



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 23

Campos Variables en el Tiempo-III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



INDICE

- Energía Electromagnética
- Fuerza



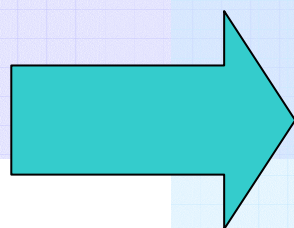
Energía Electromagnética

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \vec{H}.$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \vec{E}.$$



$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sumando

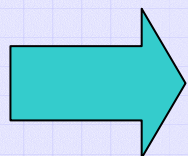
$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$



Energía Electromagnética

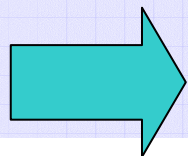
$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Usando la propiedad $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} - (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E}$



$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \right\}$$



$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right) - \mu \vec{H} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$



Energía Electromagnética

$$\Rightarrow -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Tomando la integral sobre un volumen Ω muy grande

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = -\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv - \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$



Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv = - \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv}_{\substack{\propto \frac{1}{r} \quad \propto \frac{1}{r^2} \\ \propto \frac{1}{r^2} \quad \propto r^2}} - \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

$$\propto \frac{1}{r^3} \quad \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} (\iiint_{\Omega} \dots) = 0$$



Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\nu + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\nu = 0$$

Energía del campo
electromagnético

Potencia consumida
por efecto Joule

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\nu$$

$$P_{Joule} = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\nu$$

Energía del
campo eléctrico

Energía del
campo magnético



Energía Electromagnética

Si no hay pérdidas Joule $P_{Joule} = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\nu = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\nu = 0$$

$$\therefore U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) d\nu = Cte.$$

En ausencia de pérdidas Joule la energía electromagnética se conserva



Energía Electromagnética

Si no hay campos magnéticos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) dv$$

Si no hay campos eléctricos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$

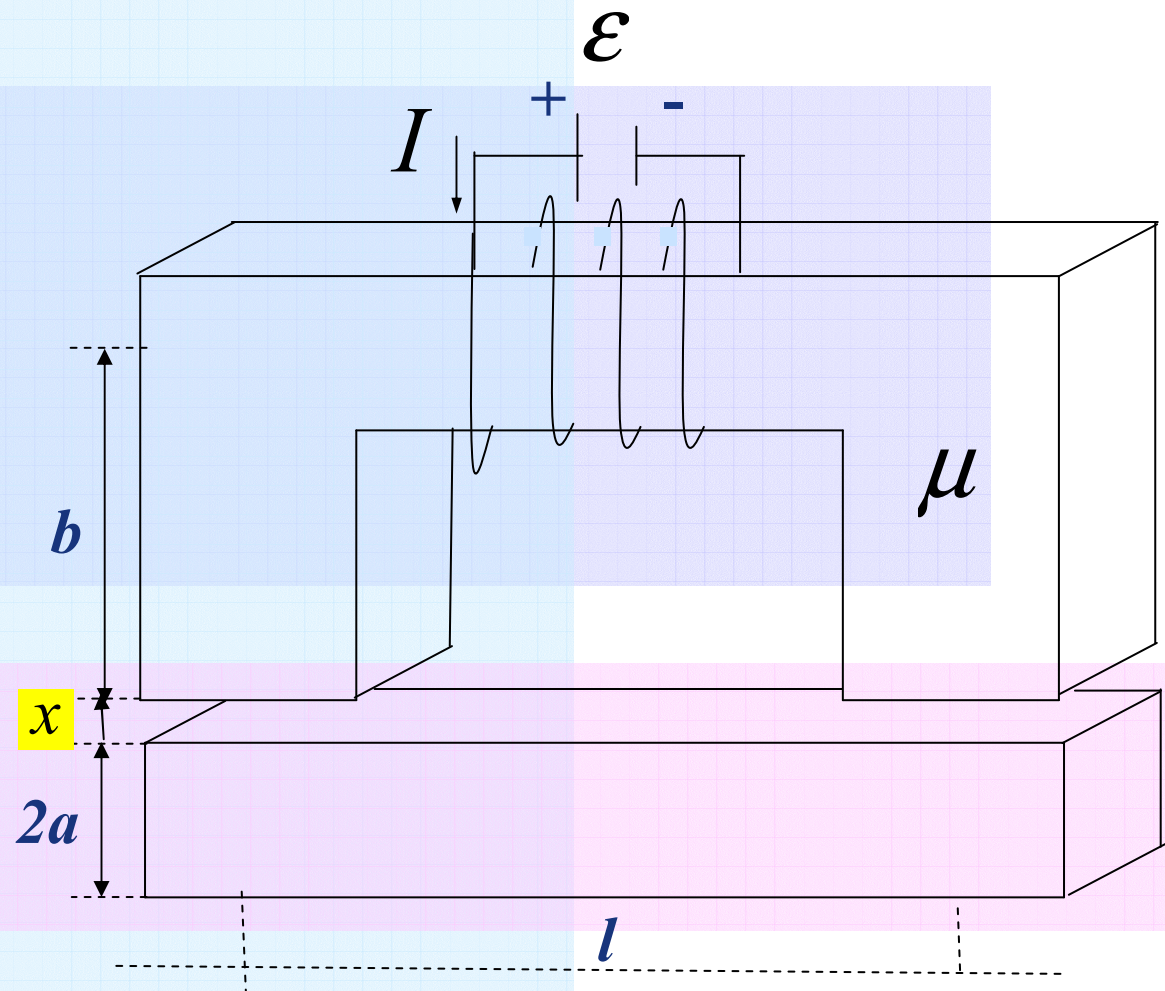


Energía Electromagnética

Ejemplo 1

Calcular la energía para el sistema compuesto de un material ferromagnético de sección cuadrada S .
Aproximar para el caso

$$\mu \gg \mu_0$$





Energía Electromagnética

La energía es

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$

Tomando la Ley
Circuital de Ampere
en el camino medio

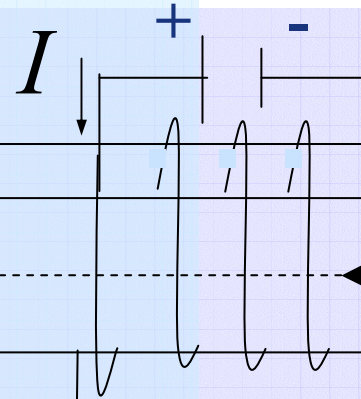
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total}$$

$$I_{total} = -NI$$

x, \hat{i}

$2a$

ϵ



μ

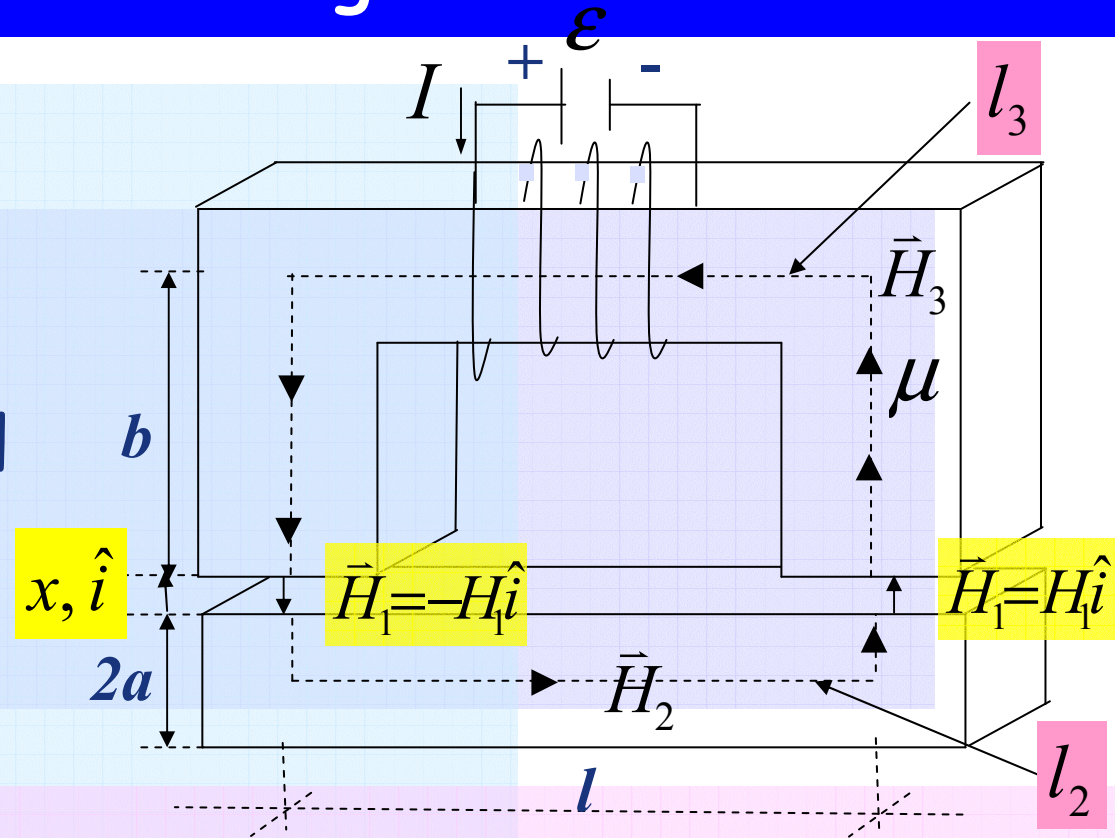
l



Energía Electromagnética

Supondremos:

- B y H constantes en cada medio
- B y H son rectilíneos y paralelos al material (se desprecian efectos de borde)

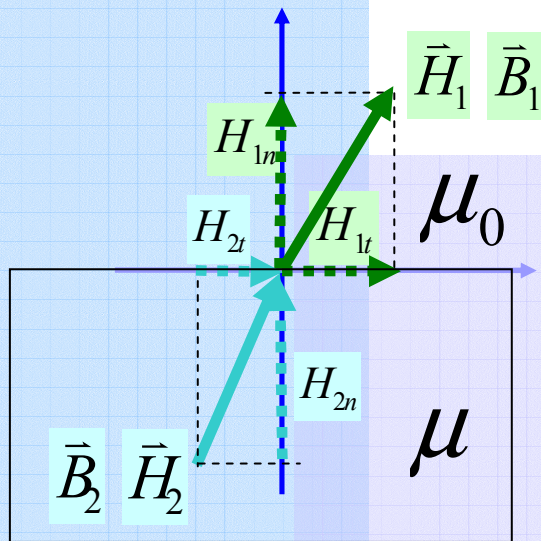


$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{H}_1 \cdot dx \hat{i} + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l} + \int (-H_1) \cdot dx (-\hat{i}) + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 x + H_3 l_3 + H_1 x + H_2 l_2$$



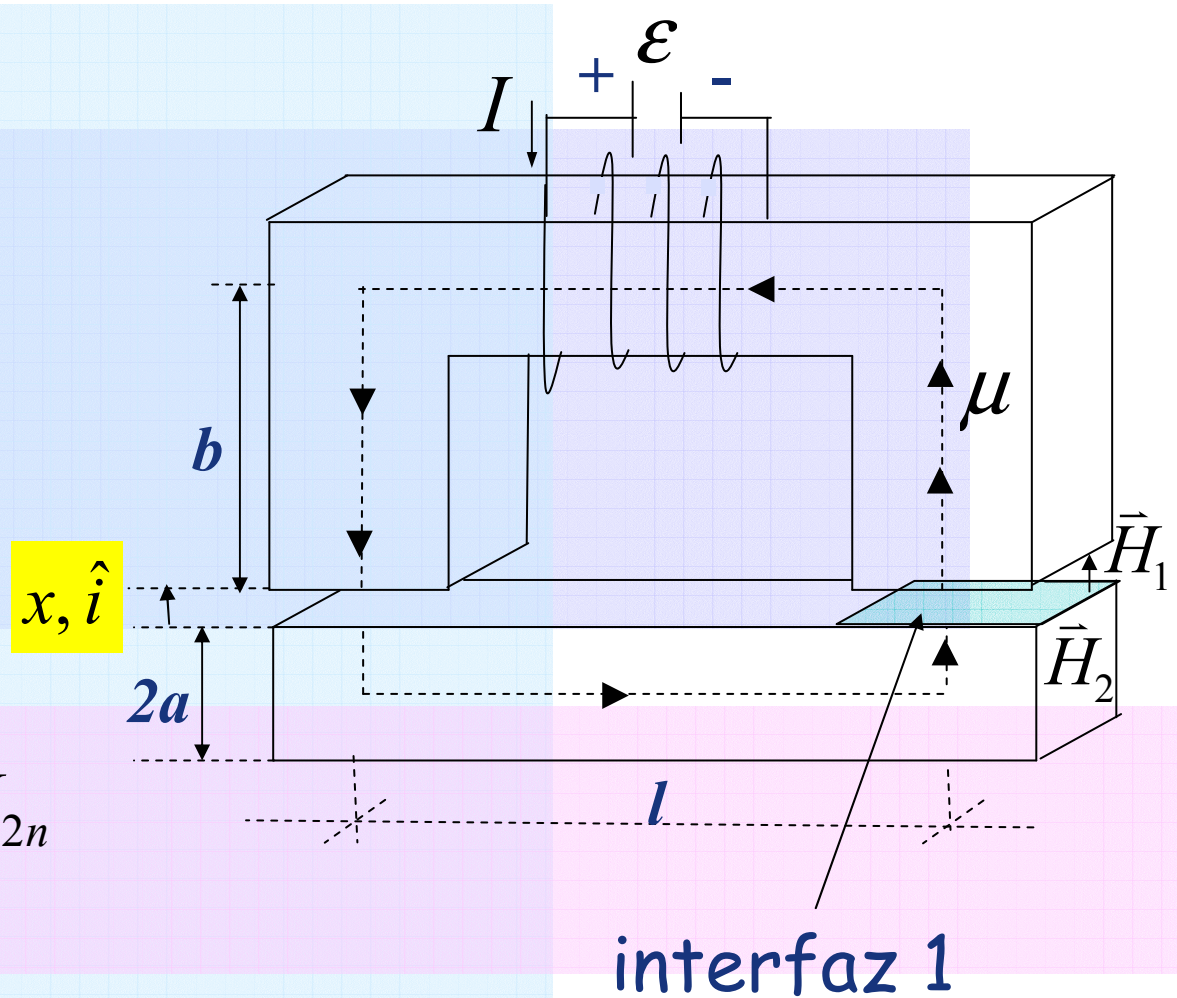
Energía Electromagnética



En la interfaz 1

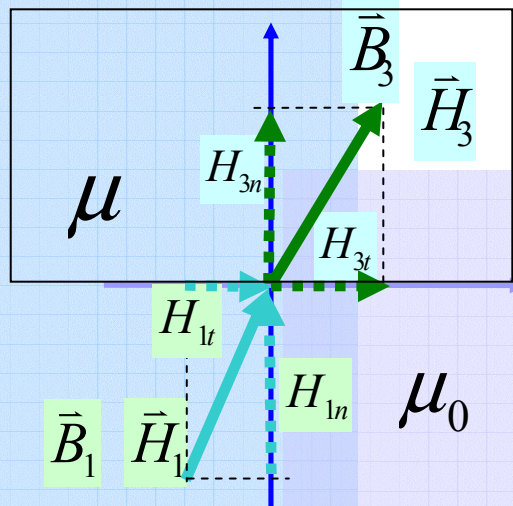
$$B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow \mu_0 H_{1n} = \mu H_{2n}$$

$$\therefore \mu_0 H_1 = \mu H_2$$





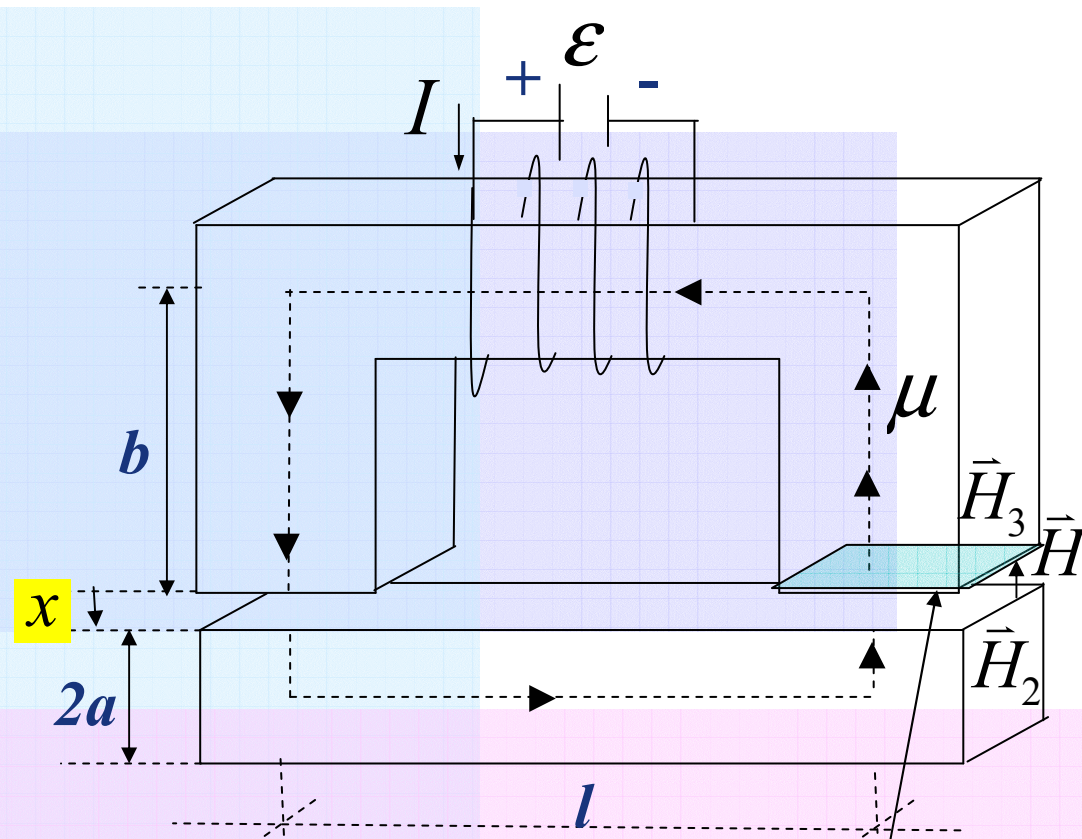
Energía Electromagnética



En la interfaz 2
se cumple

$$B_{1n} = B_{3n} \Leftrightarrow \mu_0 H_{1n} = \mu H_{3n}$$

$$\therefore \mu_0 H_1 = \mu H_3 \Rightarrow \vec{H}_2 = \vec{H}_3$$





Energía Electromagnética

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 x + H_3 l_3 + H_1 x + H_2 l_2$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2H_1 x + H_2(l_2 + l_3)$$

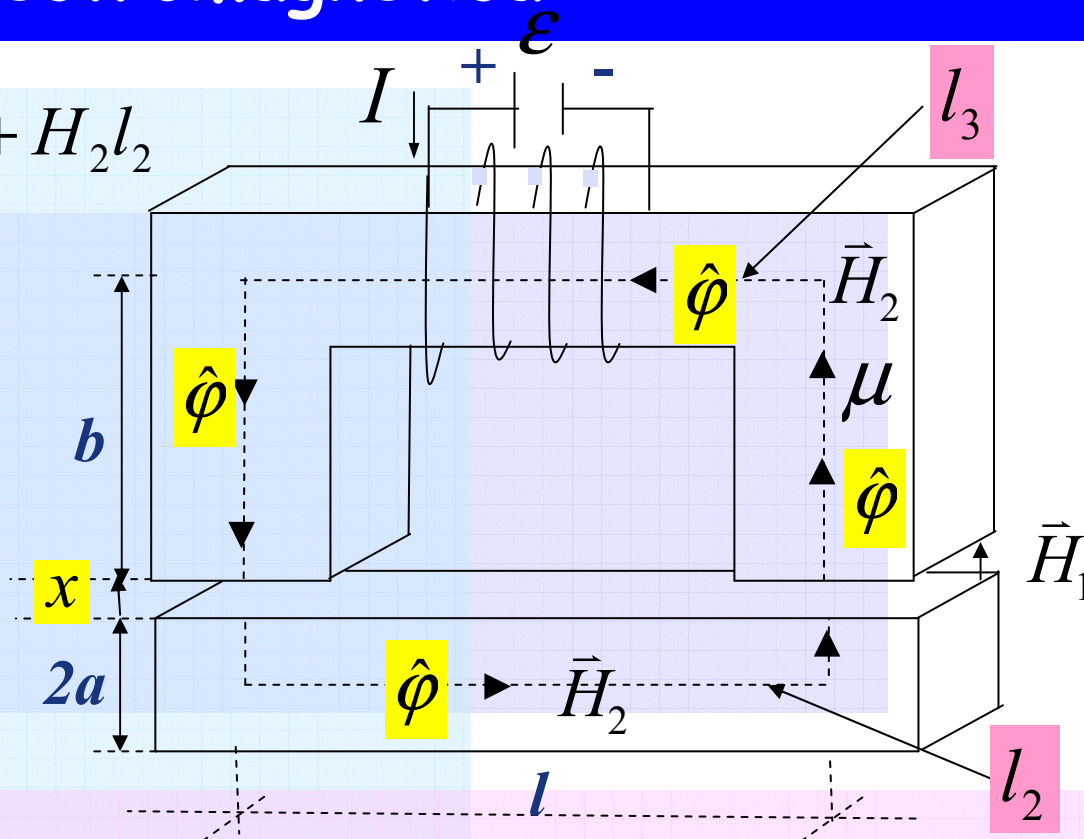
Reemplazando en la ley
circuital de Ampere

$$2H_1 x + H_2(l_2 + l_3) = -NI$$

Teniamos $\mu_0 H_1 = \mu H_2$

$$\vec{H}_1 = -\frac{\mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{\mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$





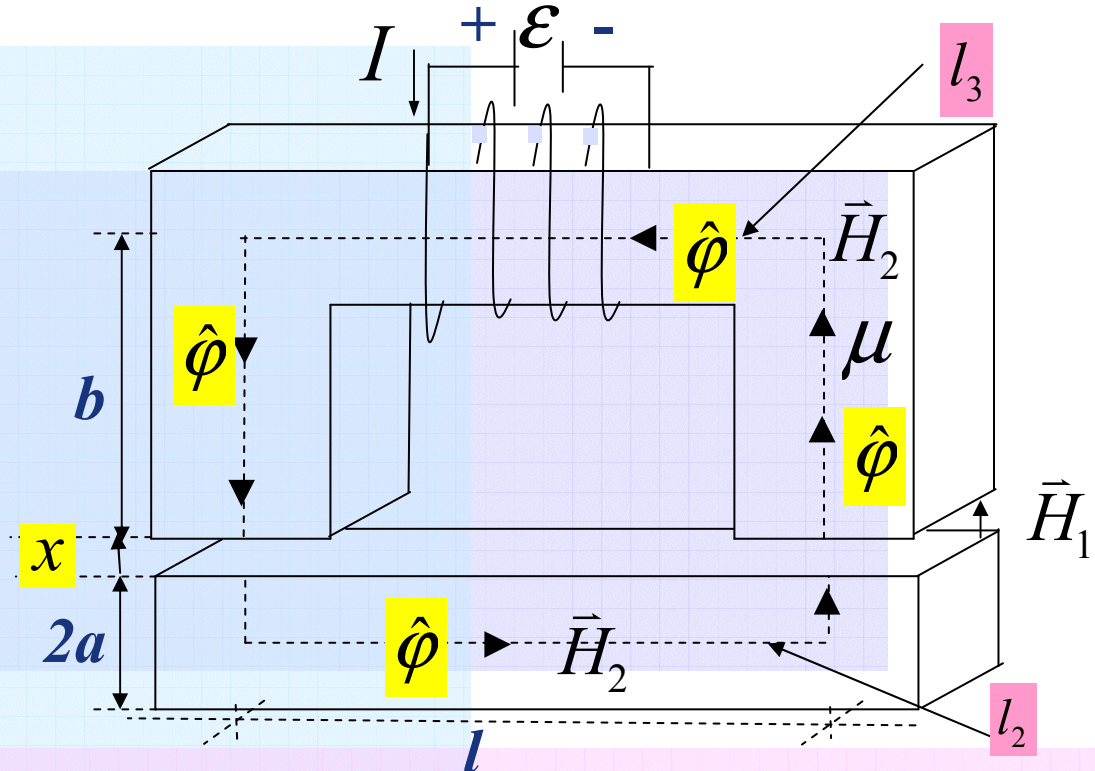
Energía Electromagnética

$$\vec{H}_1 = -\frac{\mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 \mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{\mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu \mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{\phi}$$



$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv \Rightarrow U = \frac{1}{2} H_1 B_1 Vol_1 + \frac{1}{2} H_2 B_2 Vol_2$$

$$Vol_1 = 2xS$$

$$Vol_2 = S(l_2 + l_3)$$

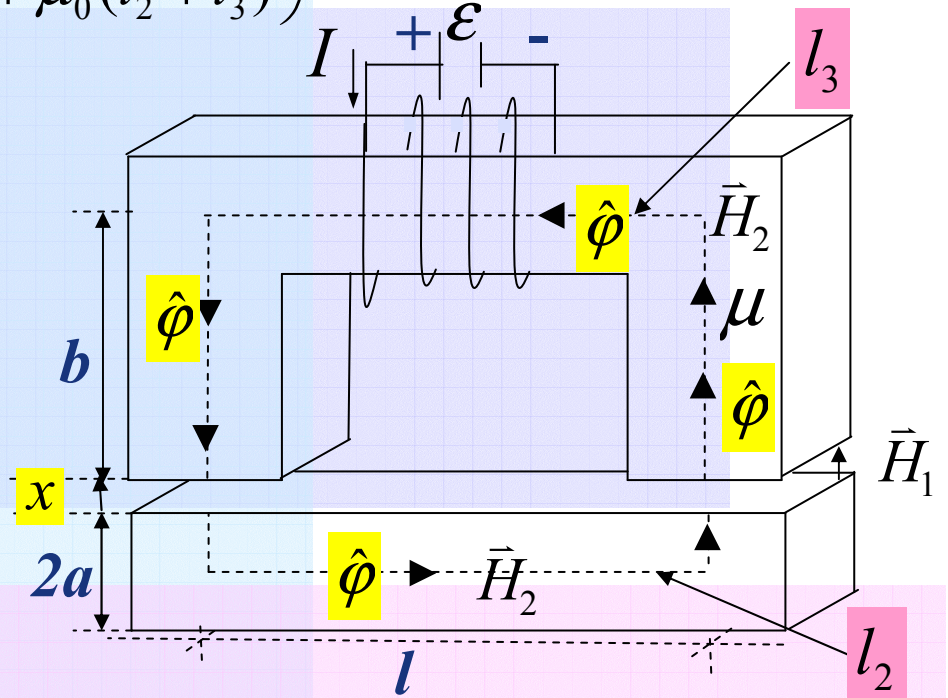
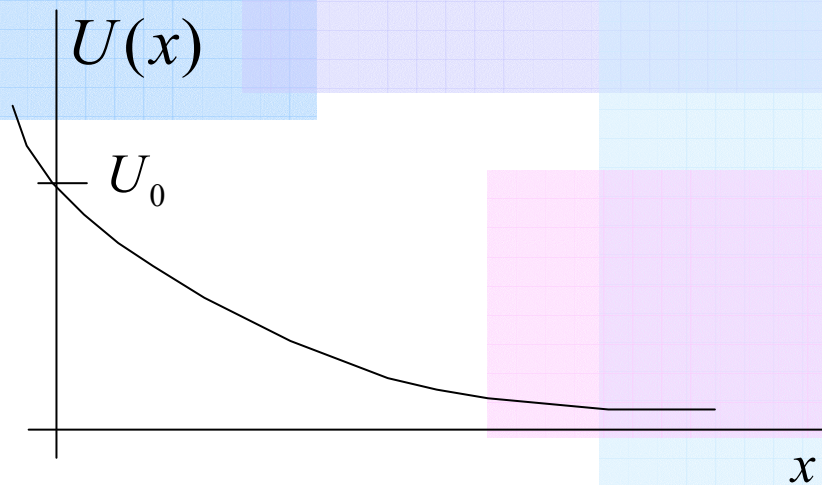
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \mu_0 \mu^2 \left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right)^2 2xS + \frac{1}{2} \mu_0^2 \mu \left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right)^2 S(l_2 + l_3)$$



Energía Electromagnética

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} S \mu_0 \mu (2x\mu + \mu_0 (l_2 + l_3)) \left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0 (l_2 + l_3)} \right)^2$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \left(\frac{S \mu_0 \mu N^2 I^2}{2\mu x + \mu_0 (l_2 + l_3)} \right)$$





Energía Electromagnética

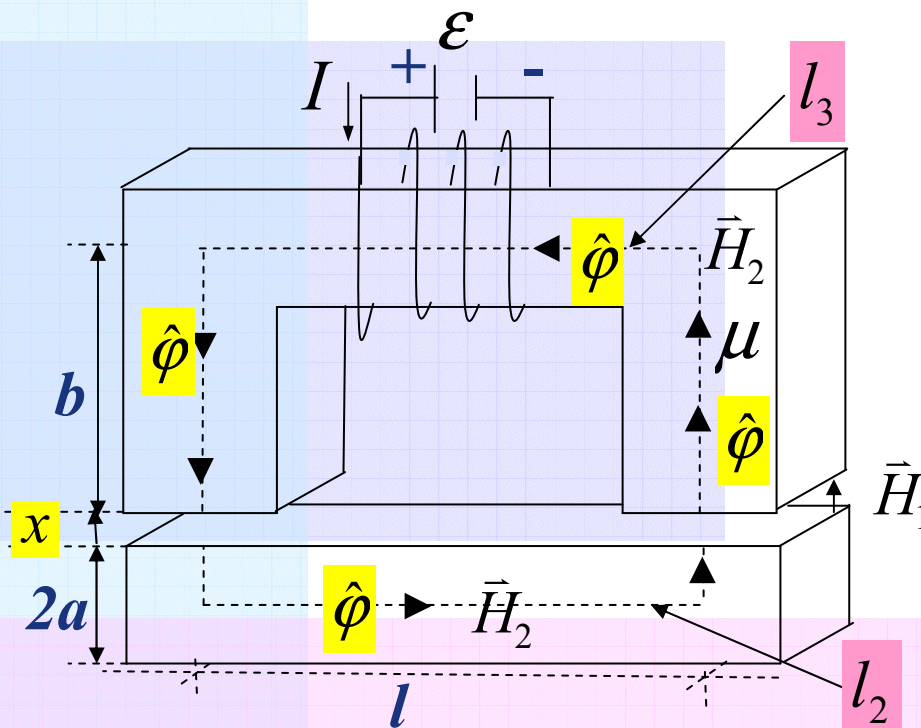
$$\text{Si } \mu \gg \mu_0 \Rightarrow \mu_R \mu_0 \gg \mu_0$$

$$U = \frac{1}{2} H_1 B_1 \text{Vol}_1 + \frac{1}{2} H_2 B_2 \text{Vol}_2$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 \text{Vol}_1 + \frac{1}{2\mu} B_2^2 \text{Vol}_2$$

$$B_1 = B_2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 \left(\text{Vol}_1 + \frac{1}{2\mu_R} \text{Vol}_2 \right)$$





Energía Electromagnética

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 \left(Vol_1 + \frac{1}{2\mu_R} Vol_2 \right)$$

Notar que $Vol_1 = 2Sx$
 $Vol_2 \approx S(l_2 + l_3)$

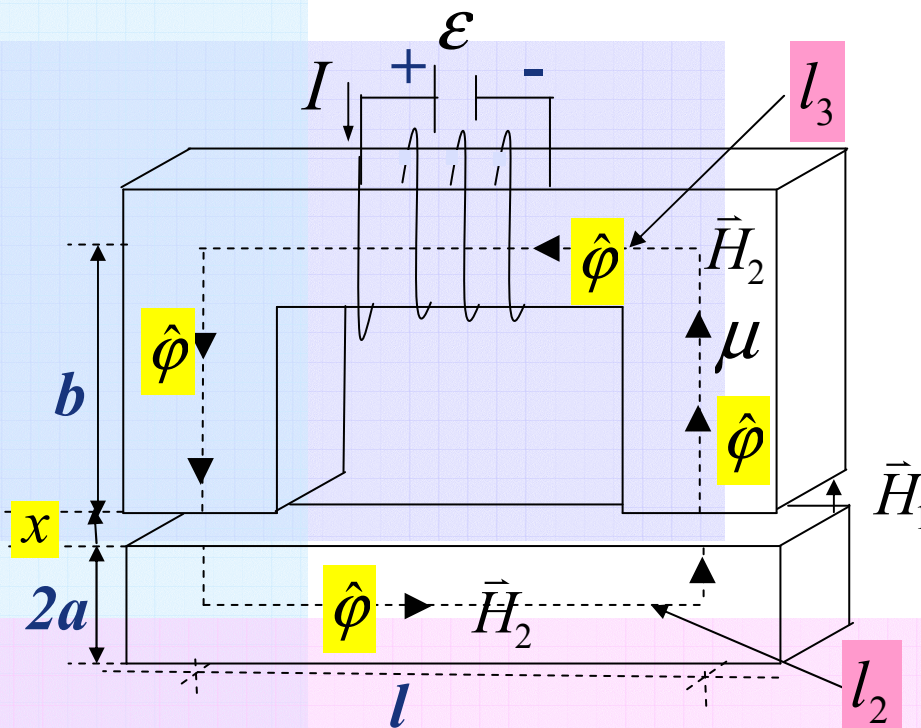
Típicamente

$$Vol_2 \approx 10 \times Vol_1$$

$$\mu_R > 1000$$

$$\Rightarrow U \cong \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 Vol_1$$

La mayor parte de la energía se concentra en el entrehierro





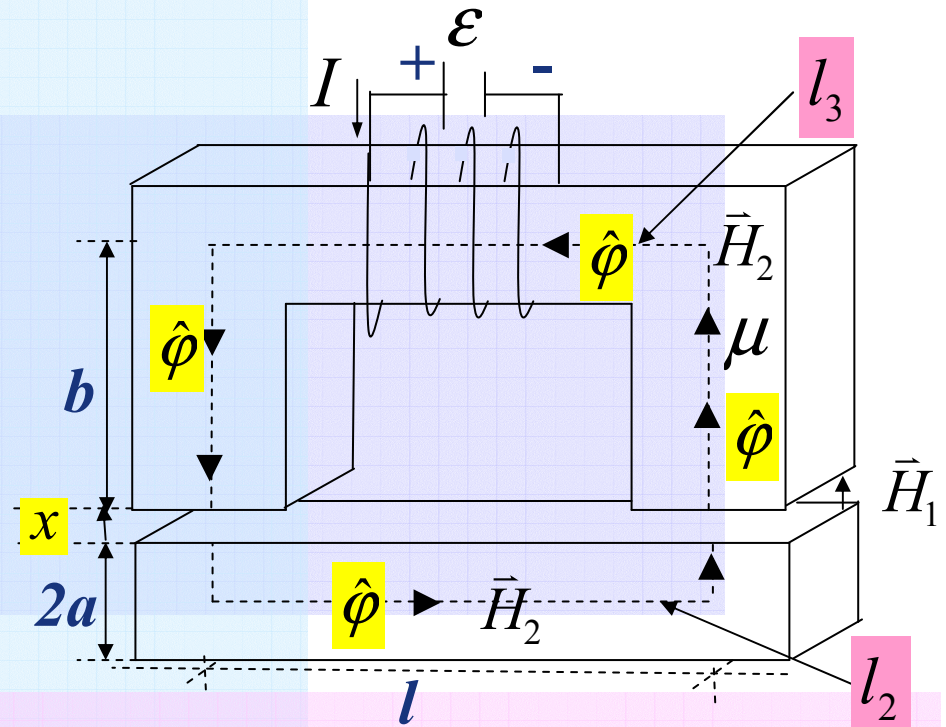
Energía Electromagnética

$$\Rightarrow U \cong \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 Vol_1$$

$$\therefore U \cong xS\mu_0 \left(\frac{\mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right)^2$$

$$U \cong xS\mu_0 \left(\frac{NI}{2x + \frac{\mu_0}{\mu}(l_2 + l_3)} \right)^2$$

$$\Rightarrow U \cong xS\mu_0 \left(\frac{NI}{2x} \right)^2 = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x}$$



Fórmula aproximada



Fuerza Electromagnética

Trabajo es igual al cambio de energía

$$-\vec{F} \cdot d\vec{l} = dU$$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dl} \hat{l}$$

En general

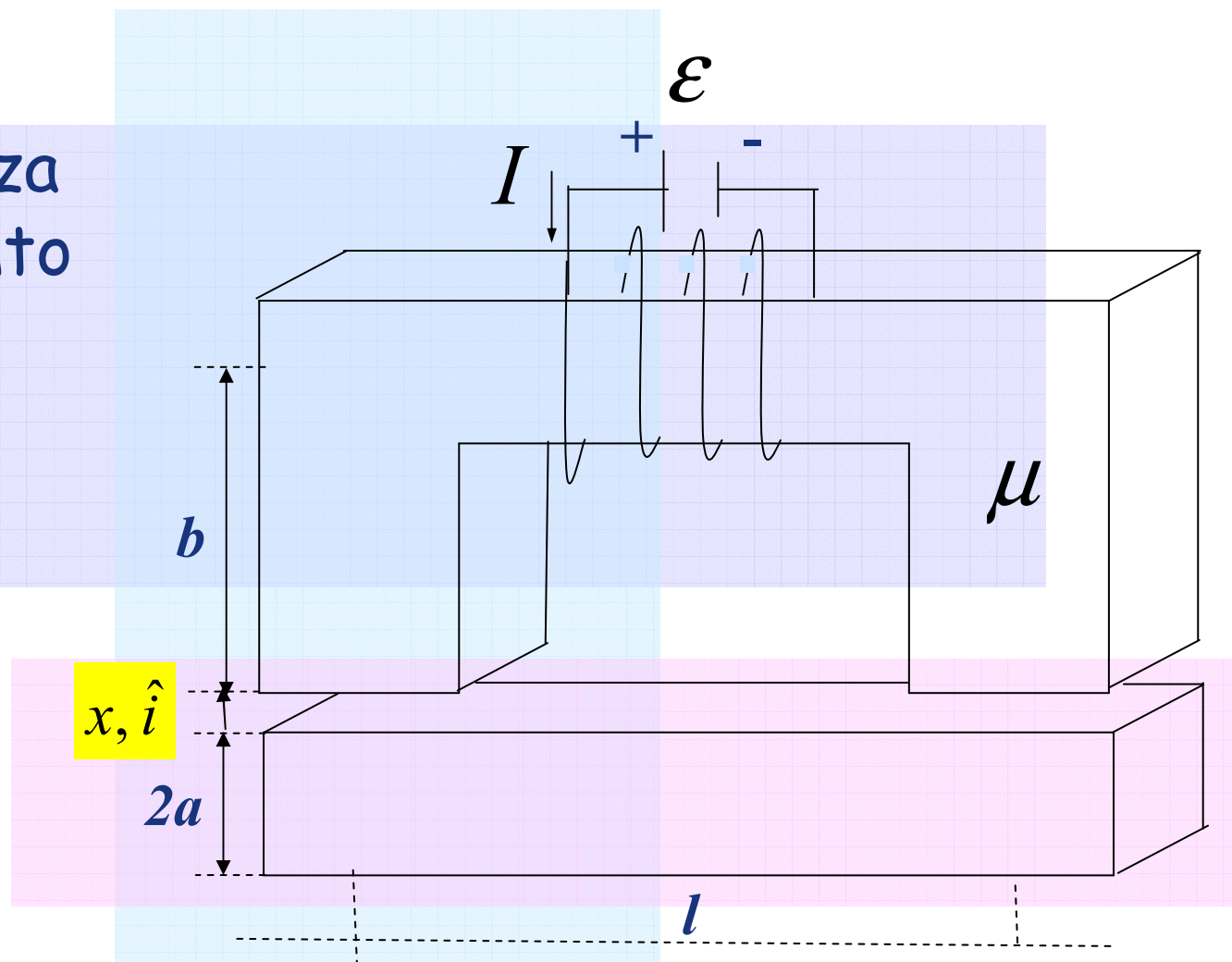
$$\vec{F} = -\nabla U$$



Fuerza Electromagnética

Ejemplo 2

Calcular la Fuerza
sobre el segmento
inferior





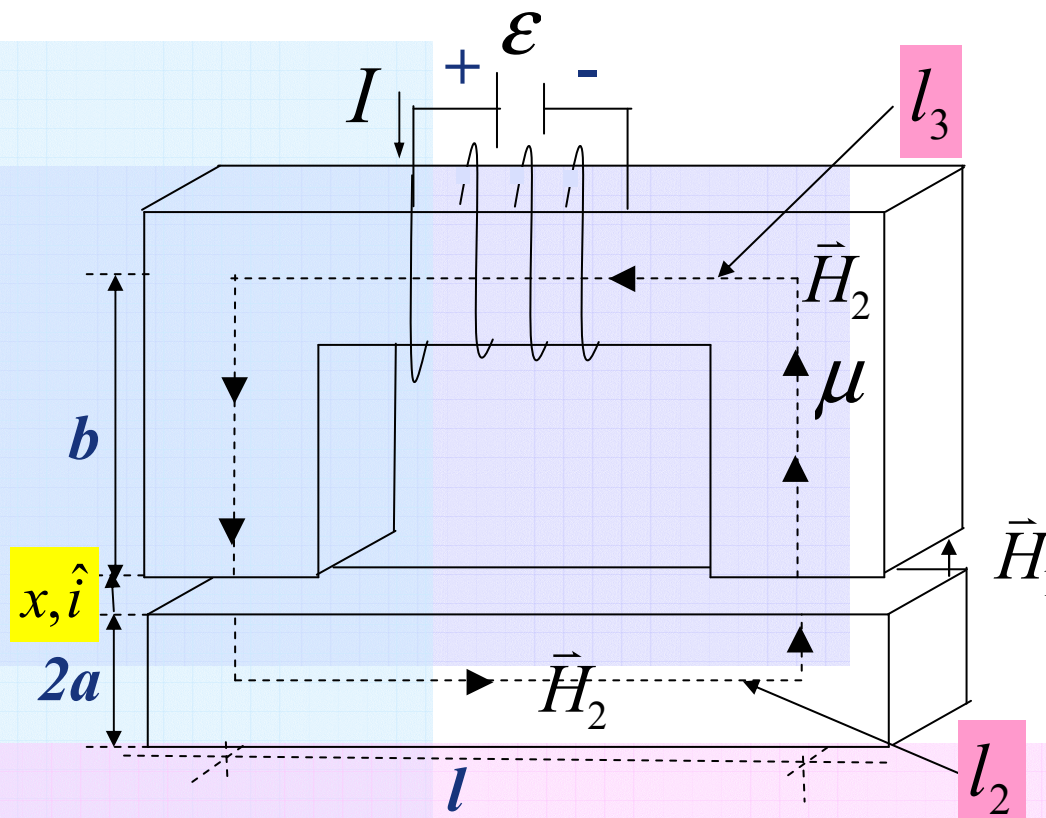
Fuerza Electromagnética

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right) I^2 \hat{i}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{(2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3))^2} \right) 2\mu \hat{i}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 S I^2}{[2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)]^2} \right) \hat{i}$$



Fuerza tiende a acercar la barra inferior: Electroimán.
Notar que hemos supuesto corriente constante.



Fuerza Electromagnética

Usando la fórmula
aproximada

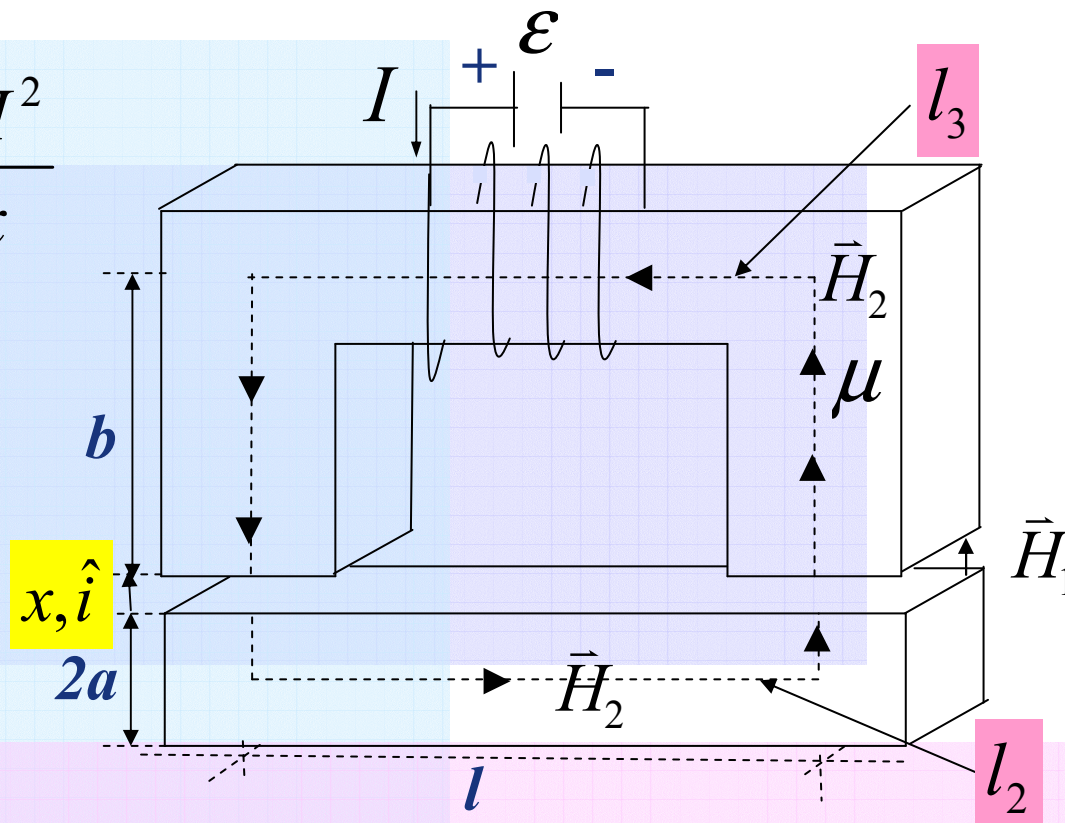
$$U = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x}$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x} \right] \hat{i}$$

Asumiendo que la
corriente es constante

$$\vec{F} = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x^2} \hat{i}$$





Energía de Campo Magnético

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B}) dv$$

$$U = \int_{t_0}^t P(t) dt = \int_{t_0}^t v(t) i(t) dt$$

$$v(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow d\Phi = v(t) dt \Rightarrow U = \int_{\phi_0}^{\phi} i(t) d\Phi$$

como $\Phi = Li \Rightarrow U = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\Phi}{L} d\Phi = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$

Finalmente

$$U = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} Li^2$$

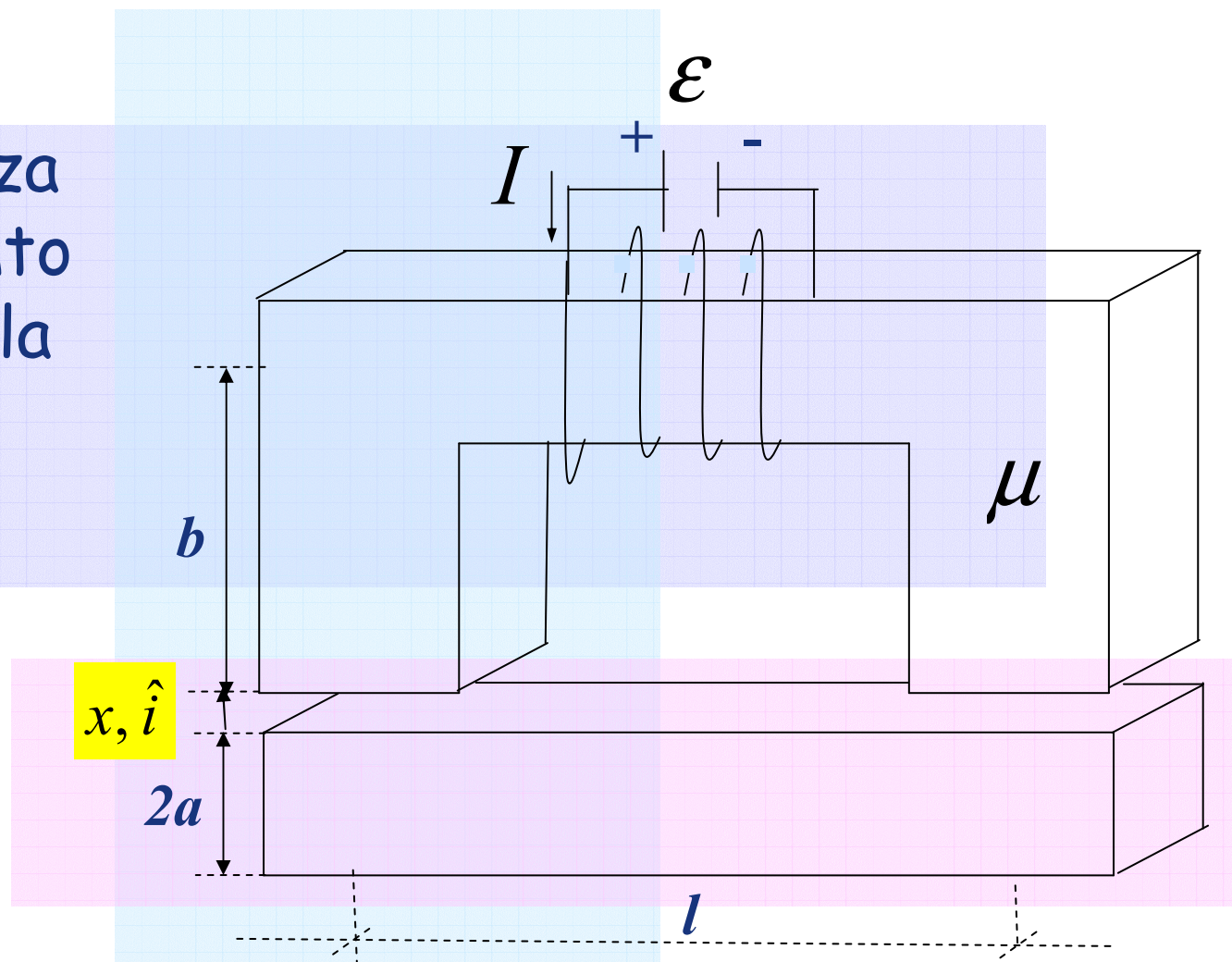


Energía de Campo Magnético

Ejemplo 3

Calcular la Fuerza sobre el segmento inferior usando la ecuación de energía

$$U = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} Li^2$$





Energía de Campo Magnético

$$L \equiv \frac{\phi_T}{I} = \frac{N\phi_e}{I}$$

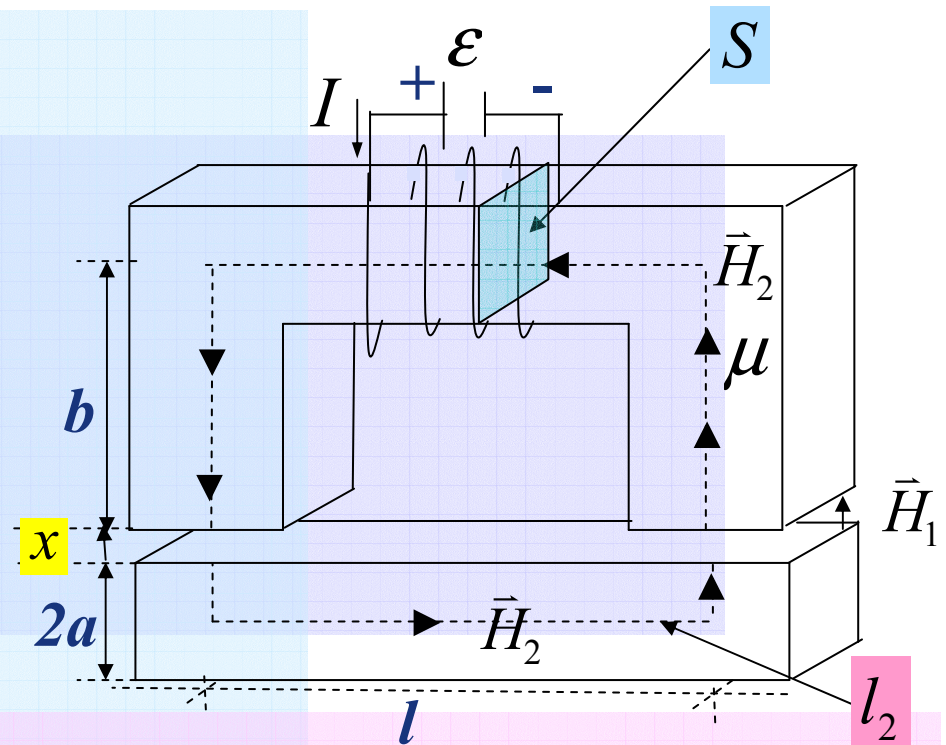
$$\phi_e = \iint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \hat{j}$$

$$\Rightarrow \phi_e = \frac{\mu\mu_0 NSI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$

$$\Rightarrow \phi_T = \frac{\mu\mu_0 N^2 SI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$




$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu \mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right) I^2$$

$$\bar{F} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu \mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)} \right) I^2 \hat{i}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{(2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3))2} \right) 2\mu \hat{i}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 S I^2}{(2\mu x + \mu_0 (l_2 + l_3))2} \right) \hat{i}$$

