debido a la casi nula masa del electrón y su velocidad muy alta.

PROBLEMA 4

Considere el sistema de la figura P.1.4, el cual se compone de dos planos infinitos, separados a una distancia d , conteniendo densidades de carga σ_0 y $-\sigma_0$, respectivamente. Entre los planos se ubica una esfera sólida que contiene un material cargado el cual puede superponerse con una distribución volumétrica constante ρ_0 .

Se pide:

- Calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera.
- Calcular el campo eléctrico en un punto **A** situado en el plano meridiano a una distancia **L** del plano derecho.

c) Si una partícula de carga $-q$ y masa m se ubica a una distancia δ del centro de la esfera en el eje z , (no importa dirección). Calcule la ecuación de movimiento de la partícula y obtenga la posición en el eje Z en función del tiempo.

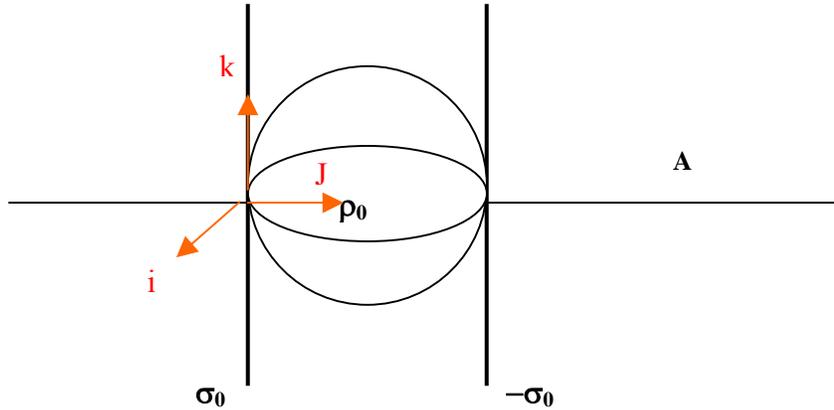


Figura P.1.4

Solución:

a) Lo primero será encontrar los campos provocados por las placas y la esfera por separado para así por superposición encontrar el campo total.

En este caso buscamos el campo entre las placas dentro de la esfera.

Utilizando un resultado del problema tres, tenemos que para una placas el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{y}{|y|} \hat{j}$$

Para este caso

Placa 1: Consideramos la placa con carga positiva para y mayor que cero

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

Placa 2: Consideramos la placa con carga negativa para y menor que cero

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{-\sigma_0}{2\epsilon_0} (-\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

Esfera: La esfera genera un campo con dependencia radial (\hat{r}). Utilizando la ley de Gauss (para $r < d/2$) obtenemos que:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \bullet \hat{r}$$

Evaluando esta expresión en el origen obtenemos que $\vec{E}_{esfera} = 0$

Finalmente tenemos el campo total estará dado por:

$$\boxed{\vec{E}_{total} = \vec{E}_{plano1} + \vec{E}_{plano2} + \vec{E}_{esfera} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{j}}$$

b) Debemos calcular el campo para un punto A como se muestra en la figura P.1.4

Placas: Ambas placas producen campos en sentidos opuestos, por lo que se anularán en cualquier punto que no esté entre las placas, esto se aprecia en la figura P.1.4.1. Para un punto a la derecha de ambas placas

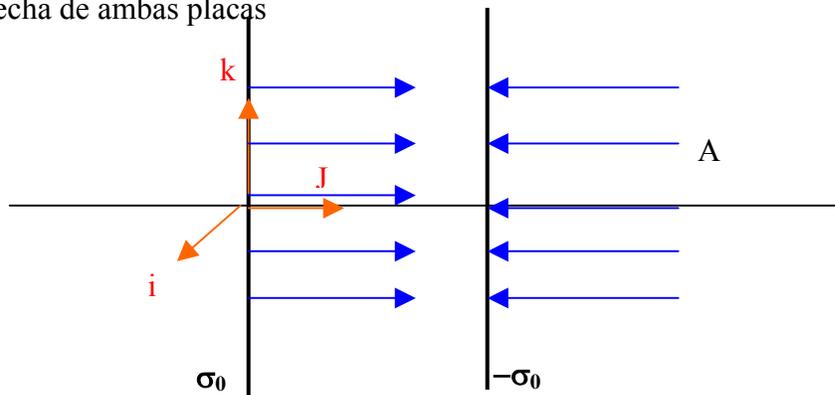


Figura P.1.4.2

Luego el único campo que aporta es el producido por la esfera.

Esfera: Utilizaremos la ley de Gauss para calcular el campo.

Ocupando $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} / \epsilon_0$, calculamos el campo producido por ella:

$$Q_{enc} = \iiint_{esfera} \rho_0 \cdot dV = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho_0 = \frac{\pi d^3}{6} \rho_0$$

$$\oiint_{casquete} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Con ello concluimos que el campo fuera de la esfera es $\vec{E} = \frac{d^3 \cdot \rho_0}{24r^2 \cdot \epsilon_0} \hat{r}$

El punto A se encuentra a una distancia $r = \frac{d}{2} + L$ del centro de la esfera.

Luego reemplazando este valor en la expresión del campo se obtiene que:

$$\vec{E} = \left\{ \frac{d^3 \cdot \rho_0}{24 \left(\frac{d}{2} + L\right)^2 \cdot \epsilon_0} \right\} \hat{r}$$

c) Tenemos que :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{con} \quad \vec{E} = \vec{E}(r=z) + \vec{E}_{placa\sigma_0}(x=d/2) + \vec{E}_{placa-\sigma_0}(x=d/2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 z}{3\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{i}$$

(Notar que en $r = z$ $\hat{r} = \hat{k}$)

$$\vec{F} = q \left(\frac{\rho_0 z}{3\epsilon_0} \hat{k} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{i} \right) = m\vec{a}$$

separando por componentes, se obtiene:

Eje z:

$$\frac{q\rho_0 z}{3\varepsilon_0} = m\ddot{z}$$

Se propone la solución de la forma:

$$z(t) = Ae^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0} Ae^{-\alpha t} = m\alpha^2 Ae^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0 m}}$$

$$\Rightarrow z(t) = Ae^{-\sqrt{\frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0 m}} t}$$

Luego, como

$$z(t=0) = \delta \Rightarrow A = \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = \delta e^{-\sqrt{\frac{q\rho_0}{3\varepsilon_0 m}} t}}$$

PROBLEMA 5

En la Figura P.1.5 se muestra una distribución lineal de carga λ_0 , infinita, la cual es rodeada por la distribución volumétrica de carga, que en coordenadas cilíndricas tiene la forma $\rho(r, \theta, z) = \frac{\rho_0}{r}$, la cual se extiende hasta un radio $r = a$. Entre ambas densidades existe la relación $\lambda_0 = -2\pi a \rho_0$

- Calcule el campo eléctrico en todo el espacio
- Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio
- ¿Cuál es el trabajo que el campo calculado en la parte a realizaría para traer una carga q desde el infinito a la posición $r = a$?

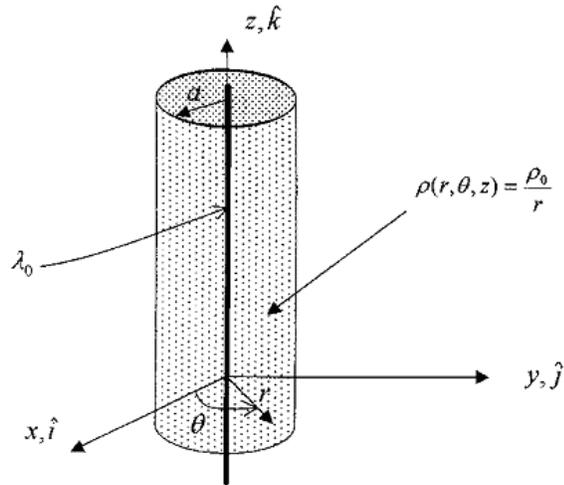


Figura P.1.5.1

Solución:

a) Calcularemos los campos eléctricos producidos por ambas distribuciones de carga para luego encontrar el campo total por el principio de superposición, es decir el campo total será la suma de ambos.

Para la distribución lineal

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \text{con} \quad \vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$$

En la integral:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{Manto} E(r) \cdot ds = E(r) \iint_{Manto} ds = E(r) \cdot 2\pi r L$$

Pero: $Q_{enc} = \lambda_0 \cdot L$

Entonces podemos escribir:

$$E(r) \cdot 2\pi r L = \lambda_0 L$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi r}$$

Entonces el campo eléctrico producido por la distribución lineal:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda o}{2\pi r} \hat{r}$$

Ahora, para la distribución volumétrica:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \text{con} \quad \vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$$

Tenemos dos casos:

1) **Para** $r < a$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho_o}{r} r dr d\theta dz = \vec{E} \iint \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \frac{2\pi\rho_o r L}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r L \\ &\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} \lambda_o = -2\pi a \rho_o &\Rightarrow \rho_o = -\frac{\lambda_o}{2\pi a} \\ &\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda_o}{2\pi a \epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

2) **Para** $r > a$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_o}{r} r dr d\theta dz = \vec{E} \iint \cdot d\vec{s} \\ &\Rightarrow \frac{2\pi\rho_o a L}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r L \\ &\Rightarrow E(r) = \frac{a\rho_o}{r\epsilon_0} \hat{r} \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la relación entre las densidades

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = -\frac{\lambda o}{2\pi r \epsilon_o} \hat{r}}$$

Finalmente el campo en todo el espacio está dado por:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda o}{2\pi r \epsilon_o} - \frac{\lambda o}{2\pi a \epsilon_o} \right) \hat{r} & \text{Para } r < a \\ 0 & \text{Para } r > a \end{cases}$$

b) Para calcular el potencial se sabe que:

$$-\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \Delta V \quad \text{con} \quad d\vec{r} = dr \hat{r}$$

1) **Para $r < a$**

$$\begin{aligned} V_1(r) &= -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_0^r \left(\frac{\lambda o}{2\pi r \epsilon_o} - \frac{\lambda o}{2\pi a \epsilon_o} \right) r \cdot dr \hat{r} \\ &= \frac{\lambda o}{2\pi \epsilon_o} \int_0^r \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) dr \hat{r} \\ &= \frac{\lambda o}{2\pi \epsilon_o} \left(r - \frac{r^2}{2a} \right) \hat{r} \end{aligned}$$

2) **Para $r > a$**

$$V_2(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int 0 \cdot dr \hat{r} = 0 + K = cte$$

Para encontrar el valor de esta constante, nos basamos en la continuidad del campo eléctrico y por ende el potencial

$$\begin{aligned} V_1(r=a) &= V_2(r=a) \\ \Rightarrow K &= \frac{\lambda o}{2\pi \epsilon_o} \left(a - \frac{a^2}{2a} \right) \\ \Rightarrow K &= \frac{a \lambda o}{4\pi \epsilon_o} \\ \Rightarrow \boxed{V_2(r) = \frac{a \lambda o}{4\pi \epsilon_o}} \end{aligned}$$

Finalmente el potencial en todo el espacio es:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\lambda o}{2\pi\epsilon_o} \left(r - \frac{r^2}{2a} \right) & \text{Para } r \leq a \\ \frac{a\lambda o}{4\pi\epsilon_o} & \text{Para } r \geq a \end{cases}$$

c) Tenemos la que el trabajo está dado por:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para $a > 0$ tenemos que $\vec{E} = 0 \Rightarrow V(r) = cte = \frac{a\lambda o}{4\pi\epsilon_o}$

$$W = \int q\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = qV(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = q \frac{a\lambda o}{4\pi\epsilon_o}}$$

1.9 Problemas propuestos

PROBLEMA 1

Considere el sistema de la Figura PP.1.1, en el cual se conocen los valores para el potencial eléctrico en los planos cilíndricos definidos por los radios $r=a$, donde el potencial es nulo, y $r=b$ donde vale V_0 .

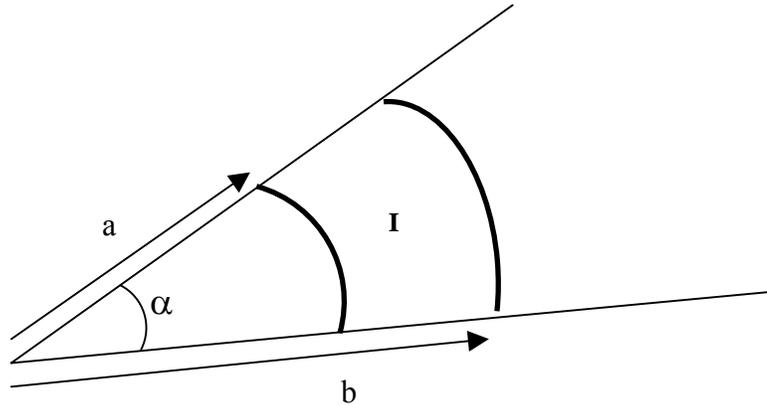


Figura PP.1.1

Suponiendo que los campos sólo dependen de r , se pide:

- Calcule el campo eléctrico para $a < r < b$ y ángulos menores a α (región I).
- Si ahora este espacio (región I) se rellena con una densidad de carga en volumen $\rho(r) = kr^2$, calcule el nuevo campo eléctrico en esa región.

PROBLEMA 2

Se tiene una cinta de ancho $4a$ cargada con una densidad superficial de carga σ . A la cinta le falta un pedazo en forma de circunferencia de radio a , tal como se ilustra en la Figura PP.1.2. Para esta configuración determine el vector campo eléctrico y el potencial en el eje z .

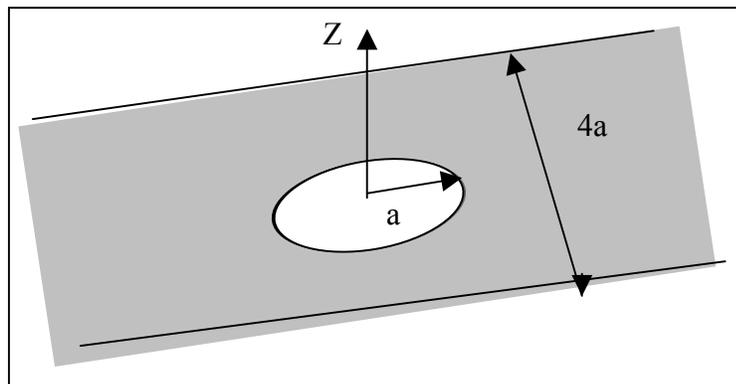


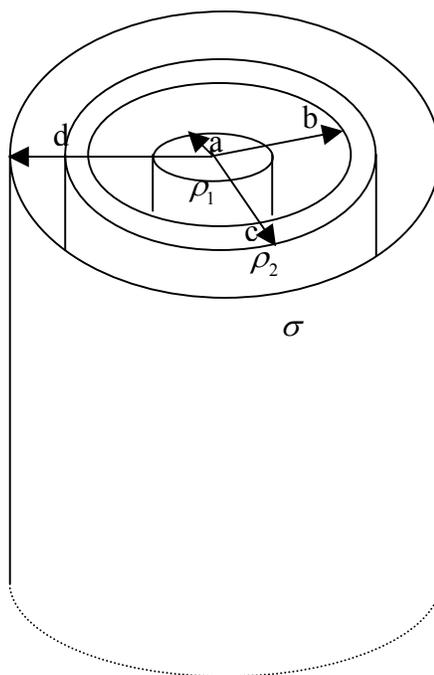
Figura PP.1.2.

PROBLEMA 3

Se observa la siguiente distribución de carga:

- El tubo macizo interior posee radio a y una densidad homogénea ρ_1 .
- El cilindro intermedio posee un radio interior b y un radio exterior c . Además de una densidad homogénea ρ_2 .
- El manto exterior posee una densidad homogénea superficial σ y radio d .
- Todos los elementos son infinitamente largos.

Calcule E en todo el espacio.



CAPITULO 2. PROPIEDADES DIELECTRICAS DE LA MATERIA

2.1 Introducción

Hasta aquí hemos visto las propiedades de la carga eléctrica en el vacío. En este capítulo veremos la forma que adoptan los campos eléctricos en la materia. Por materia entenderemos una distribución de carga que se mantiene restringida a un espacio definido. En términos generales hay tres clases de materiales:

- I. Dieléctricos o aislantes: donde las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio
- II. Conductores: donde las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material
- III. Semiconductores: un material que presenta en distinto grado (generalmente con un comportamiento muy no lineal) las propiedades tanto de dieléctricos como de conductores

Conductores son típicamente los metales como el cobre y el aluminio. Aislantes son materiales como el vidrio y las cerámicas, o líquidos como el aceite. Semiconductores son aleaciones especiales compuestas de silicio o germanio. Estos últimos se usan en la fabricación de chips para PC. En este curso sólo estudiaremos los dieléctricos y los conductores, ya que la gran mayoría de los materiales corresponde a una combinación directa de estas dos clasificaciones.

2.2 Modelo de los Materiales Dieléctricos

En los dieléctricos las cargas no pueden desplazarse libremente y sólo pueden producirse pequeñas rotaciones en torno a un punto de equilibrio fijo según veremos a continuación.

2.2.1 Materiales No Polares

Para entender el efecto macroscópico de un campo eléctrico sobre un material dieléctrico consideremos un átomo de un dieléctrico formado por una nube de electrones cuya carga negativa neta es $-Q$ y un núcleo fijo consistente de cargas positivas con carga total Q , según se muestra en la Figura 42.

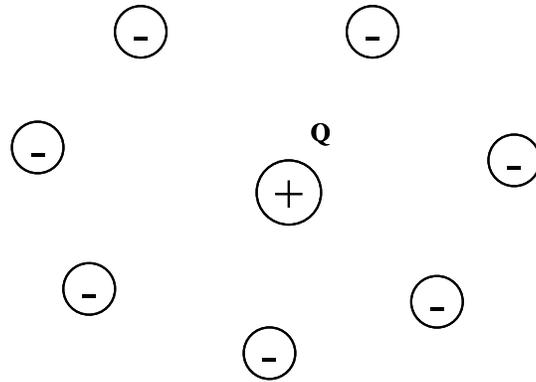


Figura 42. Modelo de átomo.

Al aplicar un campo eléctrico externo la configuración de cargas experimenta una leve deformación según se muestra en la Figura 43 (se desprecian los efectos de los propios campos de las cargas entre sí):

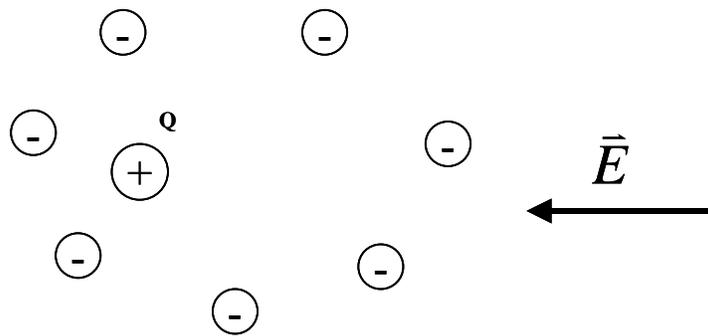


Figura 43. Átomo en presencia de campo eléctrico.

Desde una cierta distancia (mucho mayor que las distancias atómicas) esta deformación puede representarse mediante un dipolo de la forma (ver Ejemplo 13):

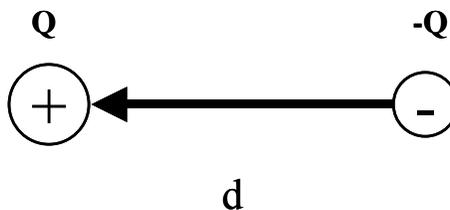


Figura 44. Representación mediante dipolo.

Así entonces, al aplicar un campo externo el material presentará pequeños desplazamientos de sus electrones en torno a una posición de equilibrio, los cuales pueden representarse a través de dipolos.

Notar que en este modelo, el material no posee dipolos con antelación a la aplicación del campo externo \vec{E} . Por ello estos materiales se llaman no polares.

2.2.2 Materiales Polares

Existen otros materiales, que por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural, los cuales se encuentran generalmente orientados en forma aleatoria⁵, tal como se muestra en la Figura 45. Estos materiales se llaman polares (constituidos de moléculas polares).

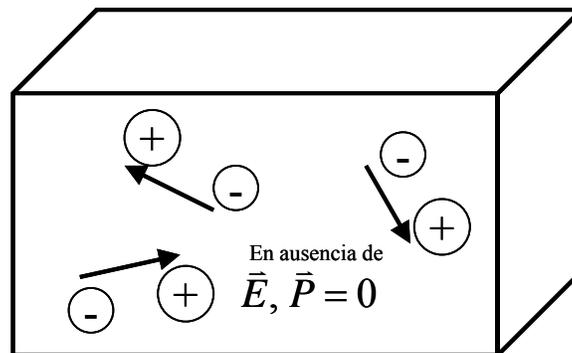


Figura 45. Elemento de volumen en un medio material polar.

En estos materiales, al aplicar un campo eléctrico externo se produce una alineación de los dipolos:

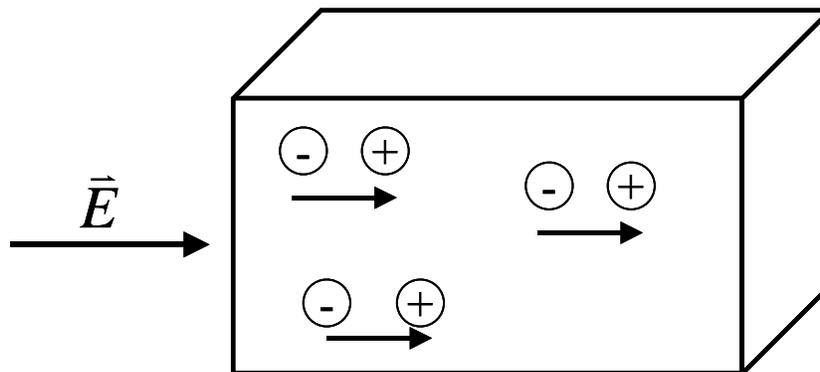


Figura 46. Medio material polar frente a un campo.

En estos materiales tampoco se produce una traslación significativa de cargas ya que su estructura atómica impide el movimiento (fuerzas inter-nucleares).

⁵ Existen unos materiales llamados ferroeléctricos en los cuales existe una polarización permanente en ausencia de campo eléctrico externo, aunque su número es muy reducido en la naturaleza.

2.2.3 Vector Polarización

Según vimos, en los dieléctricos sólo se produce desplazamiento de cargas en torno al punto de equilibrio. Así, para un elemento de volumen del material dieléctrico (polar o no polar) tendremos una nube de dipolos como se muestra en la Figura 47.

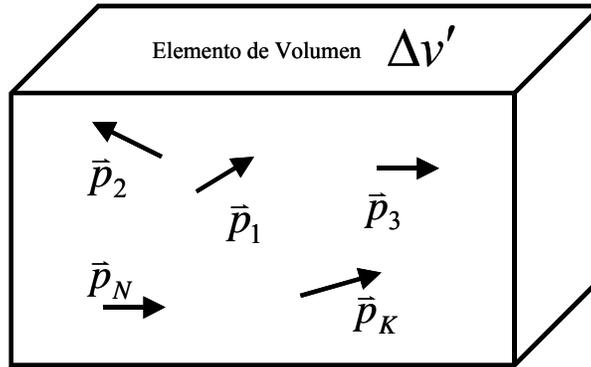


Figura 47. Elemento de volumen en un medio material.

Definimos el vector polarización \vec{P} (mayúscula) como el momento dipolar por unidad de volumen de un dieléctrico, es decir,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Donde los N dipolos \vec{p}_k se encuentran en el volumen $\Delta v'$.

2.3 Potencial Eléctrico en la Materia

Consideremos ahora la expresión del potencial eléctrico producido por el elemento de material de volumen $\Delta v'$, según se muestra en la Figura 48.

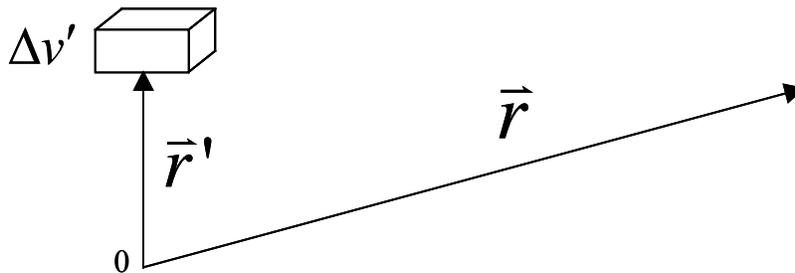


Figura 48. Potencial eléctrico de elemento de volumen.

Si suponemos que el elemento de volumen $\Delta v'$ puede representarse por un dipolo equivalente $d\vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta v'$, entonces el potencial en una posición \vec{r} será:

$$dV = \frac{\overbrace{\vec{P} \Delta v'}^{d\vec{p}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.1) \quad \vec{P} : \text{Vector polarizacion}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \quad (2.2)$$

Donde Ω es el espacio del medio material en donde están los dipolos. Sabemos por otro lado que

$$\nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (2.3) \quad (\text{probarlo})$$

Luego podemos escribir

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv' \quad (2.4)$$

utilizaremos ahora la identidad $\nabla \cdot f\vec{A} = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f$, con ello

$$\nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \nabla' \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left\{ \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P} \right\} dv' \quad (2.6)$$

El teorema de la divergencia establece que

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dv = \iint_{S(\Omega)} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (2.7)$$

y aplicándolo a nuestro desarrollo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' \quad (2.8)$$

Si escribimos el elemento diferencial $\vec{P} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot \hat{n} ds$ podemos escribir el potencial como

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' \quad (2.9)$$

2.4 Distribuciones de carga de polarización

Ahora recordemos que para distribuciones de carga en el vacío teníamos las siguientes expresiones para el potencial:

En volumen:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (2.10)$$

En superficie:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (2.11)$$

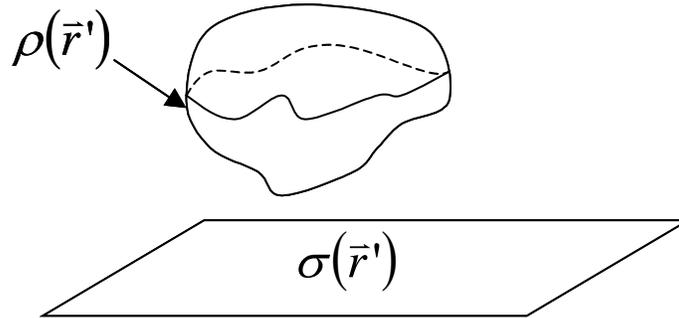


Figura 49. Cargas de polarización.

Por lo tanto, al comparar estas expresiones puede concluirse que la expresión para el potencial de los medios materiales corresponde al potencial producido por una distribución volumétrica de carga igual a $\rho_p(\vec{r}') = -\nabla' \cdot \vec{P}$ (2.12) y otra de superficie igual a $\sigma_p(\vec{r}') = \vec{P} \cdot \vec{n}$ (2.13). En otras palabras, al aplicar un campo eléctrico a un material dieléctrico, este se comporta como una distribución de carga en volumen ρ_p y otra en su superficie σ_p , tal como se muestra en la Figura 50.

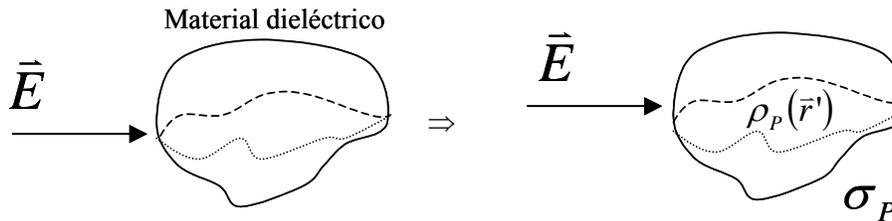


Figura 50. Modelo de medios materiales.

Es importante destacar lo siguientes aspectos:

- Las cargas de ρ_p y σ_p no se mueven (se obtienen de la rotación de los dipolos).
- La carga neta del material sigue siendo nula. En efecto:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho_p(\vec{r}') dv + \iint_{S(\Omega)} \sigma_p ds &= \iiint_{\Omega} -\nabla' \cdot \vec{P} dv + \iint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad (2.14) \\ \iiint_{\Omega} \rho_p(\vec{r}') dv + \iint_{S(\Omega)} \sigma_p(\vec{r}') ds &= \iiint_{\Omega} -\nabla' \cdot \vec{P} dv \\ &= - \iint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s} + \iint_{S(\Omega)} \vec{P} \cdot d\vec{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- ρ_p y σ_p obedecen a la alineación que ofrecen los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.

EJEMPLO 14

Un cubo dieléctrico de lado l y centrado en el origen tiene una polarización radial $\vec{P} = a\vec{r}$, donde a es una constante y $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Se pide encontrar las densidades de carga de polarización y la carga total al interior del cubo y en su superficie.

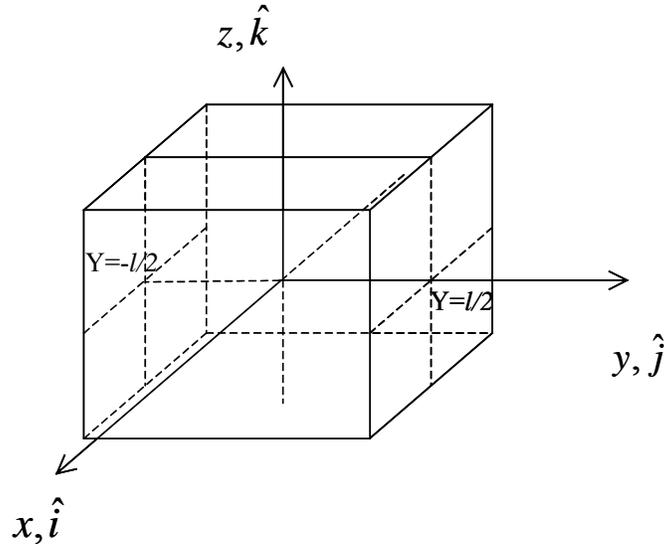


Figura 51. Dieléctrico cúbico.

Solución:

En volumen
$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(ax\hat{i} + ay\hat{j} + az\hat{k})$$

$$\rho_p = -(a + a + a) = -3a [c/m^3]$$

O sea, se tiene una distribución en volumen de carga constante al interior del cubo.

En superficie $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$, por lo tanto tendremos una distribución por cada cara del cubo:

Plano x-z. Con $y=l/2$, $\hat{n} = \hat{j} \Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{n} = (ax\hat{i} + a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k}) \cdot \hat{j} = \frac{al}{2}$

Con $y=-l/2$, $\hat{n} = -\hat{j}$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{n} = \left(ax\hat{i} - a\frac{l}{2}\hat{j} + az\hat{k}\right) \cdot (-\hat{j}) = \frac{al}{2}$$

Similarmente para las otras caras se tiene $\sigma = \frac{al}{2}$

Carga total al interior del cubo:

$$\iiint_V \rho_p dV = -3al^3 \Rightarrow Q_T = -3al^3$$

Carga en las caras:

- Por cada cara $\sigma l^2 \Rightarrow Q_{cara} = \frac{al^3}{2}$

- Seis caras $\Rightarrow Q_{caras} = 3al^3$

Notar que la carga total es $Q = Q_T + Q_{caas}$
 $= -3al^3 + 3al^3 = 0$ el material dieléctrico tiene carga neta nula.

2.5 Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

Consideremos ahora el caso general en que tenemos una distribución de cargas libre ρ al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito). La 1ª ecuación de Maxwell

$$\text{indica } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0} \quad (2.15).$$

Aquí ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico. Por ello, en este caso corresponde a la carga libre al interior del dieléctrico más las distribución de carga de polarización.

Así, $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$ (2.16) donde ρ_L densidad de carga libre y ρ_P densidad de polarización. Luego, podemos escribir

$$\rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.16)$$

ó

$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_P \quad (2.17)$$

pero $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$

$$\rho_L = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

$$\rho_L = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

Se define $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (2.20) como el vector desplazamiento eléctrico en medios materiales. Con ello

$$\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D} \quad (2.21) \quad \text{1ª Ecuación de Maxwell.}$$

Integrando en volumen

$$\overbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L \cdot dv}^{Q_{total}} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv \quad \text{Ley de Gauss en medios materiales}$$

$$Q_{total} = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (2.22)$$

Notar que en estas expresiones \vec{E} es el campo eléctrico total, el cual es resultante tanto de fuentes externas como de las cargas libres ρ_L y las de polarización ρ_P . A su vez, en el espacio vacío $\vec{P} = 0$ y se cumple $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ según habíamos visto anteriormente.

2.6 Constante Dieléctrica

2.6.1 Polarización de medios materiales

En la mayoría de los materiales $\vec{P} = 0$ en ausencia de campo eléctrico y en general la polarización \vec{P} de los materiales varía con la intensidad del campo eléctrico aplicado. La atmósfera es un típico ejemplo de un medio en el cual la polarización varía con la altitud. Dependiendo de la forma en que se efectúa esa variación los materiales se clasifican de la siguiente forma:

- $\|\vec{P}\| = \alpha\|\vec{E}\| \Rightarrow$ Materiales lineales
- $\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow$ Materiales isótropos. Aquí $\vec{P} // \vec{E}$
- α constante \Rightarrow material homogéneo.

Se acostumbra a escribir: $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ (2.23)

donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material y corresponde a una medida de cuán susceptible o sensible es un material al campo eléctrico aplicado. En general χ_e es una matriz que considera todas las posibles variaciones de la polarización con el campo aplicado. Sustituyendo la expresión de \vec{P} en la definición del vector desplazamiento queda

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2.24)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E} \quad (2.25)$$

Se define $\varepsilon_r = I + \chi_e$ (2.26) como la permitividad dieléctrica relativa del material dieléctrico y $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ como la constante dieléctrica del material, también llamada Permitividad dieléctrica (recordemos que ε_0 es la permitividad del espacio vacío definida anteriormente). Con ello

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.27)$$

Así, en general la constante dieléctrica será variable al interior del material, siendo la expresión más general de estos cambios

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.28), \text{ y en general } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{r}).$$

2.6.2 Clasificación de materiales dieléctricos

En base a la constante dieléctrica los materiales se clasifican en

- a) Material lineal si $\|\vec{D}\| = \epsilon \|\vec{E}\|$,
- b) Material isótropo si $\vec{D} = \epsilon(\vec{r})\vec{E}$,
- c) Material homogéneo si $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, con ϵ constante.

A continuación se ilustran las distintas posibilidades para un material específico:

- i) Material lineal, isótropo y homogéneo

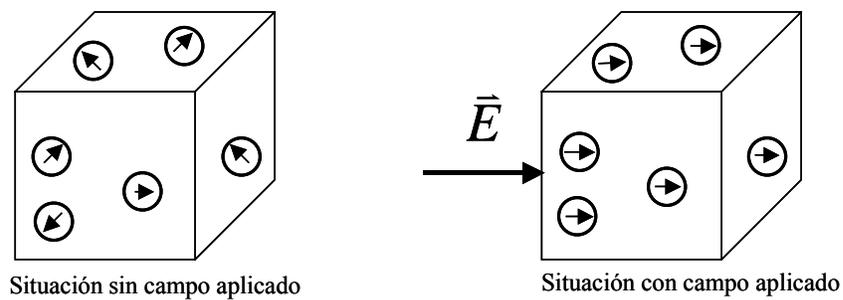


Figura 52. Material lineal, isótropo y homogéneo.

Aquí se cumple que $\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$; \vec{D} , \vec{P} y \vec{E} son paralelos y $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ con ϵ constante.

- ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

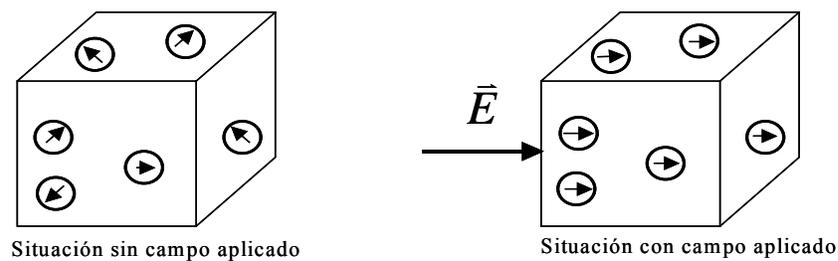


Figura 53. Material lineal, isótropo y no homogéneo.

Aquí se cumple que $\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$; \vec{D} , \vec{P} y \vec{E} son paralelos y $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ con $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$.

iii) Material lineal, anisótropo (no isótropo) y no homogéneo

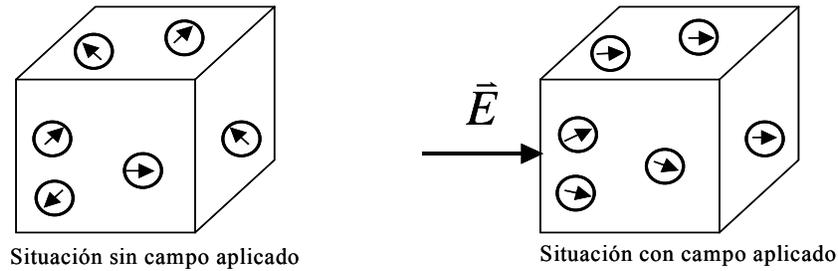


Figura 54. Material lineal, anisótropo y no homogéneo.

Aquí se cumple que $\|\vec{P}\| = \alpha\|\vec{E}\|$; \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} no son paralelos y $\vec{D} = [\epsilon]\vec{E}$ con $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$.

iv) Material no lineal, anisótropo (no isótropo) y no homogéneo

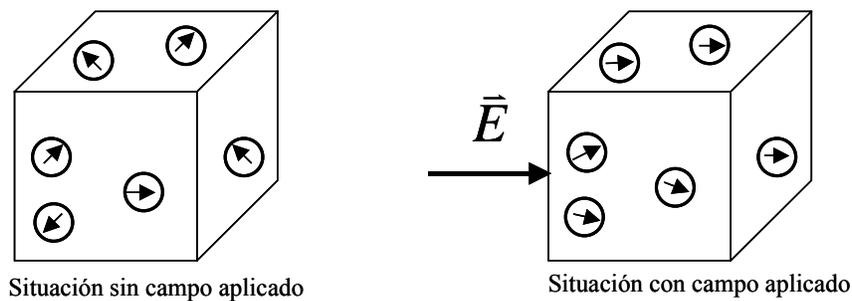


Figura 55. Material no lineal, anisótropo y no homogéneo.

Aquí $\|\vec{P}\| \neq \alpha\|\vec{E}\|$; \vec{D}, \vec{P} y \vec{E} no son paralelos y $\vec{D} = [\epsilon_{ij}]\vec{E}$ con $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\vec{r})$.

2.6.3 Ruptura dieléctrica

Cuando el campo eléctrico es lo suficientemente fuerte, es posible arrancar los electrones de las moléculas y el material deja de comportarse como aislante, esto se conoce como *ruptura dieléctrica*. Es posible encontrar la ruptura dieléctrica de cualquier material o incluso de gases como el aire. El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina “fuerza dieléctrica” y es un parámetro de gran importancia en ingeniería.

Valores de permitividad dieléctrica (aproximada)* (ϵ_r) y fuerza dieléctrica de materiales

Tabla 2: Valores de permitividad dieléctrica y fuerza dieléctrica de materiales

Material	Constante Dieléctrica ϵ_r (adimensional)	Fuerza dieléctrica E (V/m)
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 -10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 – 8.0	
Polyestireno	2.55	
Polypropileno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petroleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 atmósfera)	1	3×10^6

(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.

2.7 Condiciones de borde

Hasta el momento hemos considerado el fenómeno electrostático en el vacío y en medios materiales en forma aislada. En la práctica existirán campos en dos o más medios materiales en contacto entre sí. Llamaremos condiciones de borde a las condiciones que deben satisfacer los campos en las superficies de separación de los medios.

Consideremos dos medios dieléctricos tal como se muestra en la Figura 54, en los cuales se tiene campos eléctricos \vec{E}_1 y \vec{E}_2 en la interfaz de cada uno de los medios. Supongamos que descomponemos cada uno de los campos en sus componentes tangencial y normal a la interfaz según se muestra en la Figura 54.

Componentes de cada vector

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}$$

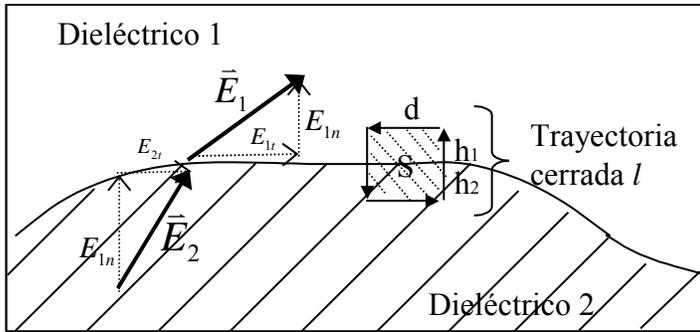


Figura 56. Condiciones de borde \vec{E} .

Usaremos las ecuaciones $\nabla \times \vec{E} = 0$ (2.29) y $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (2.30) para deducir las condiciones de borde.

i) Condiciones sobre el campo eléctrico.

Para la trayectoria infinitesimal l (que rodea la superficie S) se cumple que:

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{l(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

luego:
$$-E_{1t}d - E_{1n}h_1 - E_{2n}h_2 + E_{2t}d + E_{2n}h_2 + E_{1n}h_1 = 0$$

$$\Rightarrow -E_{1t}d + E_{2t}d = 0$$

$\therefore E_{1t} = E_{2t}$ (2.31) Las componentes tangenciales del campo a ambos lados son idénticas.

ó $\therefore \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$ (2.32) la componente tangencial del vector D es discontinua.

ii) Condiciones sobre el vector desplazamiento.

Consideremos la interfaz de dos medios como en la Figura 57.

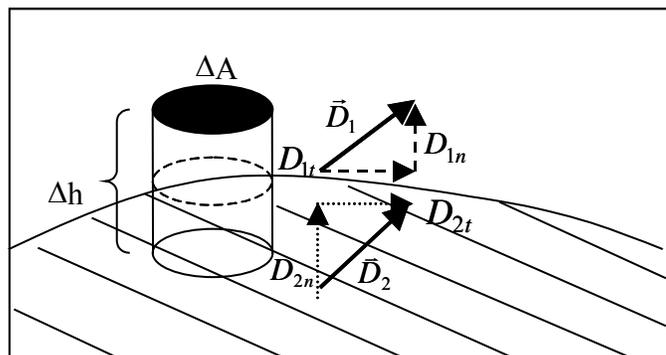


Figura 57. Condiciones de borde \vec{D} .

Aplicando la Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{libre} \quad (2.33) \quad Q_{libre} = \sigma_l \Delta A \text{ en el caso general}$$

σ_l : carga libre puesta deliberadamente en la interfaz (no es de polarización). Luego

$$D_{1n}\Delta A - D_{2n}\Delta A + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_l \Delta A$$

$$\text{Si } \Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l \quad (2.34)$$

Es decir, el vector \vec{D} sufre la discontinuidad de la carga superficial para su componente normal. Si no hay carga libre $\sigma_l = 0$ y

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (2.35)$$

Para el campo eléctrico se tiene

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (2.36)$$

Las ecuaciones de esta sección son las condiciones de borde que deben cumplir \vec{E} y \vec{D} cuando se pasa de un medio material a otro distinto. Generalmente estas condiciones se aplican cuando conocemos los campos en un medio y deseamos saber que ocurre con ellos al otro lado de la superficie de contacto con otro medio.

EJEMPLO 15

Se tiene una densidad de carga superficial σ entre dos medios dieléctricos según se muestra en la figura. Se pide calcular el campo eléctrico y el vector desplazamiento en todo el espacio.

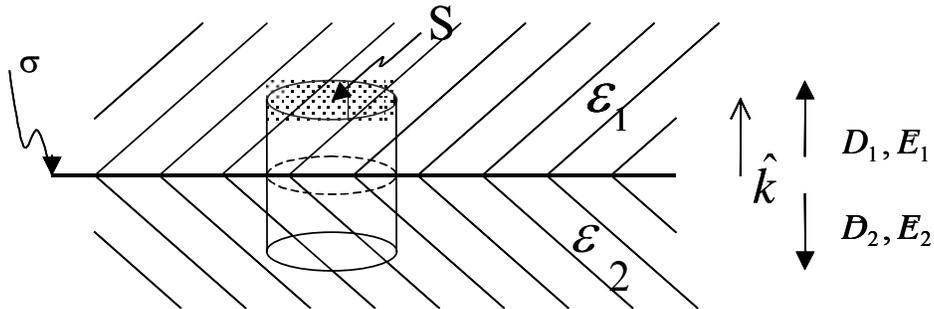


Figura 58. Carga superficial entre dieléctricos.

Solución:

Las cargas libres están en el plano. Para las cargas de polarización, dado que los medios son homogéneos no hay densidad de carga en volumen y sólo habrá densidad de carga superficial de polarización, la que también se distribuirá en planos paralelos al de la carga libre (caras de ambos dieléctricos en contacto con σ). Por lo tanto, por simetría todos los campos tienen la dirección \hat{k} y $-\hat{k}$. Las cargas superficiales de polarización en ambos dieléctricos estarán dadas por $\sigma_{p1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{k}$ y $\sigma_{p2} = \vec{P}_2 \cdot \hat{k}$ donde $\vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\vec{E}_1$ y $\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0)\vec{E}_2$. Así el problema se puede representar por 3 densidades de carga superficial, según se muestra en la siguiente figura:

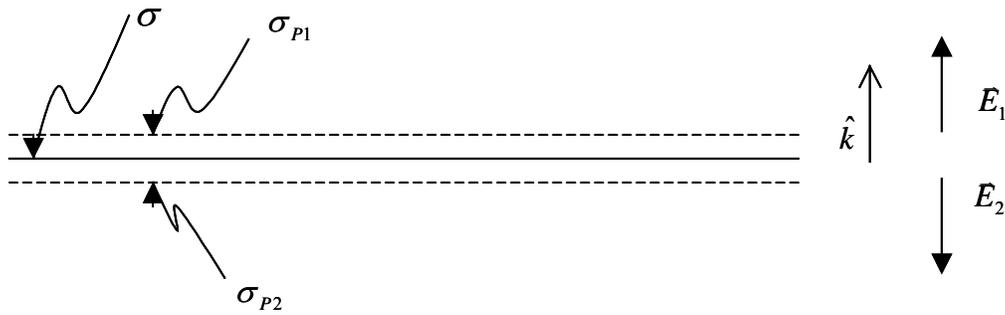


Figura 59. Carga libre y de polarización.

Claramente, por superposición (o aplicando la Ley de Gauss en S),

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{E}_2 = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) (-\hat{k})$$

luego

$$D_1 = \epsilon_1 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) \hat{k} \quad \text{y} \quad D_2 = \epsilon_2 \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P1}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{P2}}{2\epsilon_0} \right) (-\hat{k})$$

Por las condiciones de borde sabemos que:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2})$$

$$\Rightarrow 2\epsilon_0 \sigma = (\epsilon_1 + \epsilon_2) (\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2})$$

De las formulas de densidad de carga de polarización tenemos:

$$\sigma_{P1} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 \cdot (-\hat{k}) = (\epsilon_0 - \epsilon_1) E_1$$

y reemplazando la expresión del campo

$$\Rightarrow \sigma_{P1} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_1)}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_{P1} + \sigma_{P2})$$

dividiendo $2\epsilon_0 \sigma / \sigma_{P1}$ tenemos

$$\frac{2\epsilon_0 \sigma}{\sigma_{P1}} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_0 - \epsilon_1} \Rightarrow \sigma_{P1} = \sigma \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Análogamente para $2\epsilon_0 \sigma / \sigma_{P2}$ se obtiene

$$\sigma_{P2} = \sigma \frac{\epsilon_0 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

luego

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right] \hat{k}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k} \Rightarrow \vec{D}_2 = -\frac{\varepsilon_2 \sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \hat{k}$$

Claramente se cumple

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{k} = \sigma$$

Caso particular sin medios

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \Rightarrow \sigma_{p1} = \sigma_{p2} = 0$$

y

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{k}$$

que es la expresión del campo de un plano infinito de carga.

2.8 Refracción del campo eléctrico

Consideremos dos medios distintos en los cuales se tienen campos eléctricos y de desplazamiento en ausencia de cargas libres en la interfaz. Esto se muestra en la Figura 58.

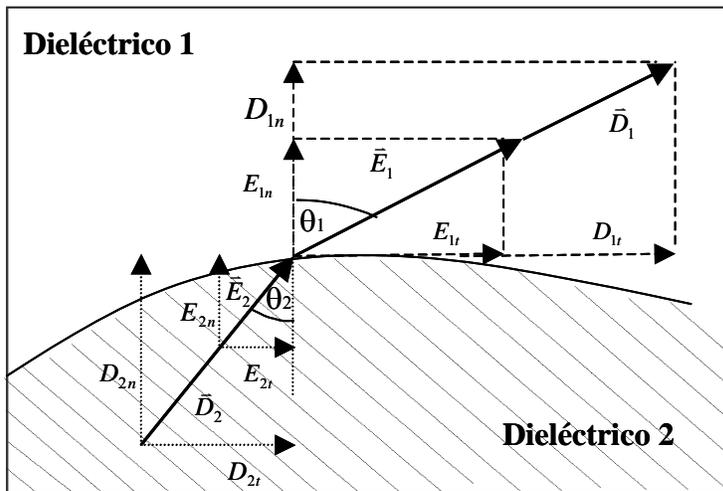


Figura 60. Refracción campo eléctrico.

Sean \vec{E}_1 , \vec{D}_1 y \vec{E}_2 , \vec{D}_2 los vectores de campo eléctrico y de desplazamiento en estos dos medios contiguos tal como se muestra en la Figura 58.

Aplicando las condiciones de borde para el campo eléctrico se tiene

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (2.37)$$

Las del vector desplazamiento (sin carga superficial entre los medios) son

$$\begin{aligned} \sigma_l = 0 &\Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 &= \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \quad (2.38) \end{aligned}$$

Dividiendo (2.37)/(2.38)

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\varepsilon_2}$$

Esta es la ley de refracción del campo eléctrico en ausencia de carga libre, la que también se puede escribir como

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \quad (2.39)$$

2.9 Consideraciones sobre Simetría

Hasta aquí hemos usado extensivamente la noción de simetría para calcular campos. Esta noción esta basada fuertemente en despreciar efectos de borde de las configuraciones, esto es, suponer planos infinitos, cilindros infinitos, etc. Esta aproximación permite tener una primera visión de los fenómenos pero en la práctica, es necesario considerarlos y por ello se utilizan programas computacionales para resolver la ecuación de Laplace y la de Poisson.

Para ilustrar las limitaciones de efectuar simplificaciones en los cálculos consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo intrigante

Considere tres materiales dieléctricos homogéneos formando la configuración de la Figura 2. Hay dos dieléctricos de constantes ϵ_1 y ϵ_2 , cada uno de los cuales corresponde a semiesferas de radio a . En el centro de la esfera se ubica una bola cargada con densidad de carga ρ_0 y radio δ . A partir de $r > a$ todo el espacio se llena con un tercer dieléctrico de constante ϵ_3 . Se piden los campos en todo el espacio.

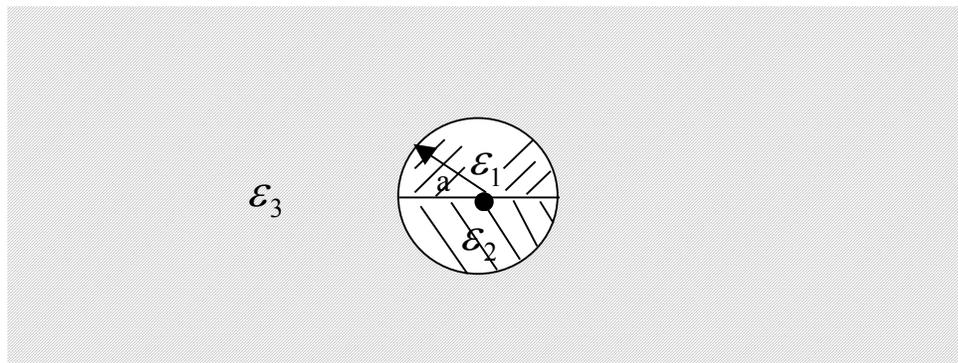


Figura 61. Simetría y condiciones de borde.

Solución:

Si comenzamos a resolver desde el tercer dieléctrico tendremos el siguiente desarrollo:

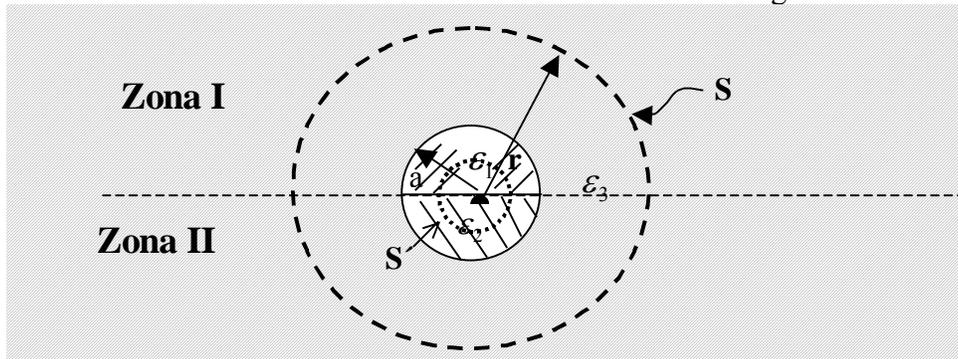


Figura 62. Simetría esférica.

Aplicando la ley de Gauss a S

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

Pero $Q_{libre} = 4\pi\rho_0\delta^3 / 3$. Además D sólo depende de r, luego $\Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0\delta^3$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2} \hat{r}, \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_3 r^2} \hat{r}$$

Si ahora aplicamos condiciones de borde para D en $r=a$ se obtienen los vectores desplazamiento en los medios 1 y 2. Así,

$$\sigma_l = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_n$$

$$D_{2n} = D_n$$

Se obtienen entonces

$$D_1(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2} \hat{r}, \quad E_1(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_1 r^2} \hat{r}$$

$$D_2(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3r^2} \hat{r}, \quad E_2(r) = \frac{\rho_0\delta^3}{3\varepsilon_2 r^2} \hat{r}$$

Pero al aplicar la condición de continuidad para la componente tangencial del campo en la interfaz de ambos medios se debe cumplir $E_1 = E_2$ en $\delta < r < a$. Cuestión que claramente es contradictoria con las expresiones anteriores.

Si ahora partimos aplicando la ley de Gauss en S' (ubicada en r, tal que $\delta < r < a$) se tiene

$$\oiint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

Y suponiendo que los vectores desplazamiento son diferentes en cada medio se obtiene

$$2\pi r^2 (D_1(\vec{r}) + D_2(\vec{r})) = \frac{4}{3}\pi\rho_0\delta^3 \quad \Rightarrow \quad D_1(\vec{r}) + D_2(\vec{r}) = \frac{2}{3r^2} \rho_0\delta^3$$

La ecuación para los campos queda

$$\varepsilon_1 E_1(r) + \varepsilon_2 E_2(r) = \frac{2}{3r^2} \rho_0\delta^3$$

Si aplicamos ahora continuidad de la componente tangencial del campo obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$$

Luego los vectores desplazamiento son

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_1\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$$

$$\vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_2\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}$$

Para obtener los campos en el medio 3 aplicamos continuidad del vector desplazamiento. Con ello obtenemos los siguientes dos valores diferentes para las Zonas 1 y 2

$$D_1(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_1\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r}, \quad \text{para la parte superior y } D_1(\vec{r}) = \frac{2\varepsilon_1\rho_0\delta^3}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^2} \hat{r} \quad \text{para la inferior.}$$

¿Cuál es el camino correcto?

La respuesta se encuentra en la validez de las suposiciones sobre la simetría del problema. En primer lugar observemos que las cargas de polarización se distribuyen según se muestra en la siguiente figura.

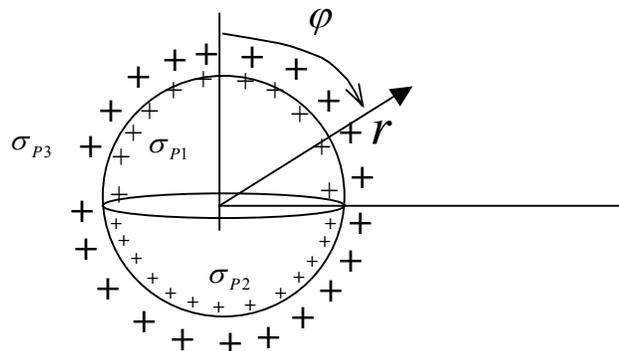


Figura 63. Densidades superficiales de carga de polarización.

Dado que los medios son diferentes, las densidades de carga también serán diferentes. Así, $\sigma_{p1} \neq \sigma_{p2} \neq \sigma_{p3}$, y en consecuencia, el problema no tiene simetría esférica. Con ello $E = E(r, \varphi)$ y no es posible usar la Ley de Gauss tal como se mostró.

En el primer caso, al suponer simetría radial en el medio 3 suponemos despreciable el efecto deformador de los medios 1 y 2. En el segundo caso, suponemos que los medios 1 y dos son lo suficientemente grandes de modo que $\delta \ll a$. Con ello los campos tendrán simetría radial (sólo dependen de r) al interior de los medios.

2.10 Problemas resueltos

PROBLEMA 1

Considere un cilindro conductor infinito de radio a inmerso en cuatro diferentes medios según se muestra en la figura. Si se carga el conductor con una densidad σ , se pide calcular:

- El campo eléctrico en todo el espacio.
- Densidades de carga de polarización.
- El vector desplazamiento D en todo el espacio.

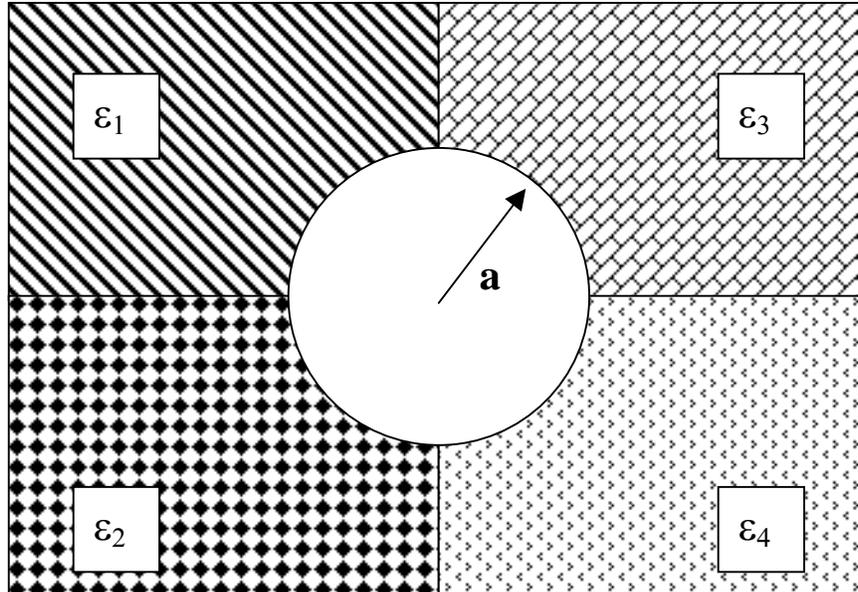


Figura P.2.1

Solución:

Para realizar este ejercicio ocuparemos la ley de Gauss para desplazamiento eléctrico, $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre encerrada}}$, además de la condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$ y de la relación para medios isótropos

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

a) Suponemos que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$.

⇒ El campo en las intersecciones de los dieléctricos es tangencial ($r > a$)

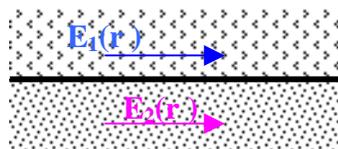


Figura P.2.1.2

Aplicando condición de borde $E_{1t} = E_{2t}$

$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}_4 = \vec{E}$ (ya que la única componente del campo es la tangencial).

\Rightarrow El campo eléctrico no depende del dieléctrico.

Luego aplicamos la ley de Gauss. Para ello, ocupamos un cilindro Gaussiano concéntrico al cilindro conductor de largo unitario, pudiendo distinguir dos casos:

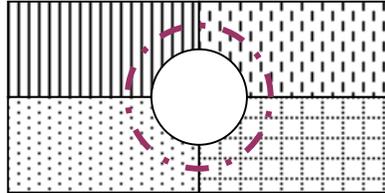


Figura P.2.1.3

- $r < a$. En este caso, no hay carga libre encerrada, con ello tenemos que:

$$\vec{E}(r < a) = 0.$$

- $r > a$. Podemos ver que la ley de Gauss nos da:

$$\frac{D_1 \cdot \pi r}{2} + \frac{D_2 \cdot \pi r}{2} + \frac{D_3 \cdot \pi r}{2} + \frac{D_4 \cdot \pi r}{2} = 2\pi a \sigma \quad (\text{En esta ecuación ya está hecha la simplificación del largo del cilindro que correspondería en ambos lados de ésta})$$

Si $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}$, obtenemos que el campo fuera de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{4a\sigma}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} \hat{r}$$

- b) De las dos relaciones dadas al comienzo, tenemos que el vector polarización

$$\vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{(\epsilon_i - \epsilon_0) \cdot 4a\sigma}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} \hat{r}.$$

Sabemos que la densidad volumétrica de polarización es: $\rho_i = -\nabla \cdot \vec{P}$. Luego concluimos que para todo medio i , la densidad ρ_i es

$$\rho_{pi} = -\nabla \cdot \vec{P}_i = \frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} = 0$$

(resultado esperado, pues de antemano sabemos que no hay densidades volumétricas de carga)

Tenemos también que existe una densidad de carga superficial debido a la polarización en cada una de las zonas de borde. En la figura V, podemos ver las normales asociadas a cada superficie.

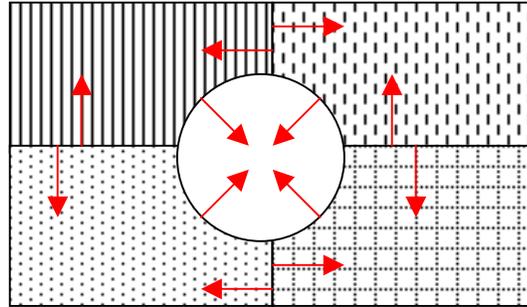


Figura P.2.1.4

Luego, sólo existe carga de polarización $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$ en la cara del círculo. En esta zona, tal como lo muestra el dibujo, el vector normal es $-\hat{r}$.

Entonces la carga de polarización de la superficie del cilindro depende de la zona de contacto. Para cada zona, su valor es:

$$\sigma_{pi} = \vec{P}_i \cdot \hat{n} = \vec{P}_i \cdot -\hat{r} = -\frac{4a\sigma(\epsilon_i - \epsilon_0)}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}$$

Evaluando en $r = a$

$$\Rightarrow \sigma_{pi} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_i) \cdot 4a\sigma}{a(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{pi} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_i) \cdot 4\sigma}{(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)}$$

c) Como ya usamos en la parte a, para un material isótropo (la mayoría) tenemos que el desplazamiento se relaciona con el campo de forma que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Luego, el desplazamiento para cada zona es:

- $\vec{D}(r) = 0$ si $r < a$.
- $\vec{D}_i = \frac{\epsilon_i \cdot 4a\sigma}{r(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)} \hat{r}$ si $r > a$, para la zona i.

PROBLEMA 2

Un conductor cilíndrico largo de radio a , que tiene una densidad de carga λ por unidad de longitud, se sumerge en un medio dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_r . Halle el campo eléctrico a una distancia $r > a$ del eje del cilindro.

Solución:

Para $r > a$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q = \lambda L$$

$$\Rightarrow 2\pi r L \vec{D} = \lambda L$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} \hat{r}$$

PROBLEMA 3

Considere dos placas planas de vidrio ($\epsilon_r = 8.5$) puestas verticalmente, que se encuentran separadas por un hueco de aire y rodeadas de aceite ($\epsilon_r = 3.0$), tal como lo ilustra la figura. Un campo eléctrico uniforme de 2000 V/m existe en el aceite. Se pide calcular el campo eléctrico en el vidrio y en el hueco de aire cuando el campo en el aceite

- Es normal a la lámina de vidrio
- Forma un ángulo de 75° con ésta.



Figura P.2.3

Indicación. Considere que los campos sólo tienen componentes en el plano de esta página (no tres dimensiones).

Para todos los problemas haga todo supuesto que usted considere justificadamente necesarios para resolverlos (incluida la posible necesidad de datos adicionales).

Solución:

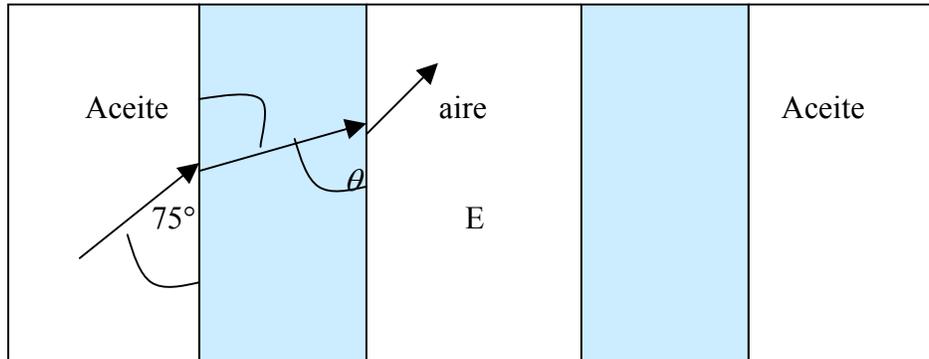


Figura P.2.3.1

a) Se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

Donde σ es la carga libre en la interfaz, supondremos que no hay carga libre en ninguna interfaz, es decir, suponemos $\sigma = 0$.

Como el campo en el aceite es normal a la superficie

$$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t} = 0$$

Entonces el campo en el aceite es normal a la superficie también

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2 = \sigma$$

Donde los subíndices son 1 para aceite y 2 para vidrio

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_2 \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\epsilon_1 \vec{E}_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 \vec{E}_1}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r1} \vec{E}_1}{\epsilon_{r2}} = \frac{3 \cdot 2000}{8.5} = 705.882 \frac{V}{m}$$

Luego el campo para el primer vidrio es $\vec{E}_{2n} = \vec{E}_2 = 705.882 \frac{V}{m}$

Entre vidrio (subíndice 2) y el aire, que le asignaremos como referencia el 0, aplicamos condiciones de borde de forma análoga a la anterior.

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_2 \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{\epsilon_2 \vec{E}_2}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 \vec{E}_2}{\epsilon_0} = \epsilon_{r2} \vec{E}_2 = 6000 \frac{V}{m}$$

Luego el ampo en el aire será: $\vec{E}_{0n} = \vec{E}_0 = 6000 \frac{V}{m}$

Para la próxima placa de vidrio el campo valdrá lo mismo que en la primera.

b) El campo eléctrico del aceite forma un ángulo de 75° con la lámina de vidrio

Aplicamos condiciones de borde:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \cdot \cos 75^\circ = E_2 \cdot \cos \theta \quad (1)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_1 \sin 75^\circ = \epsilon_2 E_2 \sin \theta \quad (2)$$

Multiplicando (1) por ϵ_2 y sumando el cuadrado de ambas condiciones tenemos:

$$(1) E_1 \cdot \cos 75^\circ = E_2 \cdot \cos \theta \quad / \cdot \epsilon_2$$

$$(2) \epsilon_1 E_1 \cdot \sin 75^\circ = \epsilon_2 E_2 \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} (1)^2 + (2)^2 &\Rightarrow E_1^2 (\epsilon_2^2 \cos^2 75^\circ + \epsilon_1^2 \sin^2 75^\circ) = \epsilon_2^2 E_2^2 \\ &\Rightarrow E_1^2 (\epsilon_{r2}^2 \epsilon_0^2 \cos^2 75^\circ + \epsilon_{r1}^2 \epsilon_0^2 \sin^2 75^\circ) = \epsilon_{r2}^2 \epsilon_0^2 E_2^2 \\ &\Rightarrow E_1^2 (\epsilon_{r2}^2 \cos^2 75^\circ + \epsilon_{r1}^2 \sin^2 75^\circ) = \epsilon_{r2}^2 E_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_2^2 = \frac{E_1^2 (\epsilon_{r2}^2 \cos^2 75^\circ + \epsilon_{r1}^2 \sin^2 75^\circ)}{\epsilon_{r2}^2}$$

$$\text{Considerando } E_1 = 2000 \frac{V}{m}$$

$$\Rightarrow E_2^2 = 1991075.088 \Rightarrow E_2 = 1411.052 \frac{V}{m}$$

$$E_2 \text{ en (1)} \Rightarrow \theta$$

$$\cos \theta = \frac{E_1 \cdot \cos 75^\circ}{E_2} = \frac{2000 \cdot 0.383}{1411.052} = 0.5428 \Rightarrow \theta = 63.468$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = E_2 \cos \theta \hat{i} + E_2 \sin \theta \hat{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 \approx 774.7 \hat{i} + 1179.4 \hat{n} \left[\frac{V}{m} \right]}$$

Para encontrar el campo en el aire, debemos nuevamente aplicar condiciones de borde:

$$E_{2t} = E_{0t} \Rightarrow E_{0t} = 774.7 \frac{V}{m}$$

$$D_{2n} - D_{0n} = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_0 E_{0n}$$

$$\Rightarrow E_{0n} = \frac{\varepsilon_{2r} \varepsilon_0 E_{2n}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_{0n} = 8.5 \times 1179.4 \frac{V}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = 774.7 \hat{t} + 10024.9 \hat{n} \left[\frac{V}{m} \right]}$$

2.11 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1

Dos cilindros concéntricos de radios a y b respectivamente y largo L se encuentran ubicados tal como lo indica la Figura PP.2.1. El espacio entre ambos se encuentra lleno de un material con permitividad ϵ . El vector polarización entre ambos medios está dado por $\mathbf{P} = r^2 \mathbf{r} + \sin \theta \mathbf{\theta}$

Dado lo anterior

- Calcular las densidades superficiales de carga de polarización
- Calcular la densidad volumétrica de carga de polarización
- Plantear una expresión para el vector campo eléctrico en todo el espacio.

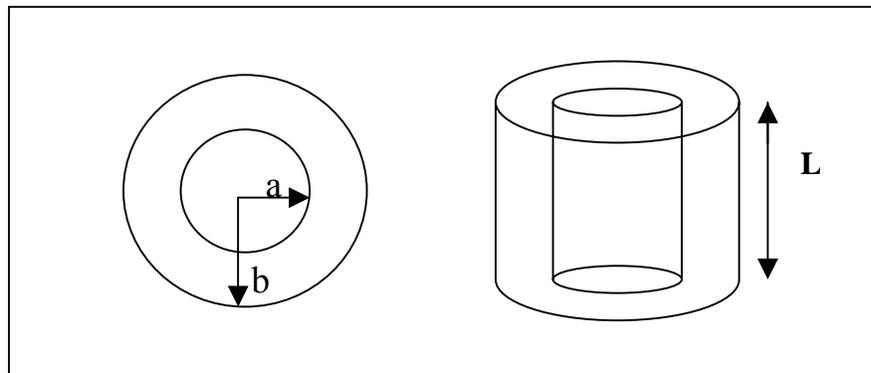


Figura PP.2.1

PROBLEMA 2

Una densidad de carga esférica $\rho(r) = kr$ ($0 < r < a$) se encuentra rodeada de un material dieléctrico con geometría esférica hasta una distancia radial b , según se muestra en la Figura PP.2.2

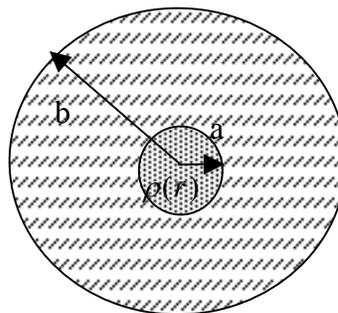


Figura PP.2.2

El medio material se compone de moléculas, cada una de las cuales posee un momento dipolar eléctrico de 5×10^{-20} [Cm] orientado radialmente (según \hat{r}). La densidad de carga produce una modificación en las moléculas, las cuales presentan la siguiente densidad volumétrica $g(r) = kr^2$ [moléculas/m³]. Se pide:

- Determinar el vector polarización del medio material.
- Calcular los campos D y E en todo el espacio.
- Determinar la diferencia de potencial entre los casquetes definidos por radios a y b .

PROBLEMA 3

Considere tres materiales dieléctricos homogéneos formando la configuración esférica de la Figura PP.2.3.

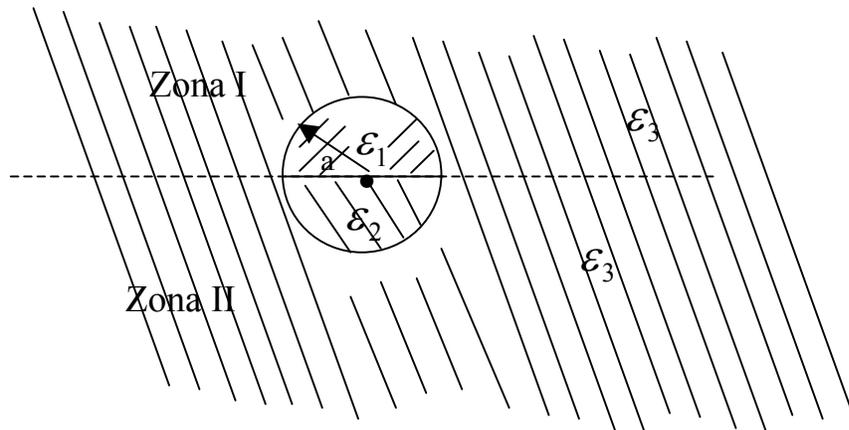


Figura PP.2.3.

En el centro de la esfera de radio a se ubica una carga q . Se pide:

- Calcular D en todo el espacio.
- Calcular E en todo el espacio.
- Son iguales los campos en las zonas I y II.

CAPITULO 3. CONDUCTORES EN ELECTROSTÁTICA

3.1 Modelo Básico de Conductores

Modelaremos un conductor ideal como un medio material en el cual existen abundantes cargas positivas y negativas, las cuales pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico. Así, al aplicar un campo eléctrico se genera una fuerza sobre las cargas, las que se moverán hasta alcanzar el estado de equilibrio. Este equilibrio implica que el campo eléctrico al interior del conductor debe ser nulo (de otro modo las cargas continuarían su movimiento) según se ilustra en la Figura 64.

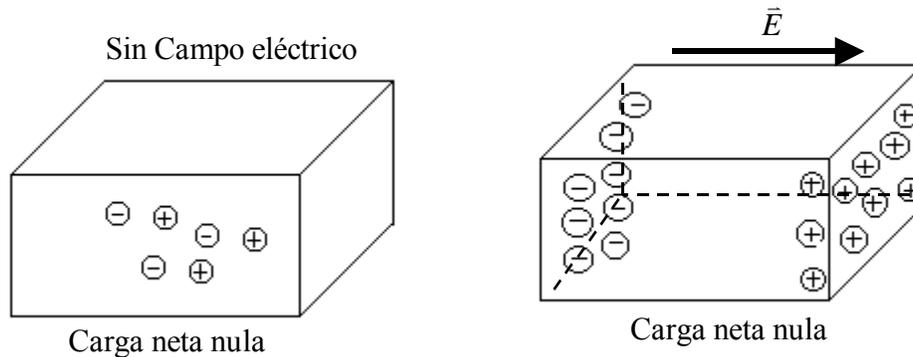


Figura 62. Conductor en presencia de un campo eléctrico.

Supondremos en principio que la cantidad de carga libre al interior del conductor es muy elevada (infinita). Por lo tanto siempre el conductor puede disponer de carga negativa y positiva para localizarla, de modo que se alcance el estado en que el campo interior sea nulo en la condición estacionaria. En este capítulo solo estudiaremos la condición de equilibrio y dejaremos el fenómeno de la conducción para más adelante.

3.2 Propiedades

De la definición anterior se sigue que un conductor cumple con las siguientes propiedades:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie, ya que si \vec{E} es nulo en el interior $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$, o sea, no existe densidad volumétrica de carga.
2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial. En efecto, dado que $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ y dado que \vec{E} es nulo al interior del material conductor, entonces $\Delta V = 0$ entre cualquier par de puntos del conductor, es decir, todo el conductor está a un mismo potencial.

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor y vale $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$, donde σ es la densidad superficial de carga del conductor. Consideremos el conductor de la figura 65.

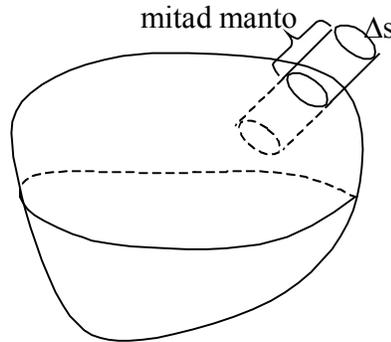


Figura 65. Densidad de carga en conductores.

Aplicando la ley de Gauss al cilindro infinitesimal de la Figura 65 se tiene

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{Total}$$

Dado que sólo hay campo afuera $\Rightarrow D_{int.} = 0$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{mitad} \\ \text{manto}}} D \cdot dS + \iint_{\substack{\text{tapa} \\ \text{exterior}}} \vec{D} \cdot dS \quad (3.1)$$

haciendo tender $h \rightarrow 0$ la contribución de la mitad del manto se hace despreciable, con ello

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n \Delta s$$

$$\Rightarrow D_n \Delta s = \sigma \Delta s$$

pero

$$D_n = \epsilon E_n$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{n}$$

para el aire $\epsilon = \epsilon_0$, luego

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (3.2)$$

Lo que concuerda con la intuición física, ya que si hubiera campo en el sentido tangencial en la superficie del conductor habría movimiento de cargas, el que se mantendría hasta alcanzar un nuevo punto de equilibrio con campo tangencial nulo.

3.3 Caso Conductor con Oquedad

En esta sección probaremos que toda carga libre sólo existe en la superficie exterior de un conductor. Consideremos el caso en que se tiene un conductor con una oquedad y se le inyecta una carga libre Q , la cual puede desplazarse libremente en el conductor, tal como se muestra en la Figura 66.

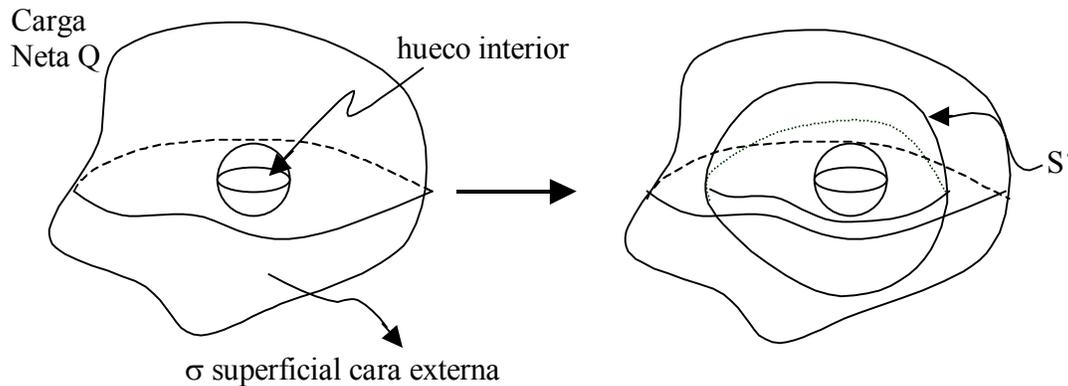


Figura 66. Densidad de carga en conductor hueco.

Si tomamos una superficie S' que contenga al hueco, por la Ley de Gauss se debe cumplir

$$\oiint_{S'} \vec{D}_{\text{int.}} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{total}}$$

Pero $\vec{D}_{\text{int.}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{total}}$ encerrada por la superficie S' es nula. Ahora bien, la carga encerrada por la superficie S' puede deberse a una carga superficial en la superficie interior del hueco, o bien a una carga en volumen. Pero ya hemos visto por la propiedad 1 que un conductor no puede tener densidad de carga en volumen. Por ello, la carga en la superficie interior del conductor es nula.

En consecuencia, solo podrá distribuirse la carga libre Q en la superficie exterior, lo que hará de forma que se produzca un campo nulo al interior.

Un caso interesante se produce cuando se introduce una carga puntual Q en el hueco interior de un conductor sin carga, según se muestra en la Figura 67.

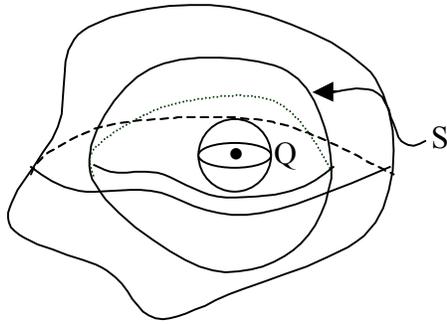


Figura 67. Carga en oquedad.

En este caso, al aplicar la Ley de Gauss a S sigue cumpliéndose que $\vec{D}_{int.} = 0 \Rightarrow Q_{total}$ encerrada por la superficie S es nula. Por lo tanto, concluimos que debe aparecer una densidad de carga σ' en la superficie interior de la oquedad de modo de lograr que la carga neta sea nula, es decir,

$$\iint_{S'} \sigma' dS + Q = 0 \quad (3.3)$$

Ahora bien, como la carga neta de todo el conductor debe seguir siendo nula (estaba descargado originalmente), aparecerá también una densidad de carga σ en la superficie exterior del conductor de modo que

$$\iint_S \sigma dS = Q \quad (3.4)$$

La situación de equilibrio se muestra en la Figura 68.

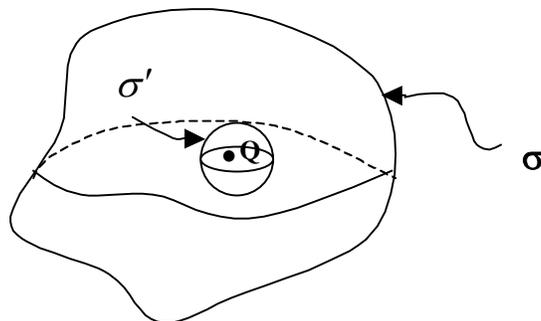


Figura 68. Situación de equilibrio.

Aquí σ y σ' se distribuyen de forma que el campo al interior del conductor es cero.

EJEMPLO 16.

Consideremos dos placas conductoras cargadas con cargas Q y -Q respectivamente. Entre las placas existe un material dieléctrico de constante dieléctrica ϵ . Suponiendo que despreciamos los efectos de los extremos de las placas (o sea placas ∞) se pide:

- i) Distribución de las cargas en las placas
- ii) Campos en todo el espacio
- iii) Diferencia de potencial entre las placas

Solución:

Consideremos que la configuración es la mostrada en la Figura 69.

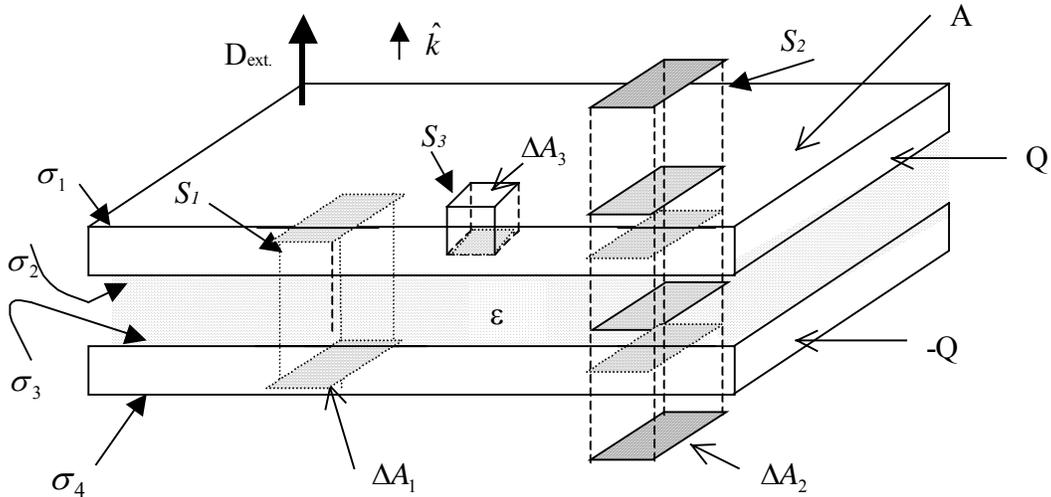


Figura 69. Condensador placas planas.

- i) Llamemos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 a las densidades de carga superficial en c/u de las caras de las placas. Se cumple

$$Q = \sigma_1 A + \sigma_2 A \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \tag{3.5}$$

donde $\sigma = Q/A$.

Análogamente se obtiene

$$\sigma_3 + \sigma_4 = -\sigma \tag{3.6}$$

Por simetría los campos sólo tienen componente según \hat{k} (sólo habrá cargas en planos).

Consideremos el volumen contenido por la superficie S_1 , el cual es un paralelepípedo cuyas caras horizontales están contenidas en ambos conductores. Allí se cumple

$$\oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{tapa abajo}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{manto}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{tapa arriba}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

pero en la tapa de abajo y en la de arriba \vec{D} es nulo, y en el manto \vec{D} es ortogonal a $d\vec{S}$, luego

$$\oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Por otra parte $Q_{total} = \Delta A \sigma_2 + \Delta A \sigma_3$

Luego por la ley de Gauss $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$, es decir, se cumple

$$\Rightarrow \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (3.7)$$

En el espacio exterior a las placas el campo es constante (se debe sólo a distribuciones de carga superficial constante) y tiene la dirección del vector \hat{k} unitario. Llamémoslo D_{ext} .

Consideremos ahora el volumen limitado por la superficie S_2 , la cual define un paralelepípedo que traspasa ambas placas. Se cumple

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2D_{ext} \Delta A_2$$

$$Q_{total} = \sigma_1 \Delta A_2 + \sigma_2 \Delta A_2 + \sigma_3 \Delta A_2 + \sigma_4 \Delta A_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \Delta A_2 = 0$$

$$\Rightarrow D_{ext} = 0$$

Es decir, no hay campo exterior a las placas.

Para la superficie S_3 , la cual define un cubo cuya cara inferior esta contenida en el conductor y la superior fuera de él, se cumple

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{int} \Delta A_3 + D_{ext} \Delta A_3 = 0$$

y

$$Q_{total} = \sigma_1 \Delta A_3 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

Así, de (3.5) $\sigma_2 = \sigma$, de (3.7) $\sigma_3 = -\sigma$ y de (3.6) $\sigma_4 = 0$.

La distribución de carga se muestra en la Figura 70.

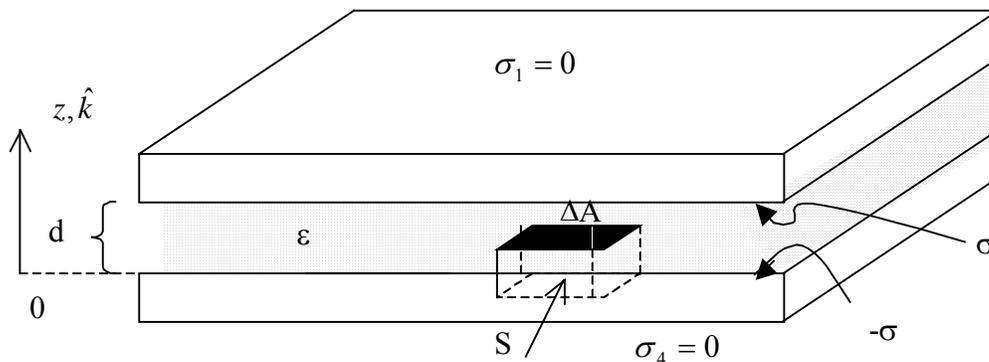


Figura 70. Gauss para un condensador.

- i) Nos falta calcular el campo entre las placas. Tomando la superficie Gaussiana S, cuya cara inferior esta contenida en el conductor y la superior en el dieléctrico, se tiene

$$\begin{aligned} \oiint \bar{D} \cdot d\bar{S} &= Q_{total} & \text{Suponiendo } \bar{D}_{int} &= -D\hat{k} \\ \oiint \bar{D} \cdot d\bar{S} &= -D\Delta A & \left. \begin{aligned} \oiint \bar{D} \cdot d\bar{S} &= -D\Delta A \\ Q_{total} &= -\sigma\Delta A \end{aligned} \right\} & \Rightarrow -D = -\sigma \\ \therefore \bar{D}_{int} &= -\sigma\hat{k} \end{aligned}$$

El campo eléctrico al interior del dieléctrico es $\bar{E}_{int} = \frac{\bar{D}_{int}}{\epsilon} \Rightarrow \bar{E}_{int} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\hat{k}$

ii)

$$\Delta V = -\int_0^d \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$V_{\sigma} - V_{-\sigma} = -\int_0^d \bar{E}_{int} \cdot d\bar{l}$$

$$\Delta V = -\int_0^d \left(-\frac{\sigma}{\epsilon} \right) \hat{k} \cdot (dz)\hat{k} = \frac{\sigma}{\epsilon} z \Big|_0^d \quad d\bar{l} = dz\hat{k}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

Así, si $\sigma, \epsilon, d > 0 \Rightarrow V_{\sigma} - V_{-\sigma} > 0$

Notar que dado $\bar{E} = -\nabla V$, para una variable tenemos $\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}$. Luego si sabemos el voltaje entre dos puntos, para pequeños incrementos podemos aproximar

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{\Delta V}{\Delta x}\hat{i} \\ \Rightarrow \Delta x\bar{E} &= -\Delta V\hat{i} \\ (x_2 - x_1)\bar{E} &= -(V_2 - V_1)\hat{i} \end{aligned}$$

A modo de ejemplo, si tomamos la referencia de la Figura 71 donde $x_2 - x_1 < 0$, se tiene si $V_2 > V_1 \Rightarrow \vec{E} = E\hat{i}$; si $V_2 < V_1 \Rightarrow \vec{E} = E(-\hat{i})$, que es el caso mostrado en la figura.

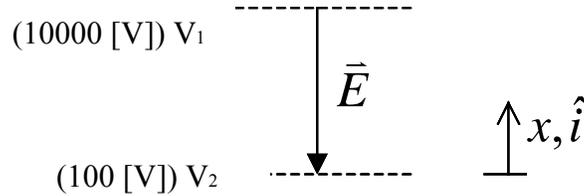


Figura 71. Dirección campo eléctrico.

En general, cuando calculamos el potencial entre dos puntos cualquiera tenemos

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{l}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\nabla V \cdot d\vec{l} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV$$

$$\therefore \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 dV$$

$$\therefore V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Es importante notar que en el ejemplo anterior, si el dato hubiera sido la diferencia de potencial $\Delta V = -\frac{\sigma}{\epsilon} d$, los resultados serían idénticos (PROBARLO!).

3.4 Condensadores

Un condensador es un sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro. Generalmente se dispone de un dieléctrico entre ambos conductores. Se define el parámetro capacidad de un condensador como

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad (3.8)$$

donde Q es la carga positiva de uno de los conductores y ΔV la diferencia de potencial entre ellos ($V_Q - V_{-Q}$). Se cumple la propiedad de que la capacidad C es independiente de Q y ΔV y sólo depende de la geometría y las características dieléctricas de los materiales.

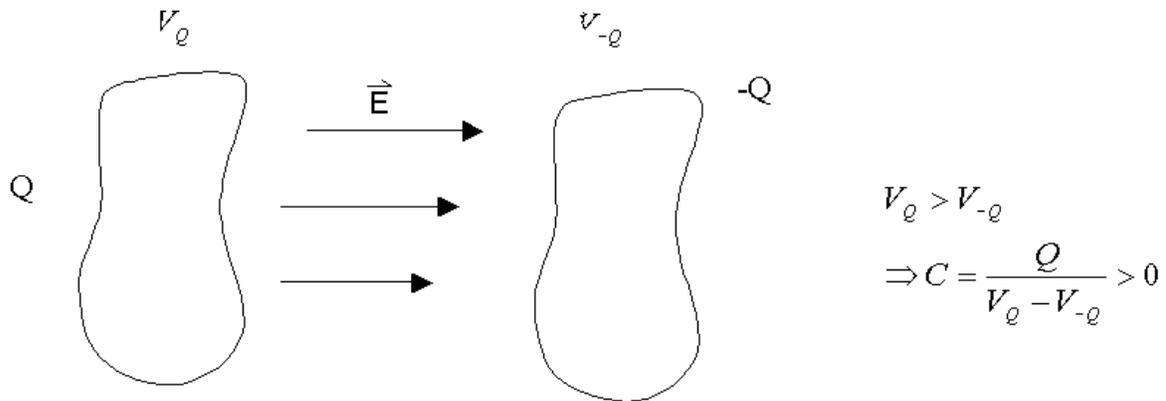


Figura 72. Condensador.

EJEMPLO 17.

Calcule la capacidad del Ejemplo 16.

Solución:

Teníamos la configuración

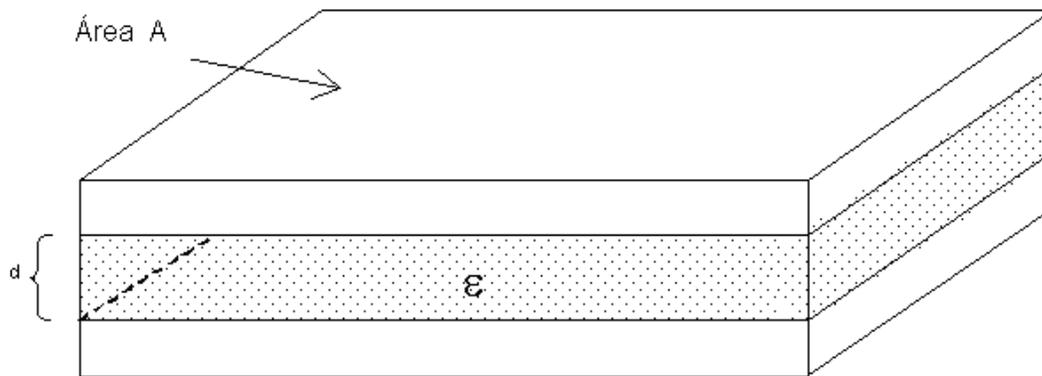


Figura 73. Condensador placas planas.

Se cumple $Q = \sigma A$ y $\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d$, luego

$$C = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon} d} \Rightarrow C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Luego para este ejemplo la capacidad tiene las siguientes propiedades:

- Menor $d \Rightarrow$ mayor C ,
- Mayor $A \Rightarrow$ mayor C ,
- Mayor $\epsilon \Rightarrow$ mayor C ,
- Para un mismo ΔV , la carga acumulada es mayor mientras mayor es su capacidad.

EJEMPLO 18.

Calcule la capacidad del condensador de la Figura 74. Desprecie los efectos de borde, i.e., calcule campos considerando $a, b \ll L$.

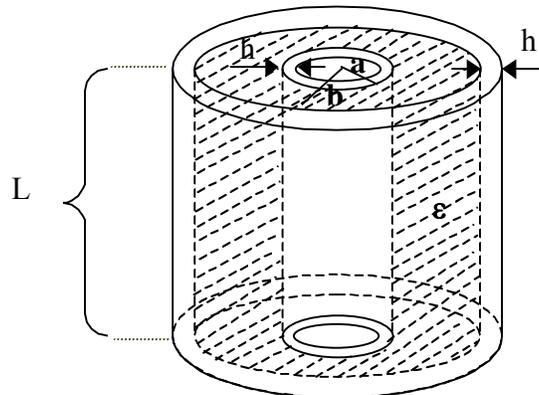


Figura 74. Condensador cilíndrico.

Solución:

Llamemos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 a las densidades de carga superficial de cada cara.

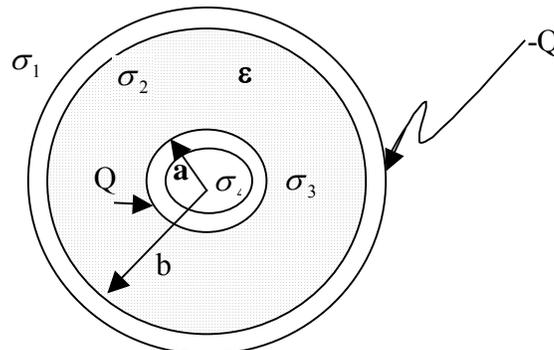


Figura 75. Distribución de cargas condensador cilíndrico.

Si distribuimos la carga de modo que $\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_a$ y $\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_b$ para que el condensador cumpla con la definición se debe tener

$$Q = \sigma_a 2\pi a L = \sigma_b 2\pi b L \Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{b}{a} \quad (i)$$

De acuerdo a las propiedades vistas en los conductores la carga se almacena en la superficie externa, es decir, $\sigma_4 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \sigma_a$. Tomemos una superficie gaussiana S según se muestra en la Figura 76.

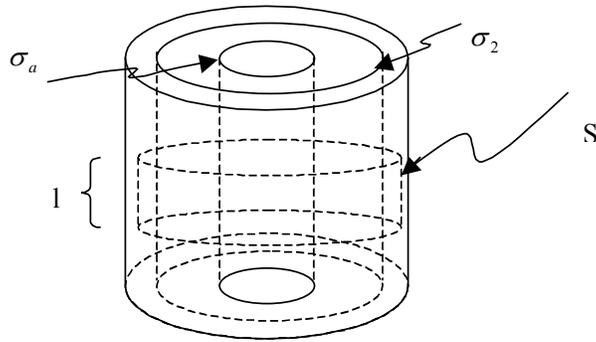


Figura 76. Simetría axial exterior.

Aplicando la ley de Gauss a S

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

El sistema posee simetría axial, luego $\vec{D} = D\hat{\rho}$ entre $a < r < b$ y es nulo al interior de los conductores, o sea en el manto de S. Por ello,

$$Q_{total} = \sigma_a \underbrace{\Delta S_a}_{2\pi a l} + \sigma_2 2\pi b l$$

$$\Rightarrow Q_{total} = 0 \Rightarrow -\sigma_a 2\pi a l = \sigma_2 2\pi b l$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_a \frac{a}{b}$$

y de (i)

$$\Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_b \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

Consideremos ahora una superficie Gaussiana en $a < r < b$ como la mostrada en la Figura 77.

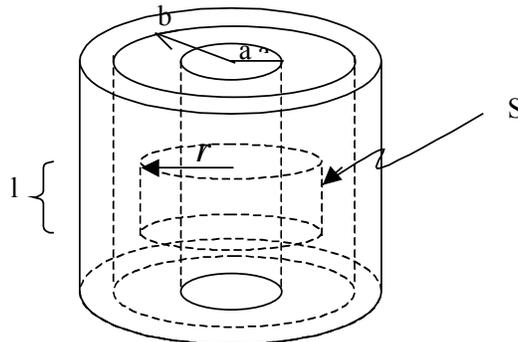


Figura 77. Simetría axial interior.

Se cumple

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$Q_{total} = \sigma_a 2\pi a l$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D 2\pi r l$$

$$\Rightarrow D 2\pi r l = \sigma_a 2\pi a l$$

$$\therefore \vec{D} = \sigma_a \frac{a}{r} \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_a a}{\epsilon r} \hat{\rho}$$

La diferencia de potencial entre placas es:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

y escogiendo $d\vec{l} = dr \hat{\rho}$

$$\Delta V_{ba} = - \int_a^b \frac{\sigma_a a}{\epsilon r} \hat{\rho} \cdot dr \hat{\rho} = - \frac{\sigma_a a}{\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma_a}{\epsilon} a \ln \frac{b}{a} \quad (*)$$

Por definición $C = \frac{Q}{\Delta V}$, y en este caso

$$\Delta V = V_{Q^+} - V_{Q^-} = V_a - V_b$$

y $Q = \sigma_a 2\pi a L \Rightarrow \sigma_a a = \frac{Q}{2\pi L}$. Reemplazando todo esto en (*)

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi a L \epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$\therefore C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi a L \epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

Notar que nuevamente la capacidad C es proporcional a ϵ y el área, e inversamente proporcional a la separación entre las placas. Se acostumbra a designar los condensadores por el símbolo

$$C \triangleq \begin{array}{c} \perp V^+ \\ \text{---} \\ \perp V^- \end{array}$$

Figura 78. Símbolo condensador.

3.5 Cargas en medios materiales

Resumiendo lo que hemos visto hasta aquí es lo siguiente:

- (i) Dieléctricos

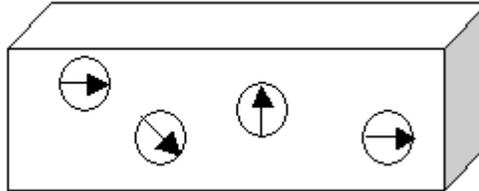


Figura 79. Cargas en dieléctricos.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Los medios se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

- (ii) Conductores:

Equilibrio electrostático

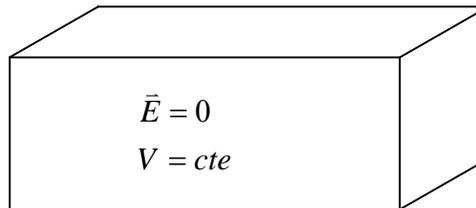


Figura 80. Conductores en equilibrio electrostático.

Sólo tiene distribución superficial. La carga al interior es nula $\rho=0$ y no hay polarización $\vec{P}=0$.

En la práctica, los medios materiales podrán exhibir características tanto de dieléctricos como de conductores.

3.6 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

En la Figura P.3.1 se muestra una distribución cilíndrica, la cual está formada por dos medios que poseen características dieléctricas y ohmicas. Se pide:

- Suponiendo que los conductores están a una diferencia de potencial V_0 , calcular el vector densidad de corriente.
- Calcule la capacidad del sistema
- Calcule la resistencia del sistema

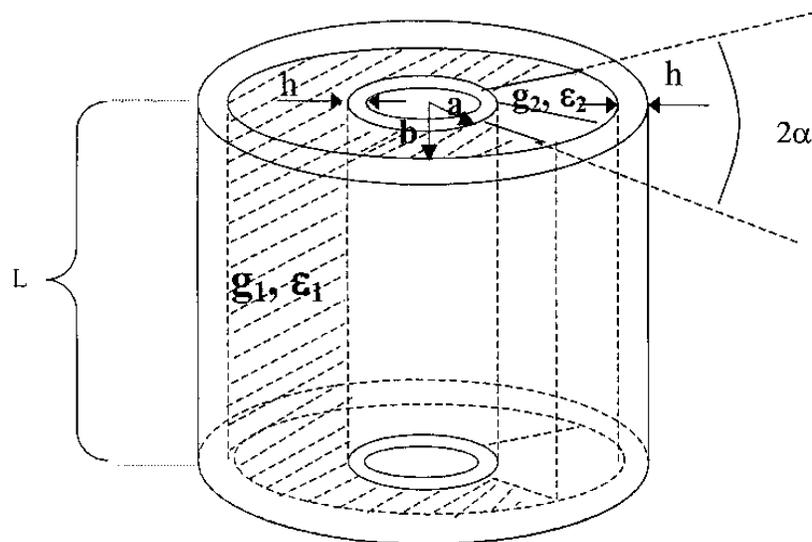


Figura P.3.1

Solución :

a) Se sabe que:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Para este caso se tiene que:

$$\Delta V = V_0$$

$\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$ pues supondremos sólo dependencia radial.

Entonces suponiendo que el conductor de radio a está a mayor potencial que el conductor de radio b escribir que:

$$V_0 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_b^a E(r) \hat{r} \cdot dr = -(a-b)E(r)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{V_0}{(b-a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{V_0}{(b-a)} \hat{r}}$$

Ahora para cada medio el vector densidad de corriente será:

$$\vec{J}_i(r) = g_i \vec{E}(r)$$

Para el medio uno: $\vec{J}_1(r) = g_1 \vec{E}(r) = g_1 (b-a) V_0 \hat{r}$

Para el medio dos: $\vec{J}_2(r) = g_2 \vec{E}(r) = g_2 (b-a) V_0 \hat{r}$

b) La capacidad del sistema es:

Como ambos dieléctricos se encuentra a un mismo voltaje la capacidad del sistema será la suma de las capacidades de los dos.

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Donde

$$C_i = \frac{Q_i}{\Delta V} = \frac{Q_i}{V_0}$$

$$Q_i = \int_S \vec{D}_i \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E} = \epsilon_i \frac{V_0}{(b-a)} \hat{r}$$

Para el medio uno:

$$Q_1 = \int_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2(\pi-\alpha)} \int_a^b \epsilon_1 \frac{V_0}{(b-a)} r dr d\theta dz \hat{r}$$

$$Q_1 = \epsilon_1 \frac{V_0}{(b-a)} \cdot L \cdot 2(\pi-\alpha) \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{2}$$

$$Q_1 = \epsilon_1 \frac{V_0}{(b-a)} \cdot L \cdot 2(\pi-\alpha) \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$\boxed{Q_1 = L V_0 \epsilon_1 \cdot (\pi - \alpha) \cdot (b + a)}$$

Para el medio dos:

$$Q_2 = \int_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = \int_0^L \int_0^{2\alpha} \int_a^b \varepsilon_2 \frac{V_0}{(b-a)} r dr d\theta dz \hat{r}$$

$$Q_2 = \varepsilon_2 \frac{V_0}{(b-a)} \cdot L \cdot 2\alpha \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{2}$$

$$Q_2 = \varepsilon_2 \frac{V_0}{(b-a)} \cdot L \cdot 2\alpha \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$\boxed{Q_2 = LV_0 \varepsilon_2 \cdot \alpha \cdot (b+a)}$$

Entonces

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_0} = L\varepsilon_1 \cdot (\pi - \alpha) \cdot (b+a)$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_0} = L\varepsilon_2 \cdot \alpha \cdot (b+a)$$

Por lo que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = L \cdot [\varepsilon_1 \cdot (\pi - \alpha) + \varepsilon_2 \cdot \alpha] \cdot (b+a)$$

luego

$$\boxed{C = L \cdot [\varepsilon_1 \cdot (\pi - \alpha) + \varepsilon_2 \cdot \alpha] \cdot (b+a)}$$

c) Para la resistencia podemos escribir:

$$R = \frac{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint g \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{\Delta V}{\int \vec{J} \cdot d\vec{s}} \quad \text{con } \Delta V = V_0$$

Para el medio uno:

$$R_1 = \frac{V_0}{\int \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{V_0}{g_1 V_0 \cdot L \cdot (\pi - \alpha) \cdot (b+a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{1}{-g_1 \cdot L \cdot (\pi - \alpha) \cdot (b-a)}}$$

Para el medio dos:

$$R_2 = \frac{V_0}{\int \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{V_0}{g_2 V_0 \cdot L \cdot \alpha \cdot (b+a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{1}{g_2 \cdot L \cdot (\pi - \alpha) \cdot (b+a)}}$$

PROBLEMA 2

Un cable coaxial de sección circular $c+h$ tiene un dieléctrico compuesto entre sus dos conductores. El conductor interior tiene un radio exterior a y está rodeado por una cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_1 y de radio exterior b . A continuación hay otra cubierta de dieléctrico de constante dieléctrica ϵ_2 y de radio exterior c . Si se establece una diferencia de potencial V_0 entre los conductores, calcule el vector de polarización y las densidades de carga inducidas en los dos medios dieléctricos.

Solución:

Llamemos σ_1 a la densidad de carga superficial del cilindro de radio exterior a y σ_2 a la del conductor de radio interior c .

Primero calculamos el campo eléctrico en función de la densidad de carga σ_1 debiendo separar el cálculo para los diferentes dieléctricos.

Para $a < r < b$:

$$\oiint D_1 dS = Q$$

$$D_1 2\pi r L = 2\pi a L \sigma_1$$

$$D_1 = \frac{a\sigma_1}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{a\sigma_1}{r} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{a\sigma_1}{\epsilon_1 r} \hat{r}$$

Para $b < r < c$:

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{a\sigma_1}{\epsilon_2 r} \hat{r}$$

Ahora busquemos el valor de σ_1

$$\Delta V = -\int E dl$$

$$\Rightarrow V(a) - V(c) = -\int_b^a E_1 dr - \int_c^b E_2 dr$$

$$V_0 = -\int_b^a E_1 dr - \int_c^b E_2 dr$$

$$V_0 = -\left[\int_b^a \frac{a\sigma_1}{\epsilon_1 r} dr + \int_c^b \frac{a\sigma_1}{\epsilon_2 r} dr \right]$$

$$V_0 = -a\sigma_1 \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \int \frac{a}{b} \frac{1}{r} dr + \frac{1}{\varepsilon_2} \int \frac{b}{c} \frac{1}{r} dr \right]$$

$$V_0 = -a\sigma_1 \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{b}{c}\right) \right]$$

$$V_0 = a\sigma_1 \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{V_0}{a \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]}$$

Ya que conocemos el valor de σ_1 , calculemos el vector de polarización y densidades que carga inducidas.

$$\vec{P}_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \vec{E}_i$$

$$\rho_i = -\nabla P_i = -\frac{1}{r} \left(\frac{\delta(rP_i)}{\delta r} \right) = 0 \quad \text{para } i=1,2$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) \hat{n}$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) = (\varepsilon_i - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{R\varepsilon_i} \quad \text{para radio exterior}$$

$$\sigma_{P_i} = P_i(R) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_i) \frac{a\sigma_1}{R\varepsilon_i} \quad \text{para radio interior}$$

Para $a < r < b$:

$$\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{E}_1$$

$$\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1}{r\varepsilon_1} \hat{r}$$

$$\rho_1 = 0$$

$$\sigma_{P_1} = P_1(a) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

$$\sigma_{P_1} = P_1(b) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_1}$$

Para $b < r < c$:

$$\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \vec{E}_2$$

$$\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{a\sigma_1 \hat{r}}{r\varepsilon_2}$$

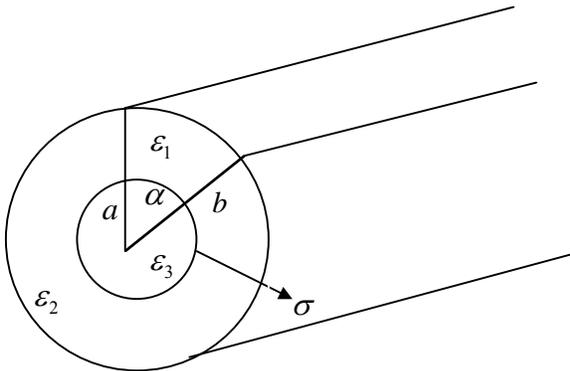
$$\rho_2 = 0$$

$$\sigma_{P_2} = P_2(a) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_2}$$

$$\sigma_{P_2} = P_2(b) = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) \frac{a\sigma_1}{b\varepsilon_2}$$

PROBLEMA 3

Se tiene un cilindro muy largo de radio b , el que es relleno con tres materiales dieléctricos como se indica en la figura. Sobre la superficie del cilindro interior se distribuye una densidad de carga σ . Calcule la relación entre ε_1 y ε_2 de manera que la carga neta en la frontera entre el dieléctrico 1 y 3 sea nula.



$$1) r < a$$

$$\int \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D} = 0, \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P} = 0$$

$$2) a < r < b$$

$$\int \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow D_1 \cdot \alpha \cdot r \cdot h + D_2 \cdot (2\pi - \alpha) \cdot h \cdot r = \sigma \cdot 2\pi \cdot a \cdot h$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \cdot E_1 \cdot \alpha \cdot r + \varepsilon_2 \cdot E_2 \cdot (2\pi - \alpha) \cdot r = \sigma \cdot 2\pi \cdot a$$

Condiciones de borde

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 \cdot \hat{t} &= \vec{E}_2 \cdot \hat{t} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E} \\
\Rightarrow \varepsilon_1 \cdot E \cdot \alpha \cdot r + \varepsilon_2 \cdot E \cdot (2\pi - \alpha) \cdot r &= \sigma \cdot 2\pi \cdot a \\
\Rightarrow \vec{E} &= \frac{2\pi \cdot a \cdot \sigma}{(\varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) + \varepsilon_1 \cdot \alpha) \cdot r} \cdot \hat{r} \\
\Rightarrow \vec{P}_1 &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cdot 2\pi \cdot a \cdot \sigma}{(\varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) + \varepsilon_1 \cdot \alpha) \cdot r} \cdot \hat{r} \\
\vec{P}_2 &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \cdot 2\pi \cdot a \cdot \sigma}{(\varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) + \varepsilon_1 \cdot \alpha) \cdot r} \cdot \hat{r}
\end{aligned}$$

Queremos que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} &= \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_{(r=a)} + \sigma = 0 \\
\Rightarrow \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_{(r=a)} &= -\sigma \\
\Rightarrow -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cdot 2\pi \cdot a \cdot \sigma}{(\varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) + \varepsilon_1 \cdot \alpha) \cdot a} &= -\sigma \\
\Rightarrow \varepsilon_1 \cdot 2\pi - \varepsilon_0 \cdot 2\pi &= \varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) \cdot \varepsilon_1 \\
\Rightarrow \varepsilon_1 \cdot (2\pi - \alpha) &= \varepsilon_2 \cdot (2\pi - \alpha) + \varepsilon_0 \cdot 2\pi \\
\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_0 \cdot \frac{2\pi}{2\pi - \alpha}}
\end{aligned}$$

3.6 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1

Se coloca un dieléctrico en el volumen comprendido entre dos esferas de radios a y b . La esfera interior posee densidad de carga libre superficial σ_l . Calcular $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \sigma_p, \rho_p$ en todo el espacio.

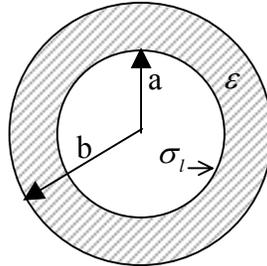
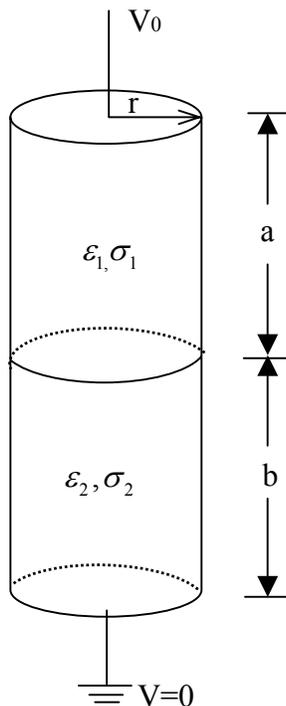


Figura PP.3.1

PROBLEMA 2

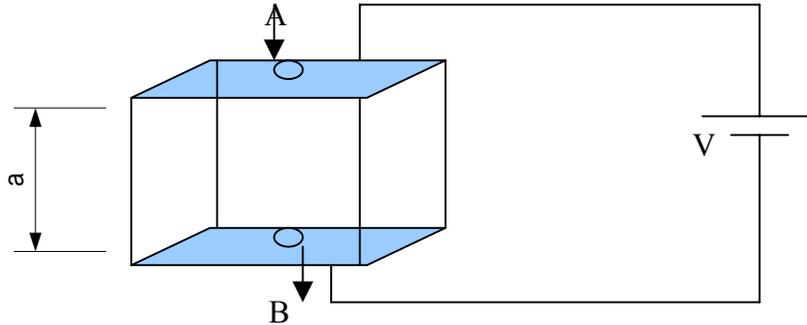
Considere un condensador conformado por dos dieléctricos con pérdidas entre dos placas paralelas circulares a las cuales se le aplica una diferencia de potencial V_0 . Para este sistema se pide determinar:

- La densidad de carga libre en la interfaz dieléctrica.
- Las densidades de carga de polarización superficial y volumétrica.
- La carga total inducida en los electrodos.



PROBLEMA 3

Considere un grupo hueco de material plástico (aislante) de lado a , el cual tiene dos orificios A y B por los cuales puede entrar y salir líquido dieléctrico, respectivamente. Las características del material dieléctrico son permitividad ϵ y densidad de masa ρ_m . Las caras superior e inferior se forran con material conductor, como se indica en la figura (los orificios se mantienen).

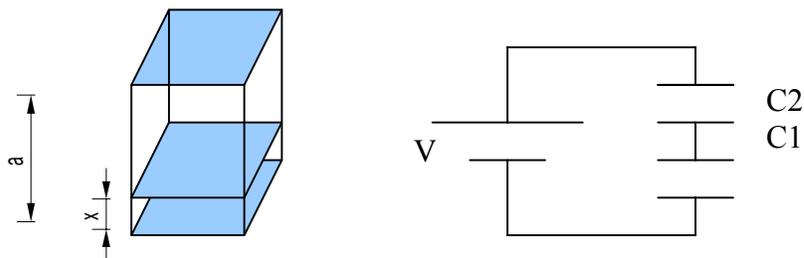


- Determinar la diferencia de potencial mínima que se debe aplicar entre los conductores para mantener el cubo lleno con líquido dieléctrico.
- Determinar para dicho potencial la densidad de carga de polarización.

Sugerencia: Considere primero el cubo parcialmente lleno de líquido hasta una altura x (medida desde el fondo) y calcule la diferencia de potencial mínima necesaria para evitar que el líquido se escurra por el orificio inferior.

Solución:

- Al tener el cubo parcialmente lleno podemos considerar el sistema de condensadores en serie equivalente:



En el cual calculamos la capacidad equivalente:

$$C_1 = \frac{\epsilon a^2}{x}; \quad C_2 = \frac{\epsilon a^2}{(a-x)}$$

$$\rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 a^2}{\epsilon(a-x) + \epsilon_0 x}$$

Si consideramos la constante dieléctrica k :

$$k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 k a^2}{ka - (k-1)x}$$

Calculamos la energía del sistema:

$$W = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{V^2 \epsilon_0 k a^2}{2(ka - (k-1)x)}$$

La fuerza que actúa en la cara inferior del cubo:

$$\vec{F} = \frac{dW}{dx} \hat{i} \rightarrow F = \frac{V^2 \epsilon_0 a^2 k (k-1)}{2(ka - (k-1)x)^2}$$

Condición del problema (g: aceleración de gravedad): $F \geq a^2 x \rho_m g$

Reemplazando y considerando $x = a$ (cubo lleno):

$$\frac{V^2}{2} \epsilon_0 k (k-1) \geq a^3 \rho_m g \Rightarrow V \geq \sqrt{\frac{2a^3 \rho_m g}{\epsilon_0 k (k-1)}}$$

b)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} ; \chi = k-1 ; \vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_p$$

$$\Rightarrow \sigma_p = P = \frac{\epsilon_0 (k-1)}{a} \sqrt{\frac{2a^3 \rho_m g}{\epsilon_0 k (k-1)}} \rightarrow \sigma_p = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a^3 \rho_m g \epsilon_0 (k-1)}{k}}$$

CAPITULO 4. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

4.1 Definición

La energía electrostática de un sistema de partículas es igual al trabajo necesario para formar dicho sistema $\Rightarrow W=U$. (4.1)

Comencemos estudiando el trabajo necesario para formar un sistema de tres partículas en posiciones P1, P2 y P3 según se muestra en la Figura 79.

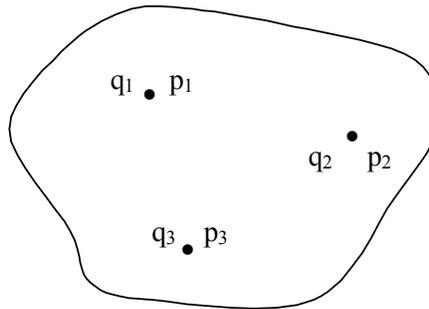


Figura 79. Energía sistema de partículas.

Para formar dicho sistema supondremos que traemos una por una las cargas desde el infinito. Para traer la primera carga no es necesario efectuar trabajo ya que no existe una fuerza que se oponga al movimiento. Para traer la segunda carga se debe hacer el trabajo

$$W_2 = q_2 V_{21}$$

donde V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P2.

Para traer la tercera carga se debe hacer el trabajo

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

aquí V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P3.

El trabajo total para formar este sistema es:

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} \quad (4.2)$$

Si ahora cambiamos el orden en el cual formamos este sistema (el trabajo debe ser el mismo), digamos que primero traemos la carga q_3 , luego la q_2 y finalmente la q_1 se tiene:

$$W = 0 + q_2 V_{23} + q_1 V_{13} + q_1 V_{12} \quad (4.3)$$

sumando (4.2) y (4.3)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2W &= q_1 \underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{\text{potencial en 1}} + q_2 \underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{\text{potencial en 2}} + q_3 \underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{\text{potencial en 3}} \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} q_1 V(P_1) + \frac{1}{2} q_2 V(P_2) + \frac{1}{2} q_3 V(P_3) \quad (4.4) \end{aligned}$$

Así, la energía total de este sistema es la mitad de la suma del producto de cada carga por el potencial producido por el resto de las cargas en ese punto.

Procediendo en forma análoga, para un sistema de n cargas se tiene:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k \quad (4.5) \quad \text{en [J] joules}$$

Por extensión, para distribuciones continuas de carga se tiene $\Sigma \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) dq \quad (4.6)$$

y para una distribución específica de carga tendremos:

$$W = \frac{1}{2} \int \lambda(\vec{r}) V(\vec{r}) dr \quad (4.7) \quad \text{para distribuciones lineales}$$

$$W = \frac{1}{2} \iint \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) dS \quad (4.8) \quad \text{para distribuciones superficiales}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV \quad (4.9) \quad \text{para distribuciones en volumen}$$

4.2 Energía de un Sistema de Conductores

Consideremos un sistema de conductores con cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n según se muestra en la Figura 80.

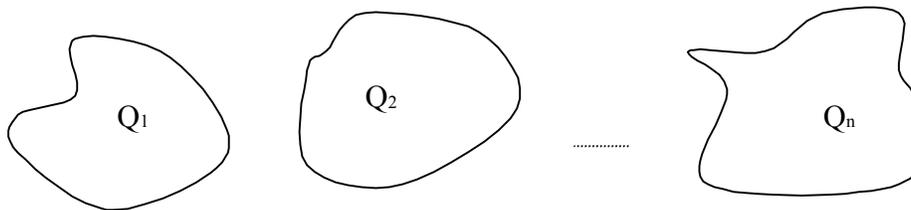


Figura 80. Energía sistema de conductores.

En este caso toda la carga se distribuye en la superficie de los conductores, por lo que solo habrá σ . Así la expresión de la energía electrostática será:

$$(4.10)$$

pero el voltaje en la superficie de los conductores es constante, luego

$$W = \frac{1}{2} V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r}) dS}_{Q_1} + \frac{1}{2} V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r}) dS}_{Q_2} + \dots + \frac{1}{2} V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r}) dS}_{Q_n}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i,$$

donde V_i es el potencial del condensador i -ésimo y Q_i su carga total.

Caso condensadores

Aquí solo intervienen dos conductores, según se muestra en la Figura 81.



Figura 81. Energía de condensadores.

Por lo tanto,

$$W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)$$

pero $Q_2 = -Q_1 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q_1$ y como $Q = C\Delta V$, las expresiones quedan finalmente

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.11) \quad \text{ó} \quad W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (4.12)$$

4.3 Fuerza Eléctrica y Energía

Un aplicación importante de la energía es el cálculo de fuerzas. En efecto, teníamos que la expresión del trabajo entre dos puntos a y b es

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (4.13)$$

De esta expresión fluye que

$$\vec{F} = \nabla W \quad (4.14)$$

La fuerza es el gradiente del trabajo. En términos de la energía, decimos que la fuerza es producida por una variación de la energía almacenada en el sistema.

Para el caso en que la configuración tiene un grado de libertad, por ejemplo según x , la expresión de la fuerza puede obtenerse de

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x} \hat{x}$$

En muchas aplicaciones esta forma de calcular la fuerza puede ser más fácil de obtener que mediante el cálculo directo con campos.

EJEMPLO.

Consideremos un condensador de placas planas de área A , en el cual una de las placas puede moverse libremente en el sentido horizontal, tal como se muestra en la Figura 82.

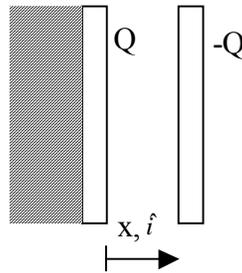


Figura 82. Energía y fuerza eléctrica.

Si inicialmente se cargan las placas con Q y $-Q$ respectivamente, se pide calcular la fuerza entre las placas.

Solución:

La expresión para calcular la energía es $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, ya que el movimiento se realiza con carga constante (carga neta no se modifica en el movimiento). La capacidad, según habíamos calculado anteriormente, es $C = \epsilon \frac{A}{d}$, pero ahora la distancia entre las placas es variable, por ello,

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x}$$

Luego la expresión de la energía queda,

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} x$$

Con ello la fuerza que experimenta la placa móvil es

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} \hat{x}$$

Resultado que es congruente con el campo constante entre las placas. Esta relación es ampliamente usada en transductores de presión, voltímetros, micrófonos, etc.

Comentario. Si ahora en vez de imponer que la carga se mantenga constante, imponemos que la tensión entre las placas se mantenga constante; por ejemplo mediante una batería; se tendría la situación de la Figura 83.

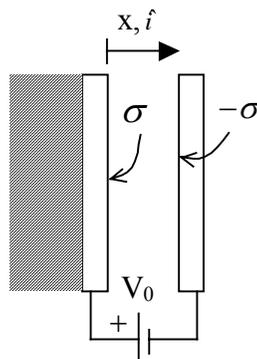


Figura 83. Energía con baterías.

Aquí se cumple

$$V_1 - V_2 = -\int_0^x \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = -\int_0^x \left(-\frac{\sigma}{\epsilon} \right) \hat{i}(dx) \hat{i} = \frac{\sigma}{\epsilon} x \Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} x$$

Y dado que V_0 se mantiene constante, a medida que se desplaza la placa (x varía) la densidad de carga σ debe modificarse. Este cambio lo realiza la batería que mantiene constante la diferencia de potencial entre las placas. Posteriormente abordaremos el trabajo que realiza este tipo de fuentes de voltaje, pero por ahora conviene puntualizar que este efecto no está incorporado en las ecuaciones de energía deducidas anteriormente.

4.4 Energía en términos de Campos

Consideremos el caso de una distribución volumétrica de carga ρ en un volumen Ω , cuya energía es

$$W = U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv \quad (4.15)$$

pero $\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$, luego podemos escribir

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv \quad (4.16)$$

Dado que $\rho(\vec{r})$ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω , el espacio de integración puede ampliarse a un espacio mucho mayor, por ejemplo una esfera Σ de radio R que contenga al volumen Ω , según se muestra en la Figura 84.

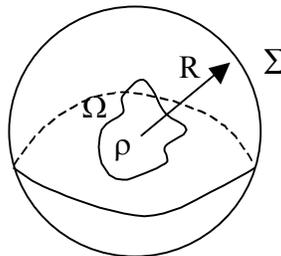


Figura 84. Energía en función de campos.

Podemos escribir entonces
$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$

Usemos ahora la propiedad $\nabla \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$, con ello

$\nabla \cdot [V\vec{D}] = \vec{D} \cdot \nabla V + V(\nabla \cdot \vec{D}) \Rightarrow (\nabla \cdot \vec{D})V = \nabla \cdot [V\vec{D}] - \vec{D} \cdot \nabla V$, y aplicándolo al integrando podemos escribir

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \nabla \cdot [V\vec{D}] dv - \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (4.17)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer termino tenemos

$$U = \frac{1}{2} \iint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (4.18)$$

sabemos que $V \propto \frac{1}{r}$ y $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V\vec{D} \propto \frac{1}{r^3}$. Por otro lado $d\vec{s} \propto r^2 \Rightarrow V\vec{D} \cdot d\vec{s} \propto \frac{1}{r}$, por lo

tanto si $R \rightarrow \infty$ se tiene que $\iint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

y aplicando $\nabla V = -\vec{E}$ obtenemos finalmente la expresión para la energía en función de los campos como

$$\therefore U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} dv \quad (4.19)$$

Al término $W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ (4.20) se le conoce como densidad de energía electrostática [J/m³].

EJEMPLO 19.

Para la configuración esférica de la Figura 85 se pide calcular la energía electrostática. Suponga $\rho = \rho_0$ constante.

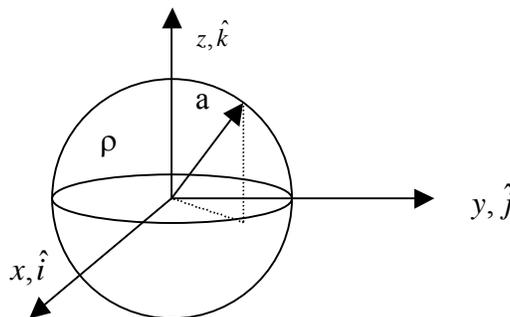


Figura 85. Energía esfera uniformemente cargada.

Solución:

Calculemos primero los campos para $0 < r < a$. Aplicando la Ley de Gauss a una esfera de radio $r < a$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$D4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} r \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r}$$

Usando el mismo procedimiento para $r > a$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$D4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} \frac{a^3}{r^2} \hat{r} ; \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Luego la energía electrostática del sistema es

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \iiint_{esfera} \vec{D} \cdot \vec{E} dV + \frac{1}{2} \iiint_{resto} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

Dentro de la esfera:

$$\frac{1}{2} \iiint_{esfera} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho_0}{3} r \hat{r} \right) \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$\frac{1}{2} \iiint_{esfera} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{9\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 2\pi \sin \theta d\theta dr$$

$$= \frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0} 4\pi \frac{r^5}{5} \Big|_0^a = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} [J]$$

Fuera de la esfera:

$$\frac{1}{2} \iiint_{fuera} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \iiint \frac{\rho_0}{3} \frac{a^3}{r^2} \times \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \times r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$= \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0} \times 4\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_0^2 a^6}{18\epsilon_0} \times 4\pi \left[-\frac{1}{r} \right]_a^\infty$$

$$= \frac{2\rho_0^2 a^6 \pi}{9\epsilon_0 a} = \frac{2\rho_0^2 a^5 \pi}{9\epsilon_0} [J]$$

Luego la energía es

$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} = \frac{12\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} [J] = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\epsilon_0} [J]$$

Otro camino.

Se calcula el potencial $\Rightarrow V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & r \leq R \end{cases}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

Pero el espacio donde hay densidad de carga es sólo la esfera de radio R, luego

$$U = \frac{\rho_0^2}{12\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (3R^2 - r^2) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$\Rightarrow U = \frac{\rho_0^2}{12\epsilon_0} \times 4\pi \times \left[R^2 r^3 - \frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$U = \frac{\rho_0^2}{3\epsilon_0} \pi \left[R^5 - \frac{R^5}{5} \right] = \frac{\rho_0^2 \pi R^5}{15\epsilon_0} [J]$$

resultado idéntico al anterior.

4.5 Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

La molécula de agua tiene un momento dipolar de $6.3 \cdot 10^{-30}$ Cm. Una muestra contiene 10^{21} moléculas, cuyos momentos dipolares están todos orientados en la dirección del campo eléctrico de $2.5 \cdot 10^5$ N/C ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar los dipolos desde esta orientación (de $=0^\circ$) a una en la cual todos los momentos sean perpendiculares al campo ($=90^\circ$)?

Solución:

$$\vec{p} = 6.3 \cdot 10^{-30} \hat{r} [cm] = 6.3 \cdot 10^{-32} \hat{r} [m]$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\tau = p \cdot q \|\vec{E}\| \sin \theta$$

Trabajo para una molécula

$$dW_i = \tau d\theta$$

$$W_i = U_\theta - U_{\theta_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} pqE \sin \theta d\theta = pqE (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Los que buscamos en una rotación de 90° , por lo que nos fijamos $\theta_0 = 90^\circ$ y $\theta = 0$

$$\Rightarrow W_i = pqE (\cos 0^\circ - \cos 90^\circ) = qE(1 - 0)$$

$$\Rightarrow W_i = pqE$$

Como la muestra contiene 10^{21} moléculas, el trabajo total será la suma de todos los trabajos

$$\Rightarrow W = 10^{21} pqE$$

Solo nos queda reemplazar los valores de q, p y E, en que q corresponde a la carga del electrón ($1.6 \cdot 10^{-19}$ C), p la magnitud del momento dipolar ($6.3 \cdot 10^{-30} \hat{r} [cm]$ según el enunciado) y E es el módulo del campo eléctrico cuyo valor nos entrega el enunciado que

$$\text{corresponde a } 2.5 \cdot 10^5 \frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow W = 2.52 \cdot 10^{25} [Nm]$$

$$\Rightarrow W = 2.52 \cdot 10^{25} [J]$$

PROBLEMA 2

Una esfera de radio R y de material no polarizable ($\epsilon = 1$) está cargada con una densidad de carga uniforme, de tal modo que su carga total es q. Calcule la energía del sistema.

Solución:

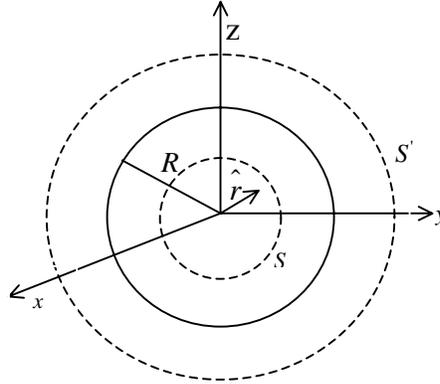


Figura P.4.2.1

Sea la esfera de centro 0 y radio R; aplicando el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio r, se obtiene:

$$\iiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad (\text{para } r \leq R)$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{4}{3} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^3 \quad (\text{pues } E \text{ es solo función de } r \text{ y es radial})$$

$$\text{pero } \rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3q}{4\pi \cdot R^3}$$

$$\text{luego } \vec{E} = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \cdot \hat{r} = \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cdot q \cdot r}{4\pi \cdot R^3} \cdot \hat{r} = \frac{q \cdot r}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3} \cdot \hat{r} \quad (r \leq R)$$

para $r \geq R$:

$$\iiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$4\pi \cdot r^2 \cdot E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{luego: } \vec{E} = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \hat{r}$$

La energía del sistema será:

$$W = \iiint_{\tau} \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \cdot d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\epsilon_0 \cdot \vec{E}^2}{2} \cdot d\tau$$

en que τ es toda la región en que existe campo eléctrico, (todo el espacio).

Sea W_1 la energía de la región $r \leq R$, y W_2 la de la región $r \geq R$, se cumple que:

$$W = W_1 + W_2$$

Calculamos W_1 y W_2 :

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \iiint_{r \leq R} E^2 \cdot d\tau$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \left(\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3} \cdot r \right)^2 \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3} \right)^2 \cdot \iiint r^4 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3} \right)^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$W_1 = \frac{q^2}{40\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \iiint_{r \geq R} E^2 \cdot d\tau$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \right)^2 \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \right)^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{R}$$

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

Finalmente:

$$W = \frac{q^2}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \cdot \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3 \cdot q^2}{20\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

4.6 Problemas Propuestos

PROBLEMA 1

Se tiene un cable coaxial formado por 2 cilindros metálicos concéntricos, de longitud (d_1+d_2) y radios a y b . El espacio entre ambos conductores se llena con dos medios dieléctricos no ideales, caracterizados por constantes dieléctricas y conductividades (ϵ_1, σ_1) en una zona de largo d_1 y (ϵ_2, σ_2) en una zona de largo d_2 respectivamente.

Si se mantiene una diferencia de potencial V constante entre los cilindros conductores, calcular

- La densidad de corriente en el espacio entre los conductores ($a < r < b$).
- La resistencia y la capacidad del cable coaxial.
- La energía almacenada y la potencia disipada en el cable.

Indicación: Considere que $(d_1+d_2) \gg a, b$ lo que permite suponer simetría radial. Desprecie las corrientes que circulan por los conductores.

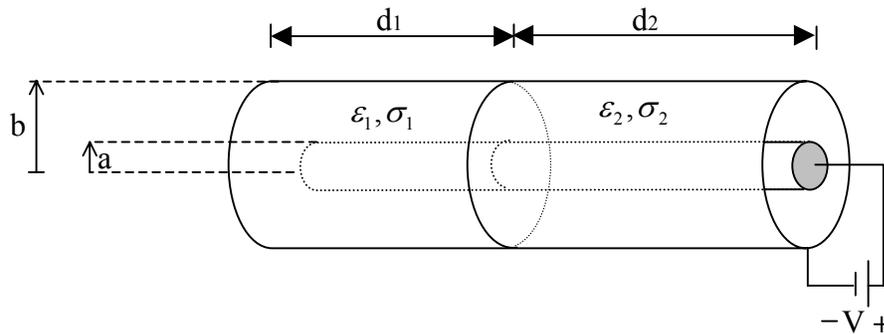


Figura PP.4.1.1

PROBLEMA 2

Encuentre la cantidad de energía almacenada en el campo eléctrico producido por una esfera que mide 3m de radio y que tiene una densidad uniforme de carga $\rho_s = 2 \cdot 10^{-8} \left[\frac{C}{m^2} \right]$ si se supone que la esfera está en el vacío ($\epsilon = \epsilon_0$).