



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 22

Campos Variables en el Tiempo-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



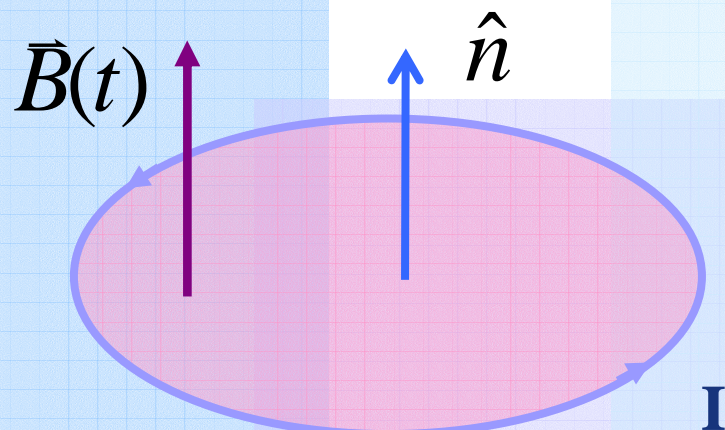
INDICE

- Ley de Faraday-Lenz
- 3ª ecuación de Maxwell
- Inductancia propia
- Inductancia mutua
- Corriente de Desplazamiento



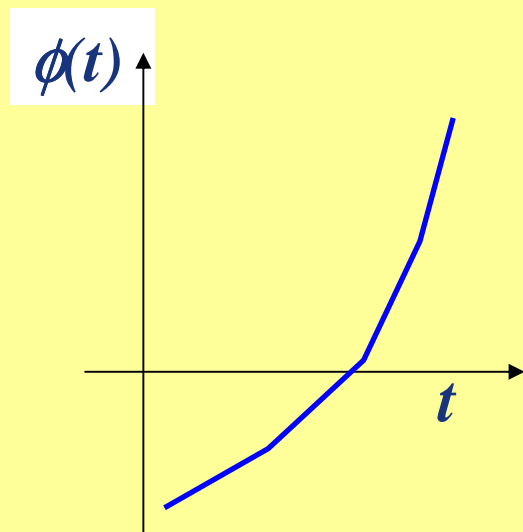
Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

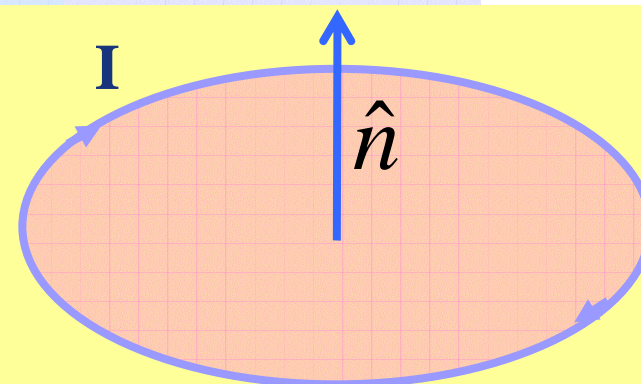


$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$



$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$$



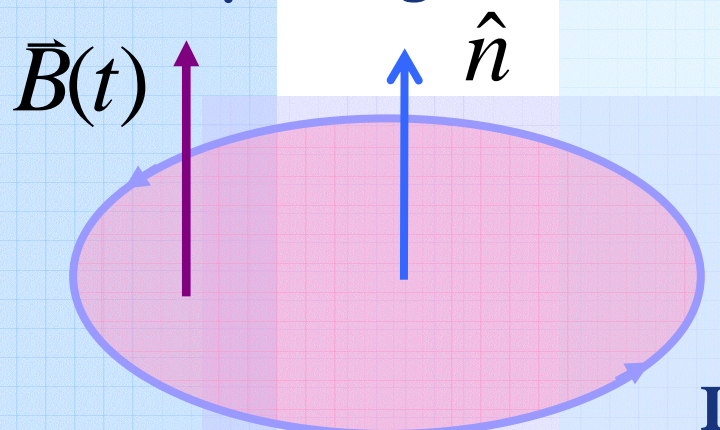
\vec{B} crece \Rightarrow

Corriente genera campo opuesto al crecimiento



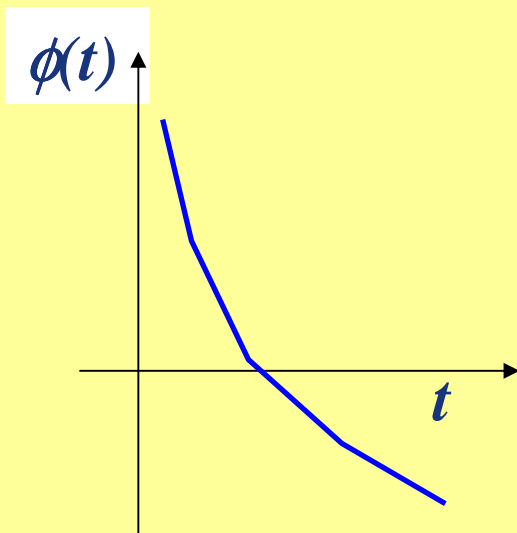
Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM

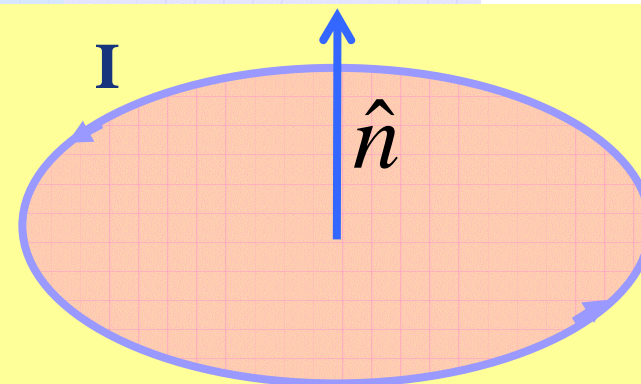


$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \mathcal{E} > 0$$



\vec{B} decrece \Rightarrow

Corriente genera campo opuesto al decrecimiento

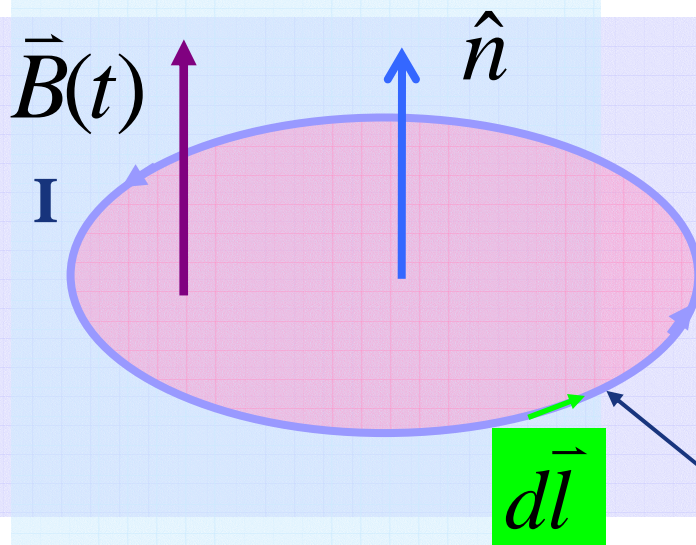


Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Trayectoria c

$$\Rightarrow \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.9)$$



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$\vec{B}(t)$

\mathbf{I}

$$d\vec{S} = ds\hat{n}$$

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(c)

$d\vec{l}$

Trayectoria c

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de
Maxwell

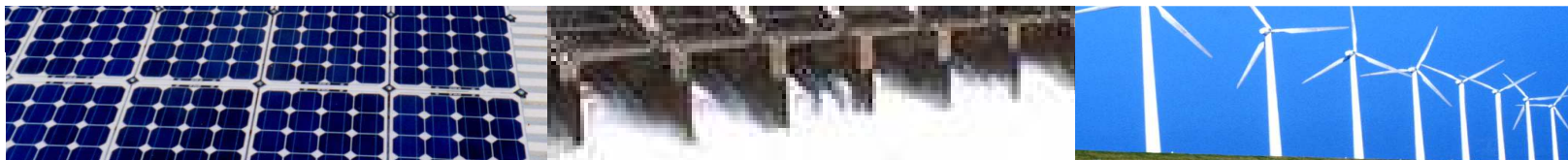
Dado
que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times (\nabla V) = 0$



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times (\nabla V) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

*Origen
electrostático*

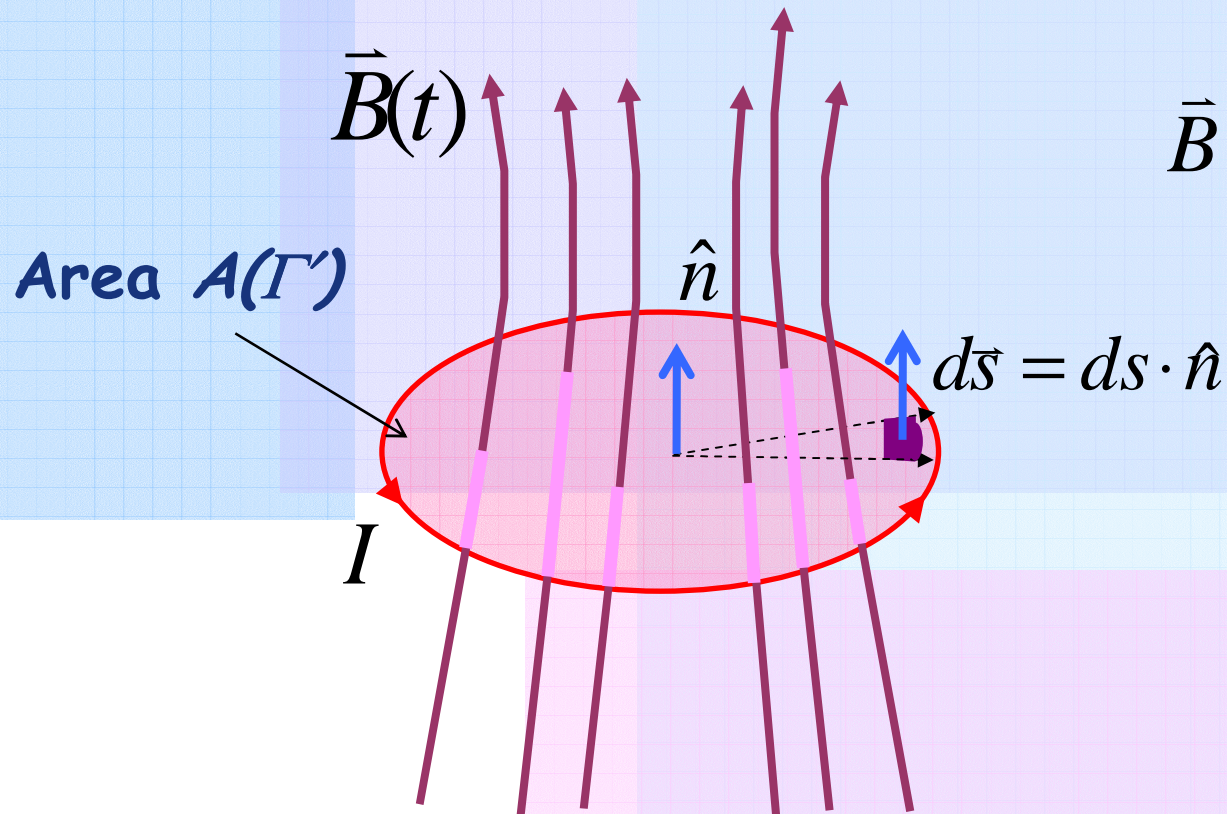
$$\vec{E} = -\overbrace{\nabla V} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

*Debido a campo magnético
variable en el tiempo*



Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I

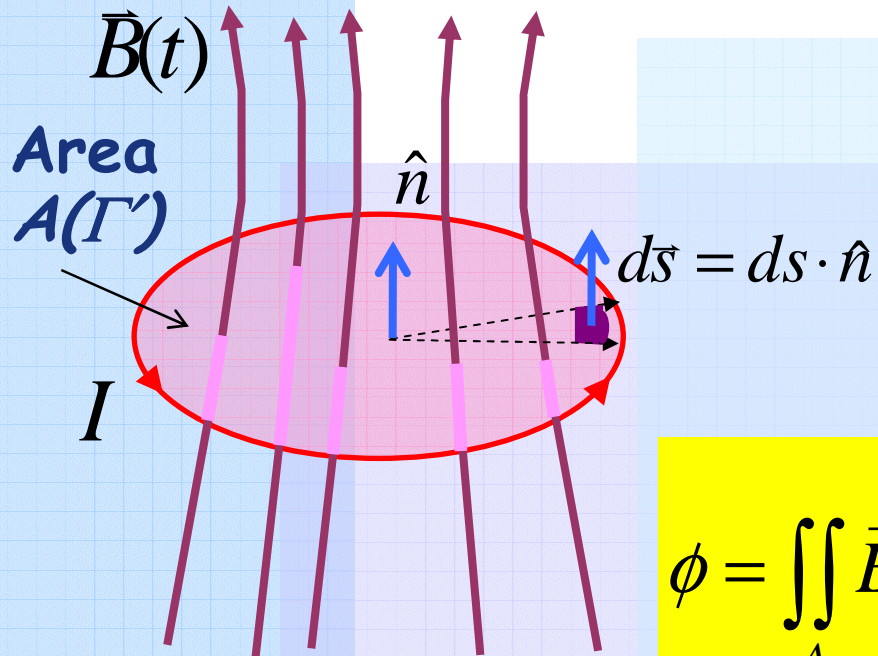


$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



Inductancia Propia



$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$
$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \cdot d\vec{s}$$

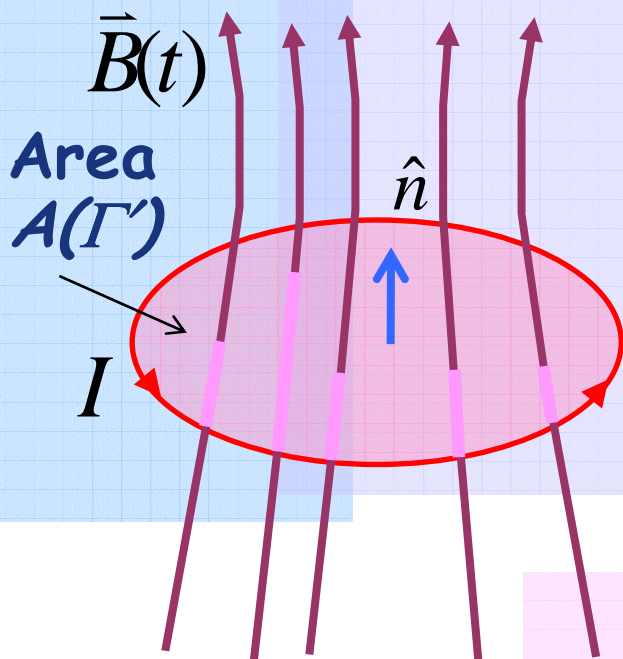
$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \cdot d\vec{s}$$

**Inductancia
del circuito**



Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I



Inductancia propia del circuito

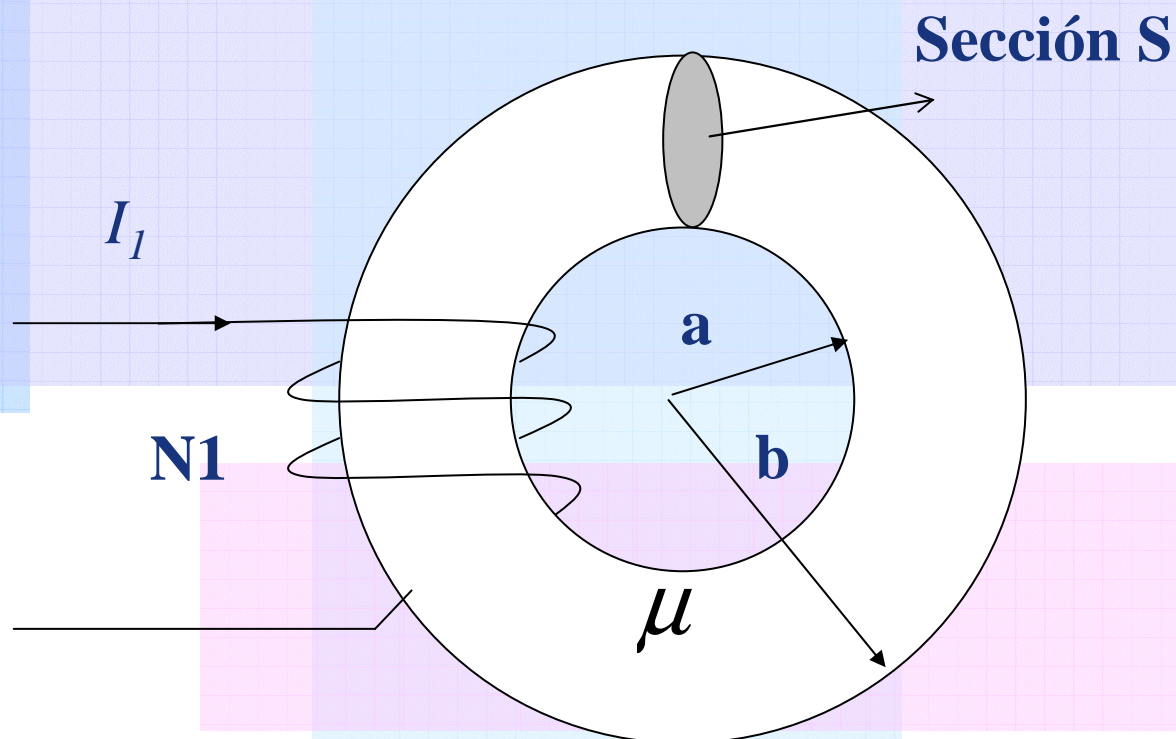
$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

- NO depende de la corriente
- ni del flujo,
- Depende de la geometría
- $[L] = \text{Henry [H]}$



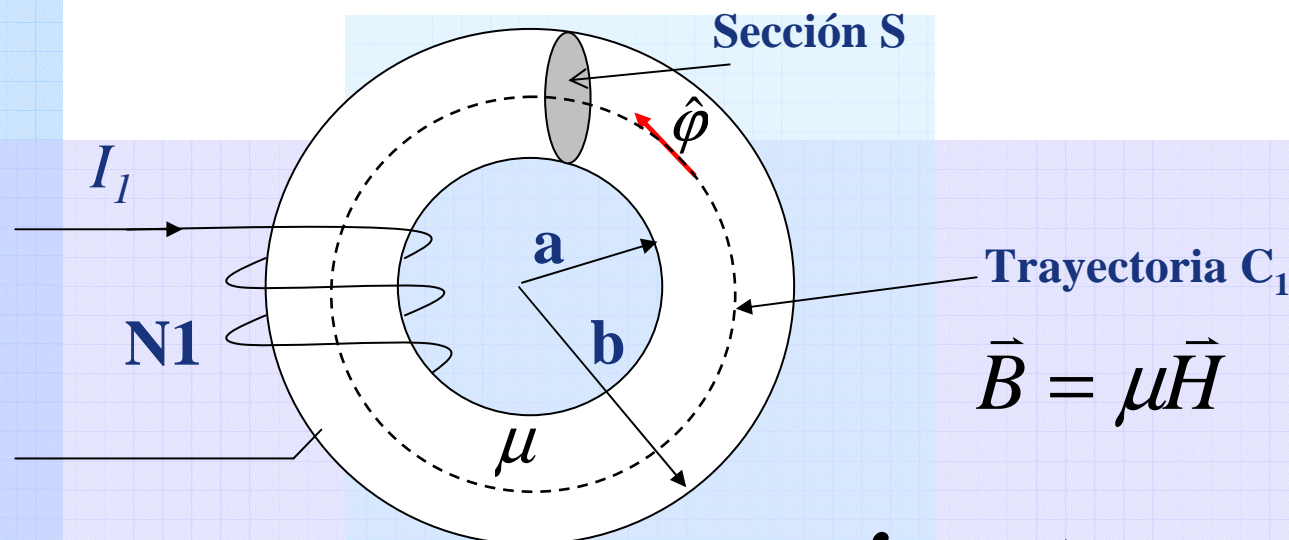
Inductancia propia

Ejemplo 1. Calcular la inductancia propia del circuito montado en el toroide de la figura





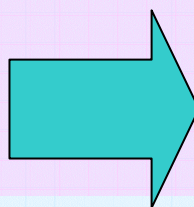
Inductancia Propia



Calculamos el campo magnético

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

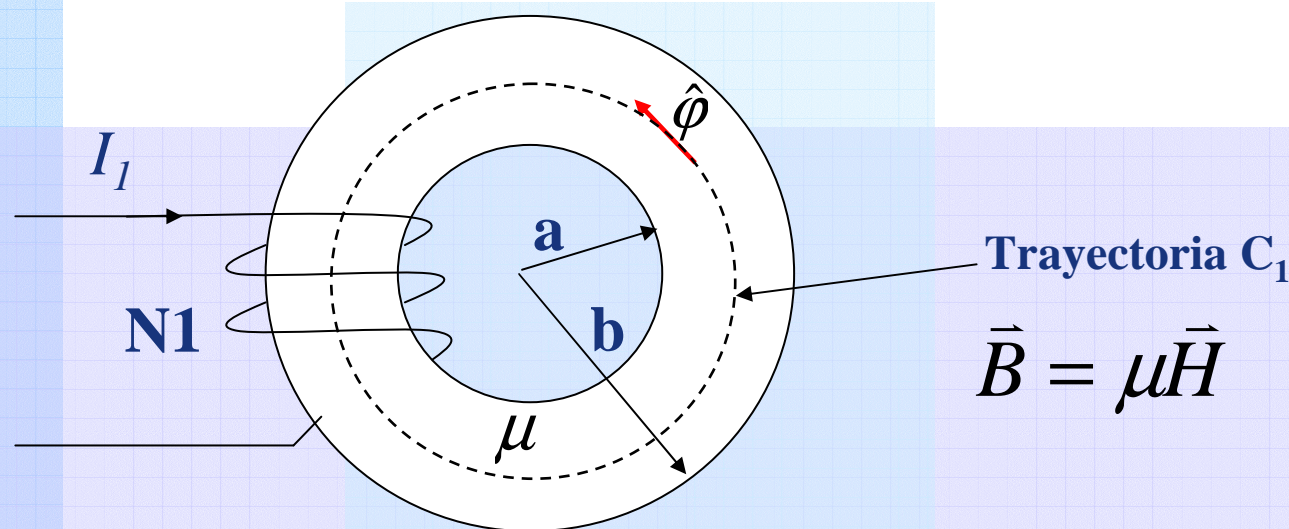
Vemos que $\vec{H} = H\hat{\phi}$



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r)\hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi}$$
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H(r)$$



Inductancia Propia



Corriente total enlazada $I_{\text{enlazada}} = -N_1 I_1$

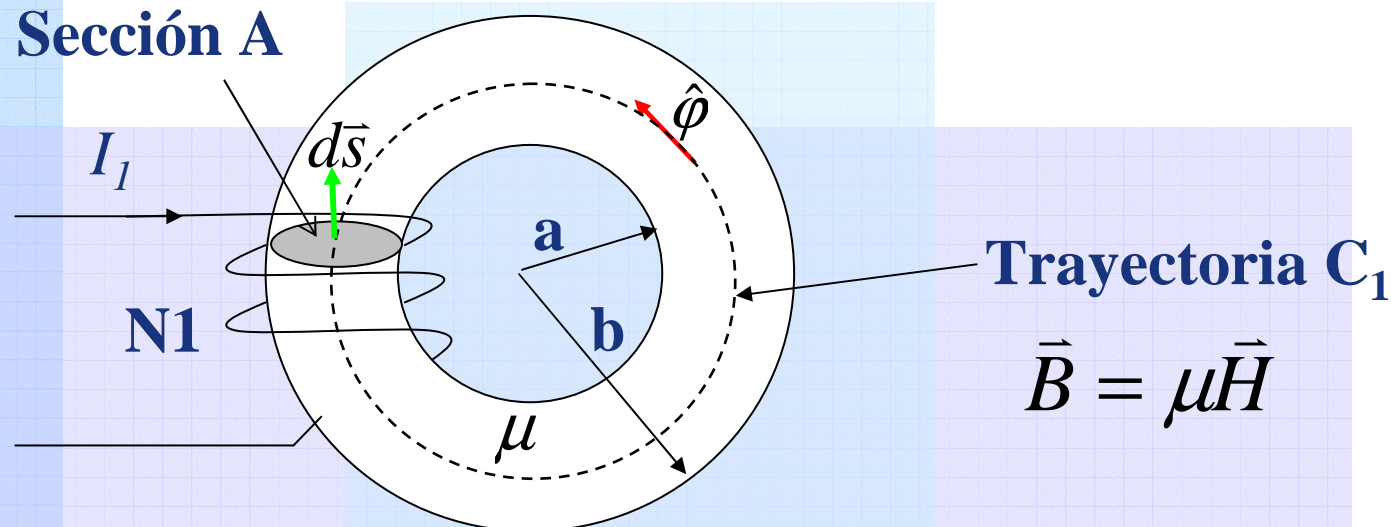
$$\Rightarrow rH(r)2\pi = -N_1 I_1 \Rightarrow \vec{H}(r) = -\frac{N_1 I_1}{2\pi r} \hat{\phi}$$

En el punto medio $\vec{H} = -\frac{N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi}$



Inductancia Propia

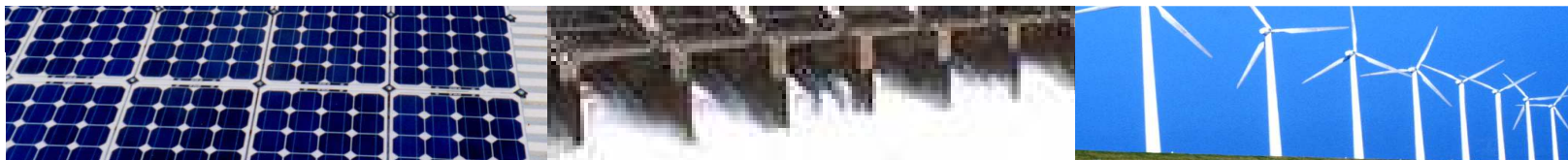
Sección A



Flujo enlazado por una vuelta $\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$

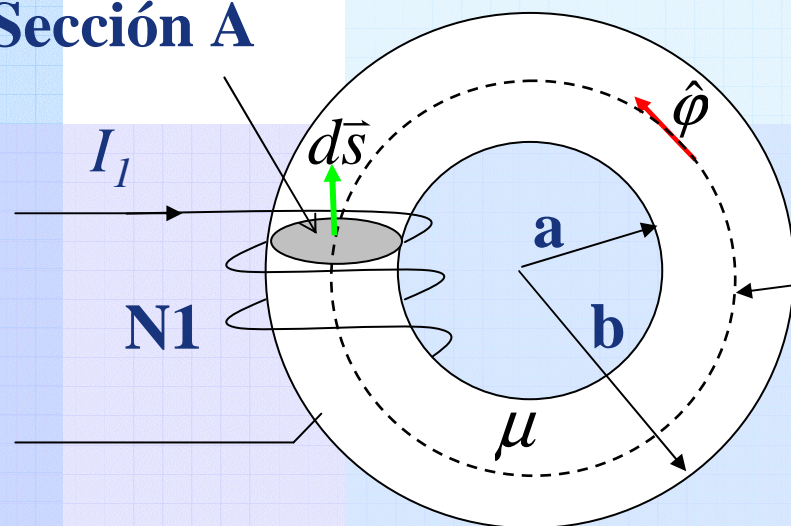
De la figura $d\vec{s} = ds(-\hat{\phi})$

$$\Rightarrow \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_A -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi} \cdot ds(-\hat{\phi})$$



Inductancia Propia

Sección A



Trayectoria C_1

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por una vuelta

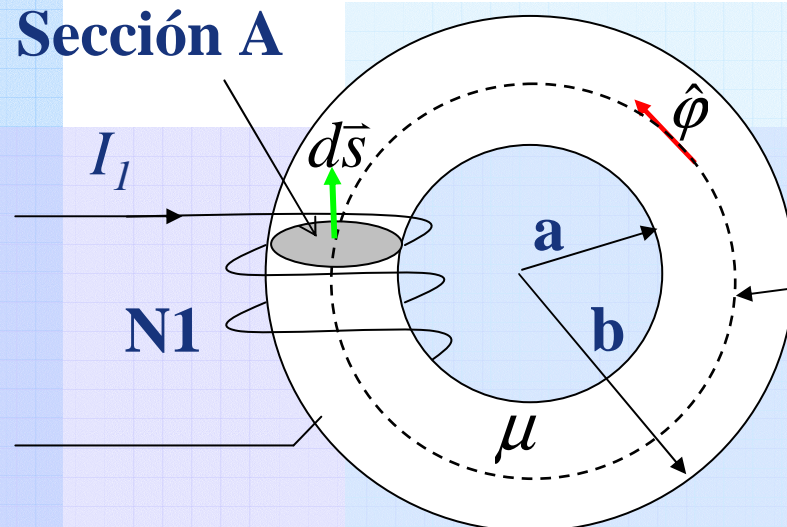
$$\phi = \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$$

Flujo enlazado por todo el circuito $\phi_T = N_1 \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$



Inductancia Propia

Sección A



Trayectoria C_1

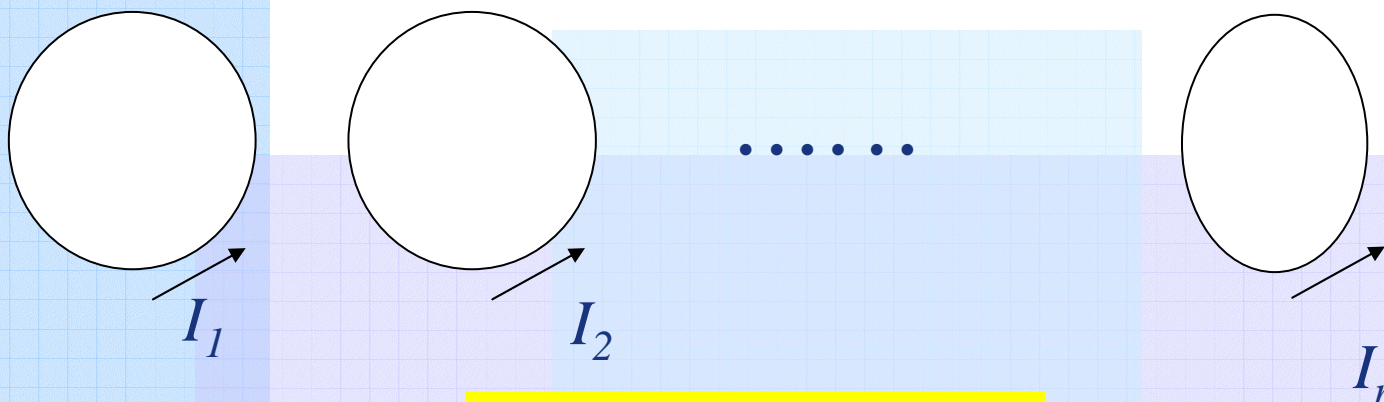
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por todo el circuito $\phi_T = N_1 \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$

Inductancia propia del circuito $L \equiv \frac{\phi_T}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$



Inductancia mutua



n circuitos

Sea ϕ_{jk} el flujo magnético que atraviesa el circuito j debido SOLO a la corriente que circula por el circuito k

Inductancia mutua entre el circuito j y k

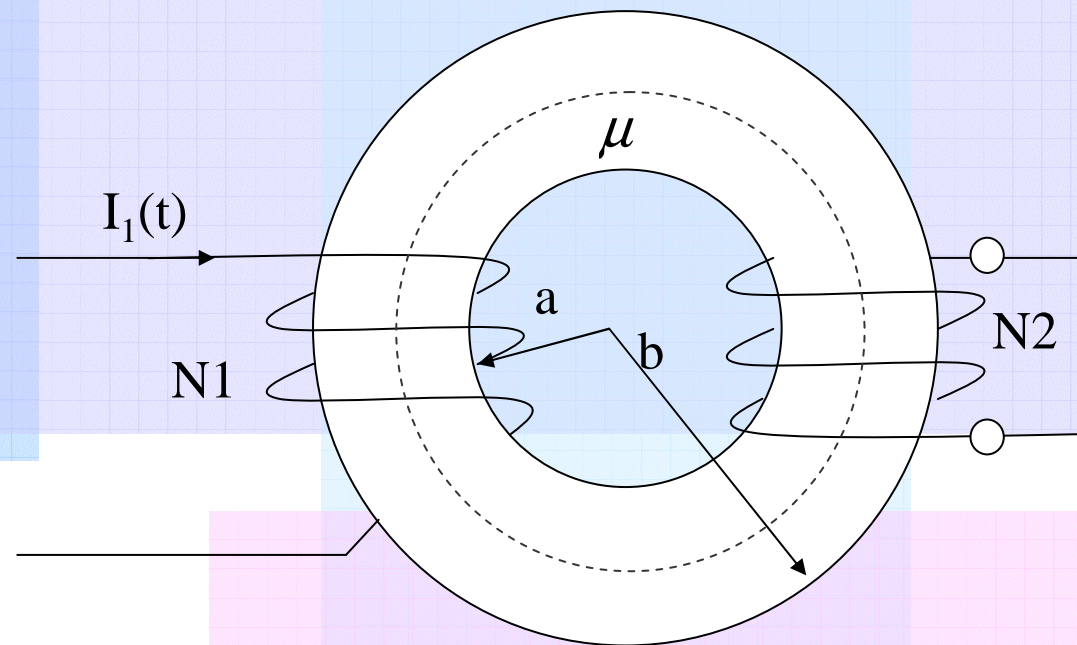
$$L_{jk} = \frac{\phi_{jk}}{I_k}$$

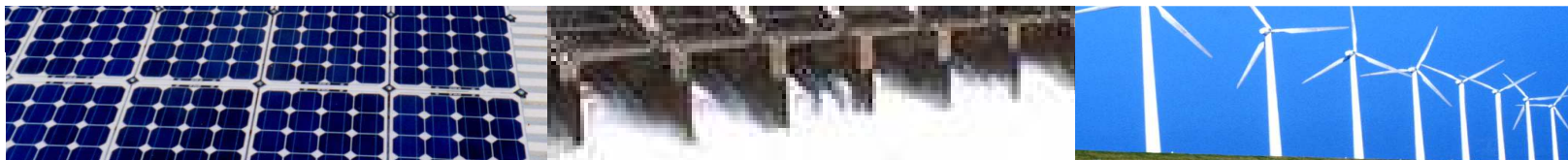
Se cumple $L_{jk} = L_{kj}$



Inductancia mutua

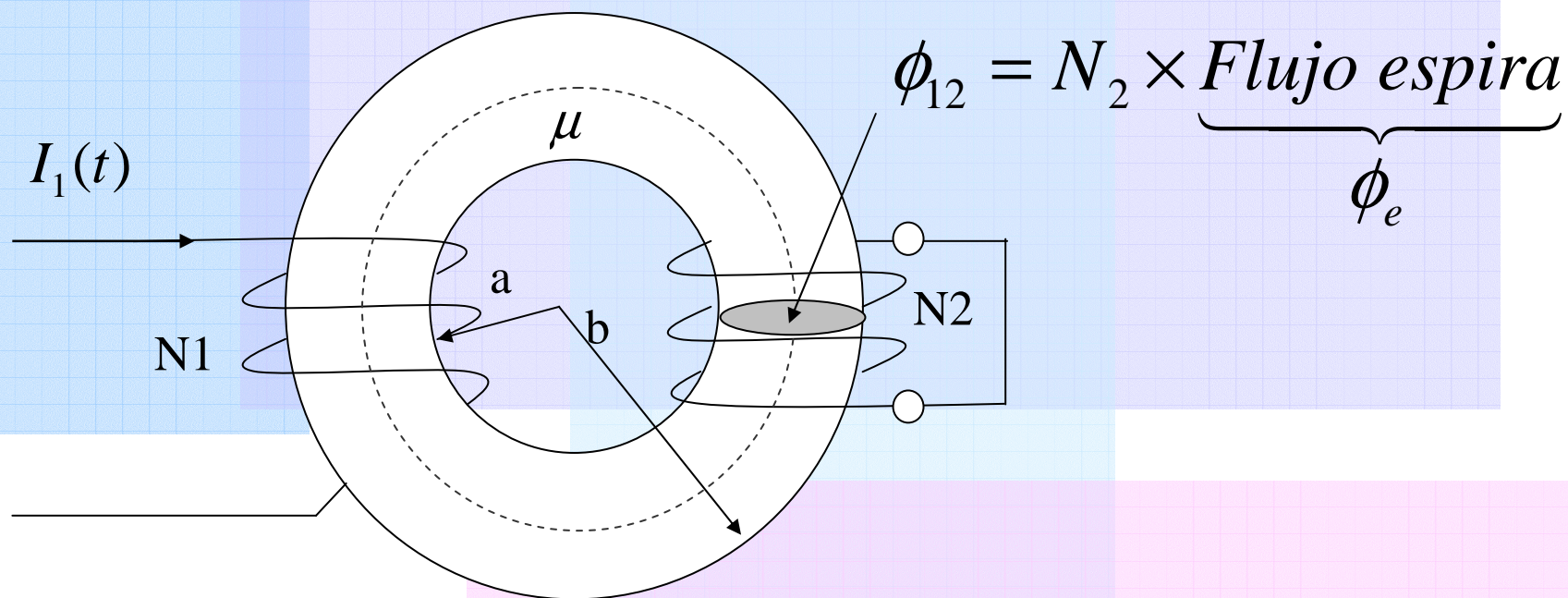
Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura





Inductancia mutua

Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura

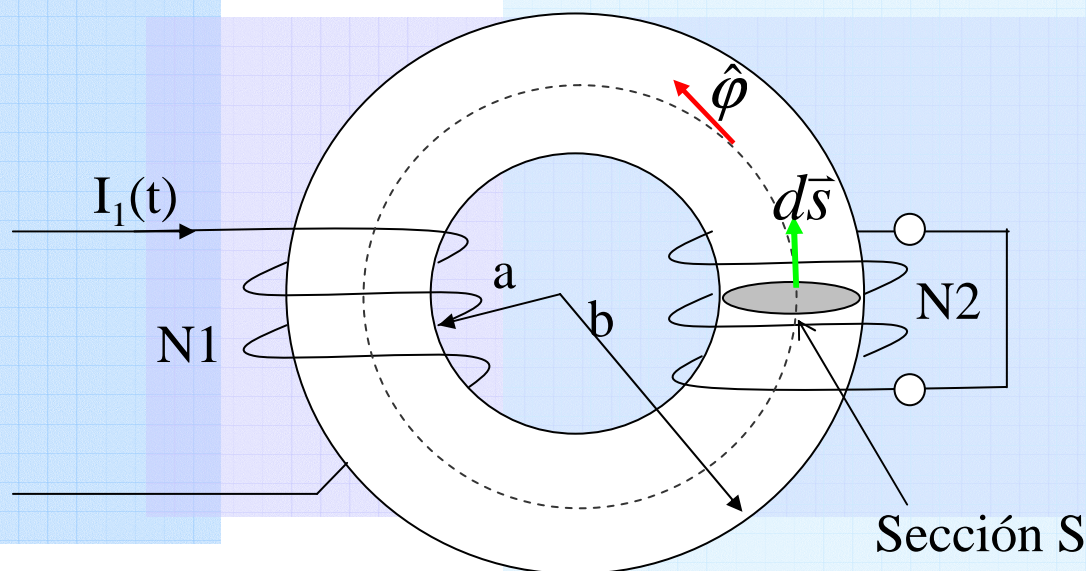


Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $L_{12} \equiv \frac{\phi_{12}}{I_1}$



Inductancia mutua

Campo producido por I_1 es $\vec{B} = -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi}$



Flujo en S es

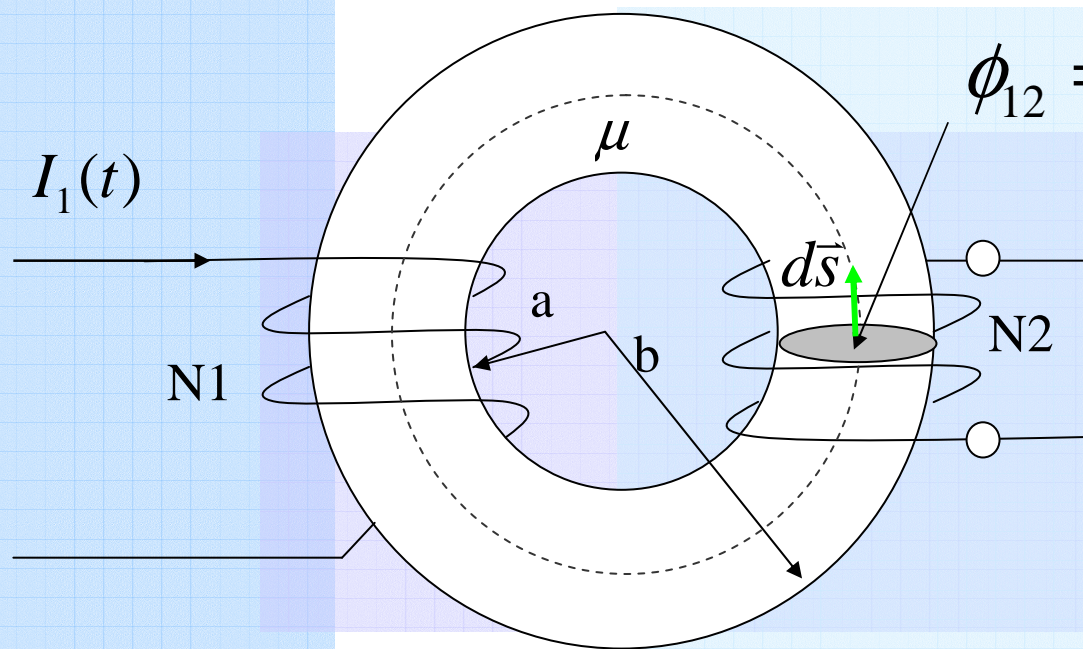
$$\phi_e = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

De la figura $d\vec{s} = ds \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\phi} \cdot ds \hat{\phi} \quad \therefore \phi_e = -\frac{\mu N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$



Inductancia mutua



$$\phi_{12} = N_2 \times \underbrace{\text{Flujo espira}}_{\phi_e}$$

$$\phi_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $L_{12} \equiv \frac{\phi_{12}}{I_1}$

$$\therefore L_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$



Corriente de Desplazamiento

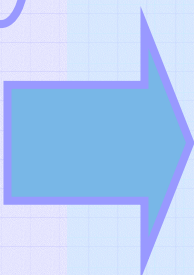
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$$

Tomando la divergencia

Nulo

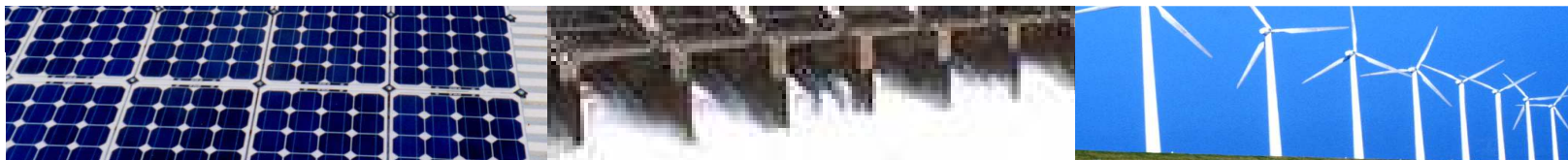


$$0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

Pero por la ecuación
de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Luego hay una contradicción !?#@



Corriente de Desplazamiento

Cuando no hay corriente $\vec{J} = 0$, pero si hay campos eléctricos variables se encuentra experimentalmente la relación

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Así, el termino $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ debe sumarse a la 4ª ecuación, lo que da finalmente:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

4ª Ecuación de Maxwell

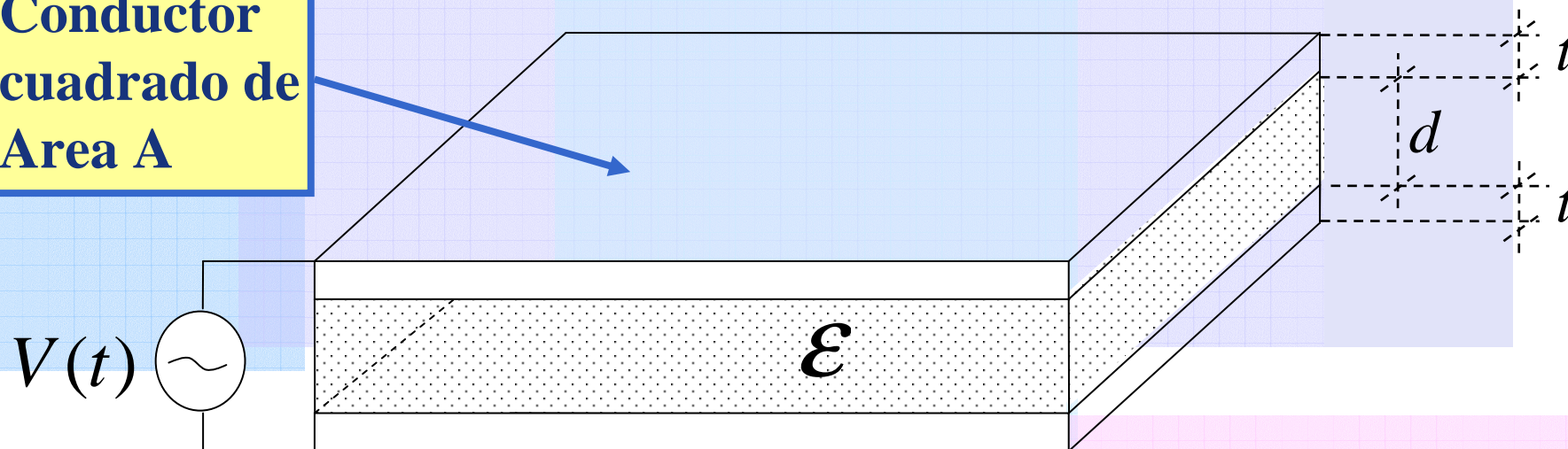
Corriente de
desplazamiento



Corriente de Desplazamiento

Ejemplo 3. Calcular corriente de desplazamiento en el interior del condensador

Conductor
cuadrado de
Area A

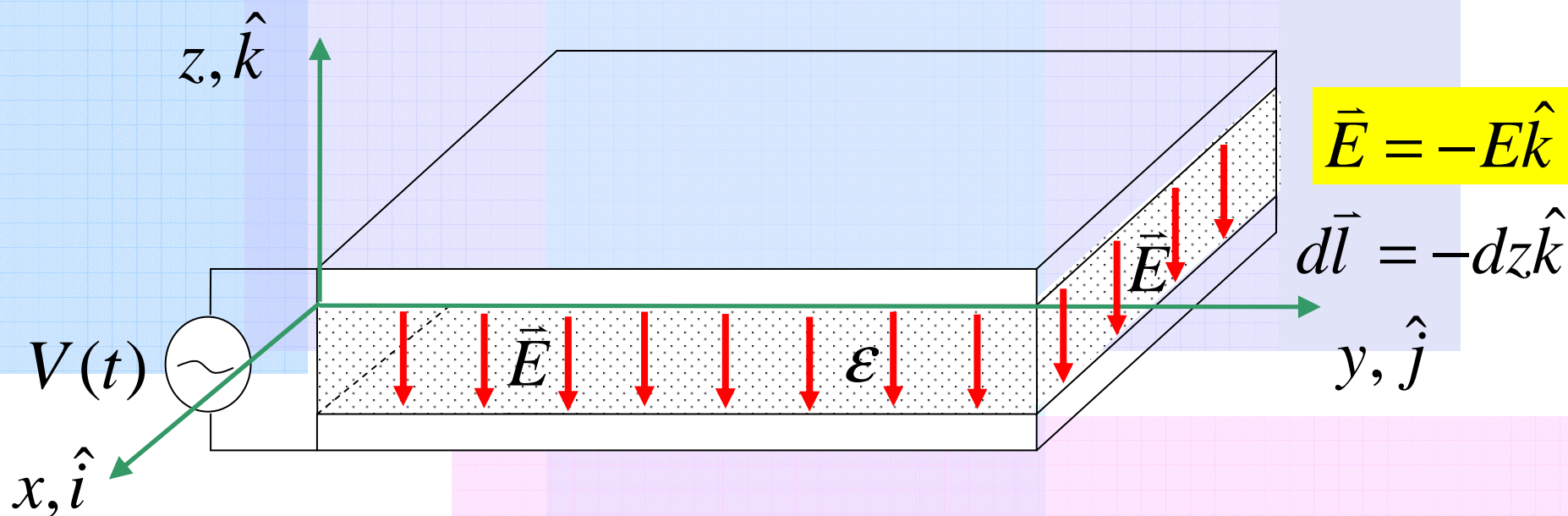


$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [Volt]$$



Corriente de Desplazamiento

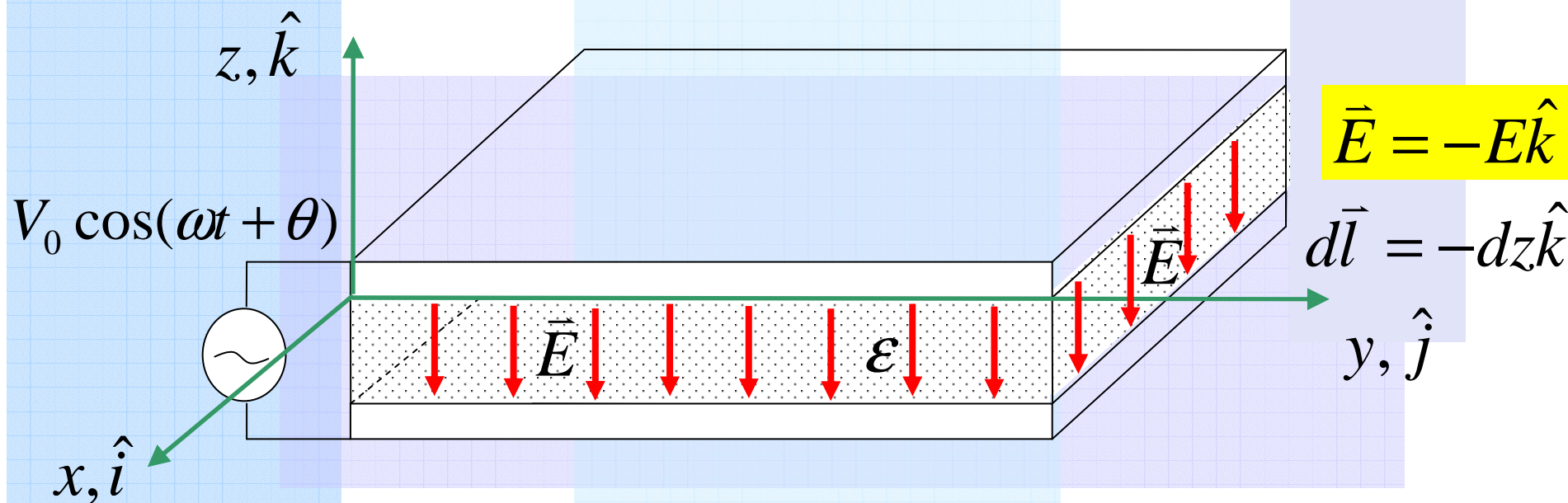
Corriente de desplazamiento $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ usamos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$



$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta) \quad [Volt] \quad V(t) = - \int_{z=0}^{z=-d} \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$$

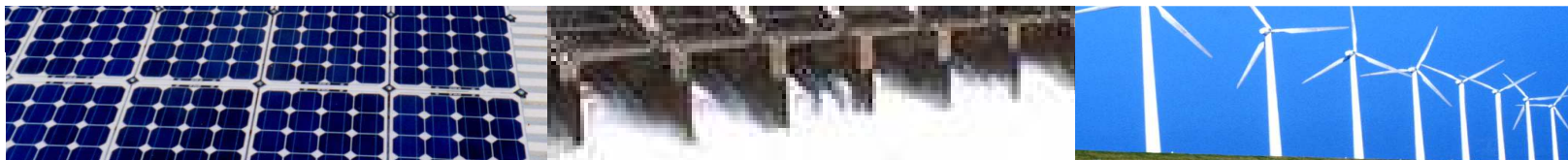


Corriente de Desplazamiento

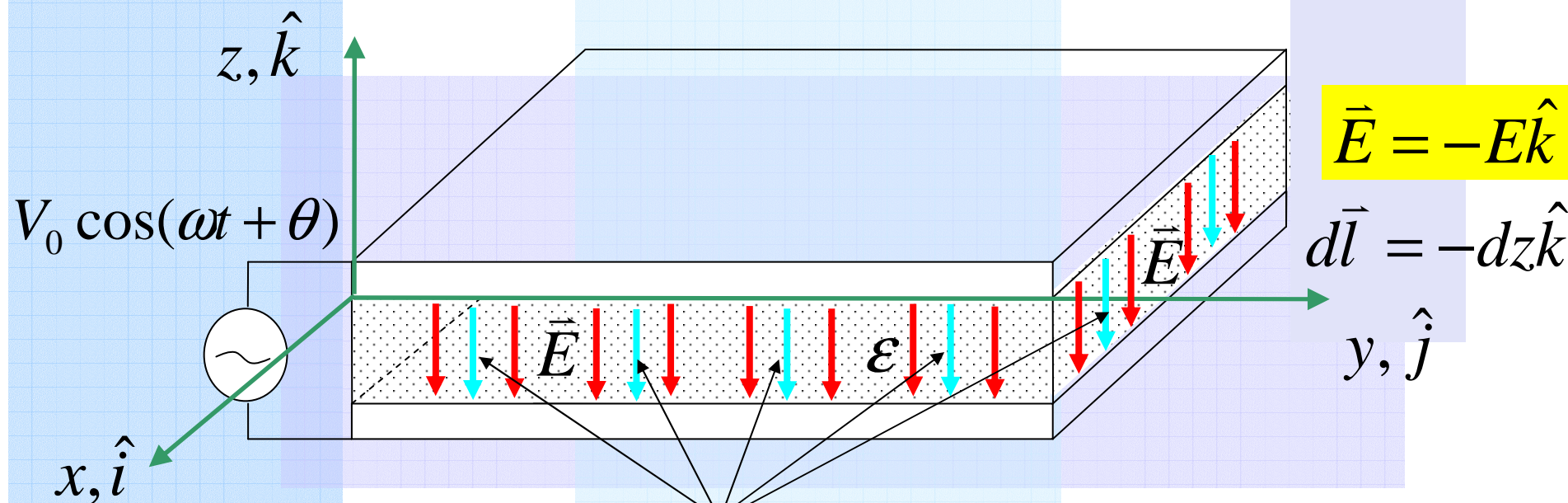


$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{V_0}{d} \sin(\omega t + \theta) \hat{k} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\epsilon V_0}{d} \sin(\omega t + \theta) \hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k}$$



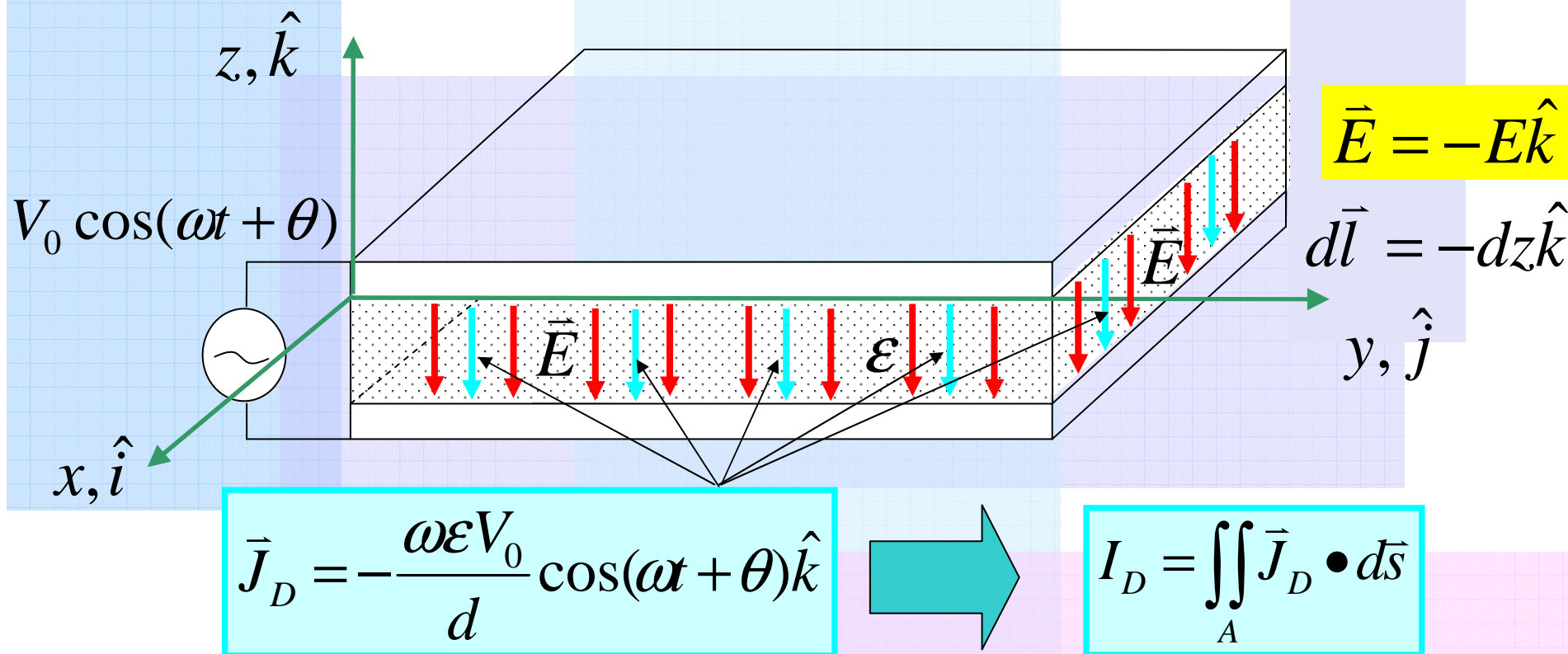
Corriente de Desplazamiento



$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = -\frac{\omega \epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k} \equiv \vec{J}_D$$



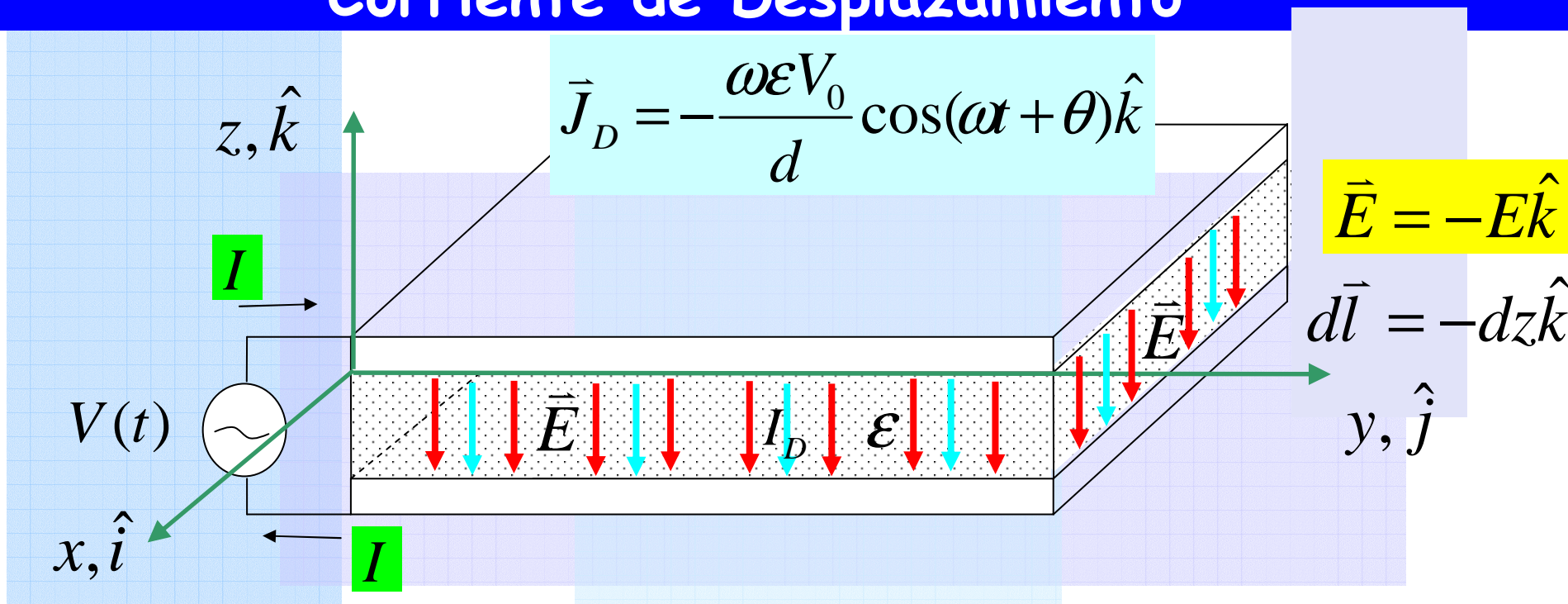
Corriente de Desplazamiento



$$I_D = \iint_A -\frac{\omega\epsilon V_0}{d} \cos(\omega t + \theta) \hat{k} \cdot d\vec{s}(-\hat{k}) = \frac{A\epsilon}{d} \omega V \cos(\omega t + \theta) = C \omega V \cos(\omega t + \theta)$$

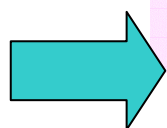


Corriente de Desplazamiento



Ecuación de característica del condensador $Q = CV$

Ecuación de corriente $I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$



$$I = C \omega V_0 \sin(\omega t + \theta)$$

$$\therefore I = I_D$$