



Escuela de  
Ingeniería  
Universidad  
de Chile



# **FI33A ELECTROMAGNETISMO**

## **Clase 20**

### **Magnetostática VI**

**LUIS S. VARGAS**  
**Area de Energía**  
**Departamento de Ingeniería Eléctrica**  
**Universidad de Chile**

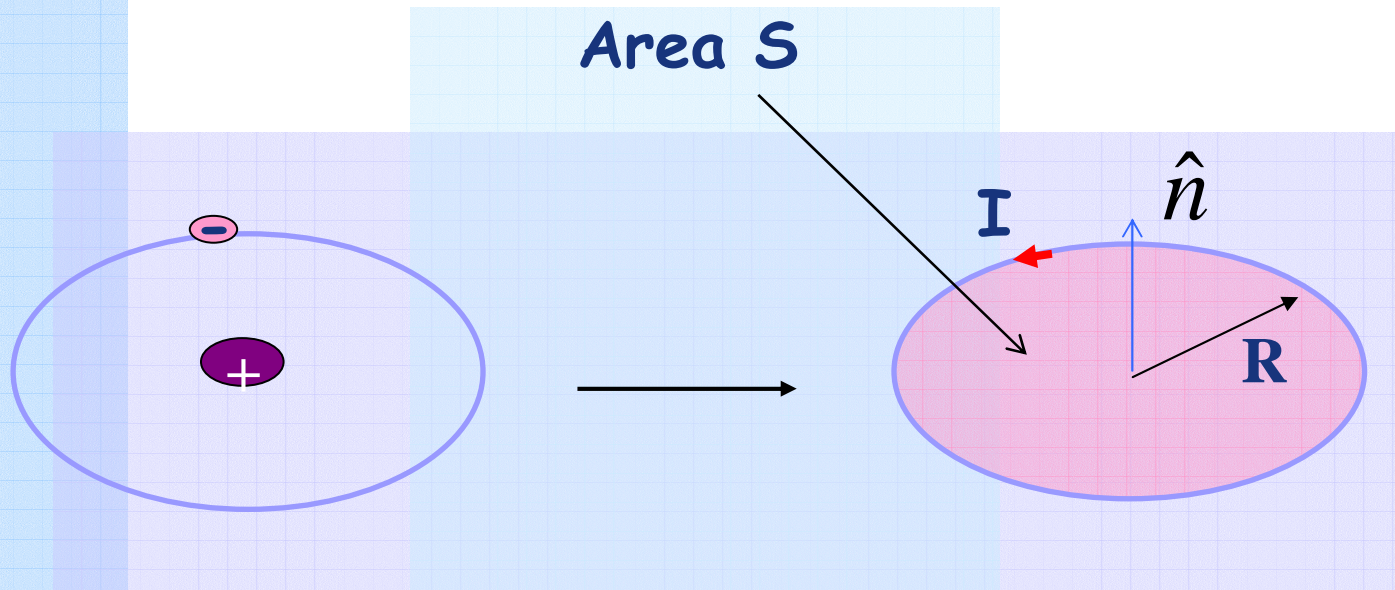


# INDICE

- Repaso
  - Corrientes de Magnetización
  - Permeabilidad Magnética
  - Clasificación de materiales magnéticos
- Condiciones de borde
- Cargas en campos magnéticos



# Modelo atómico de los materiales



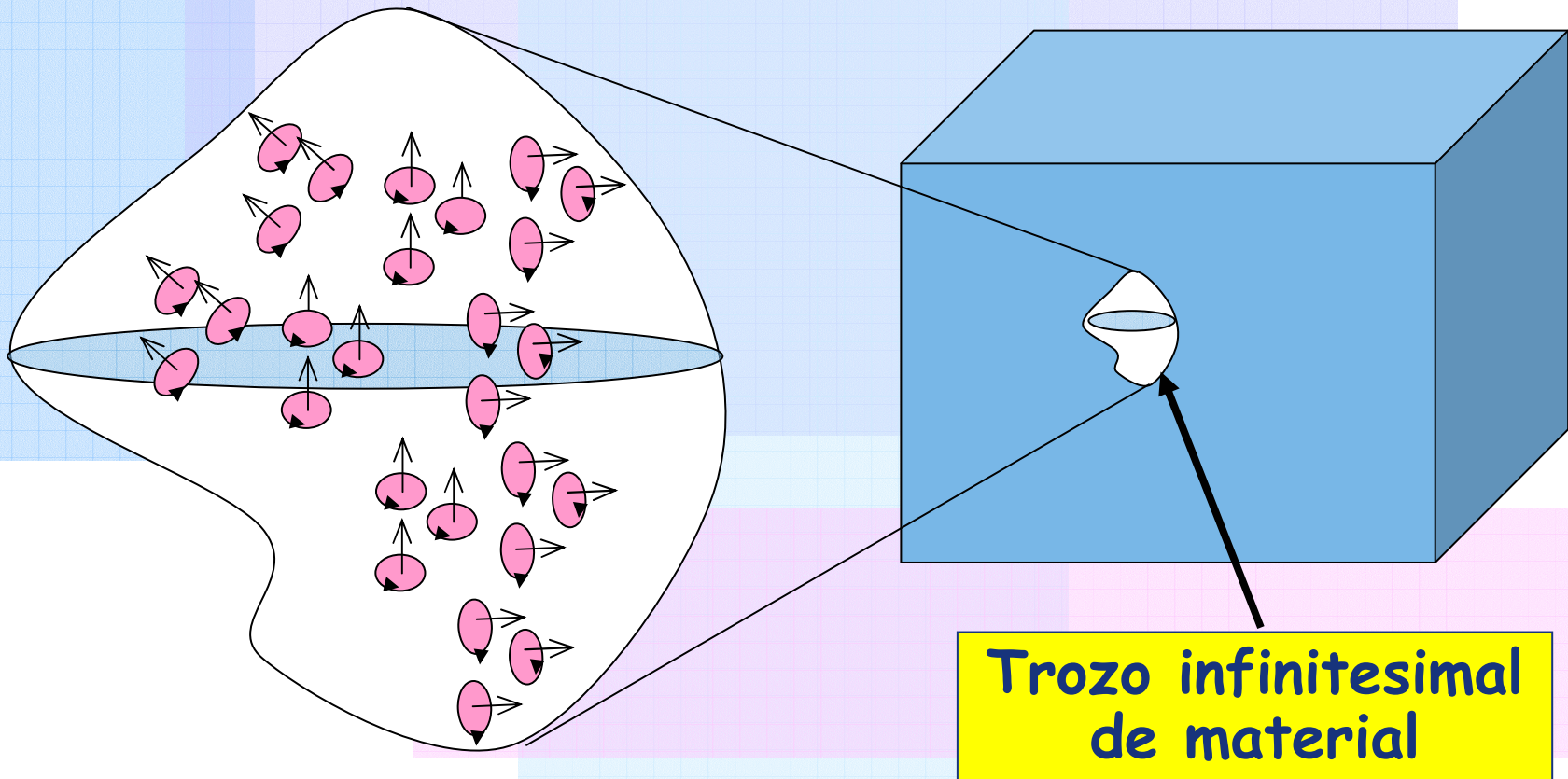
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



# Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)



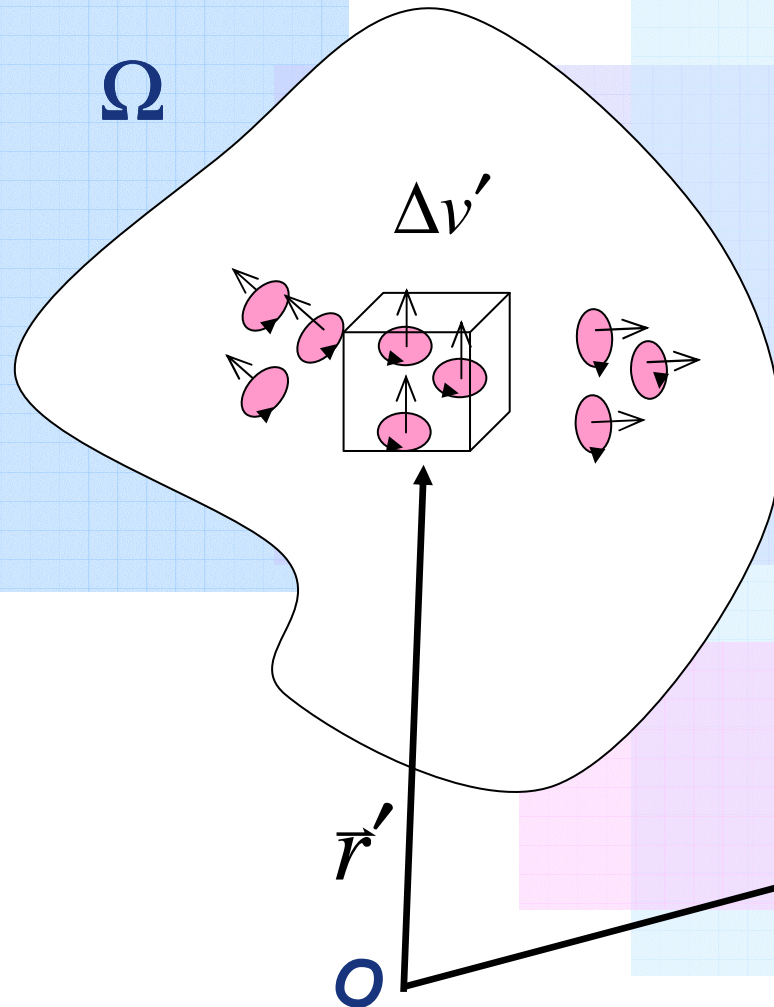
**Trozo infinitesimal  
de material**





# Corrientes de Magnetización

Consideremos un material magnetizado



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$

¿Como es el campo  
magnético producido por  
este material?

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$

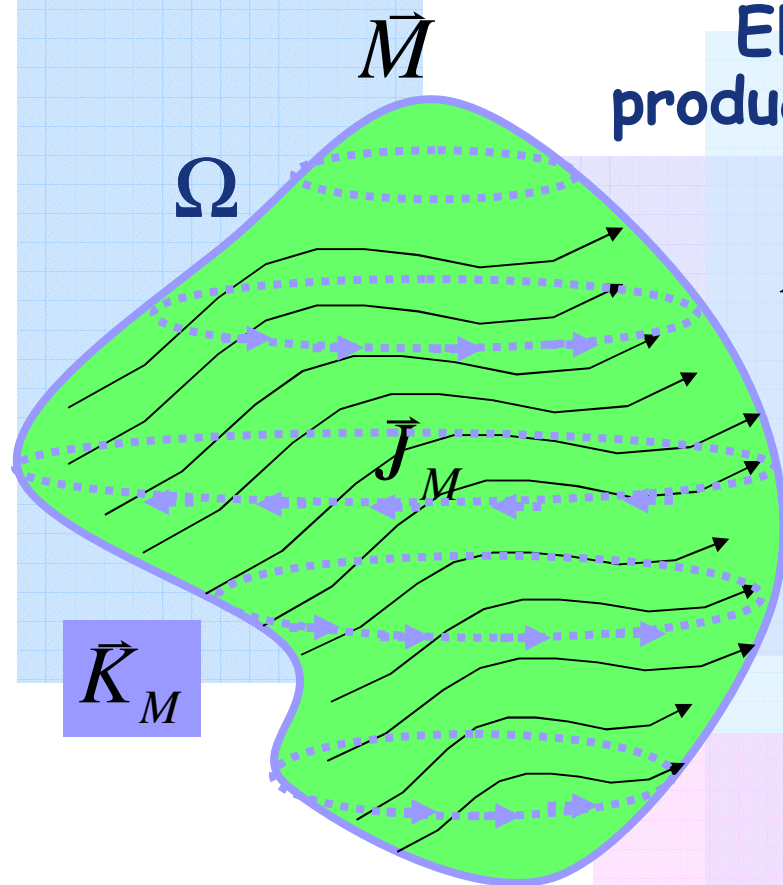
$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \nabla \times \vec{A}$$



# Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$



Potencial  
producido  
por una  
densidad de  
corriente  
en volumen

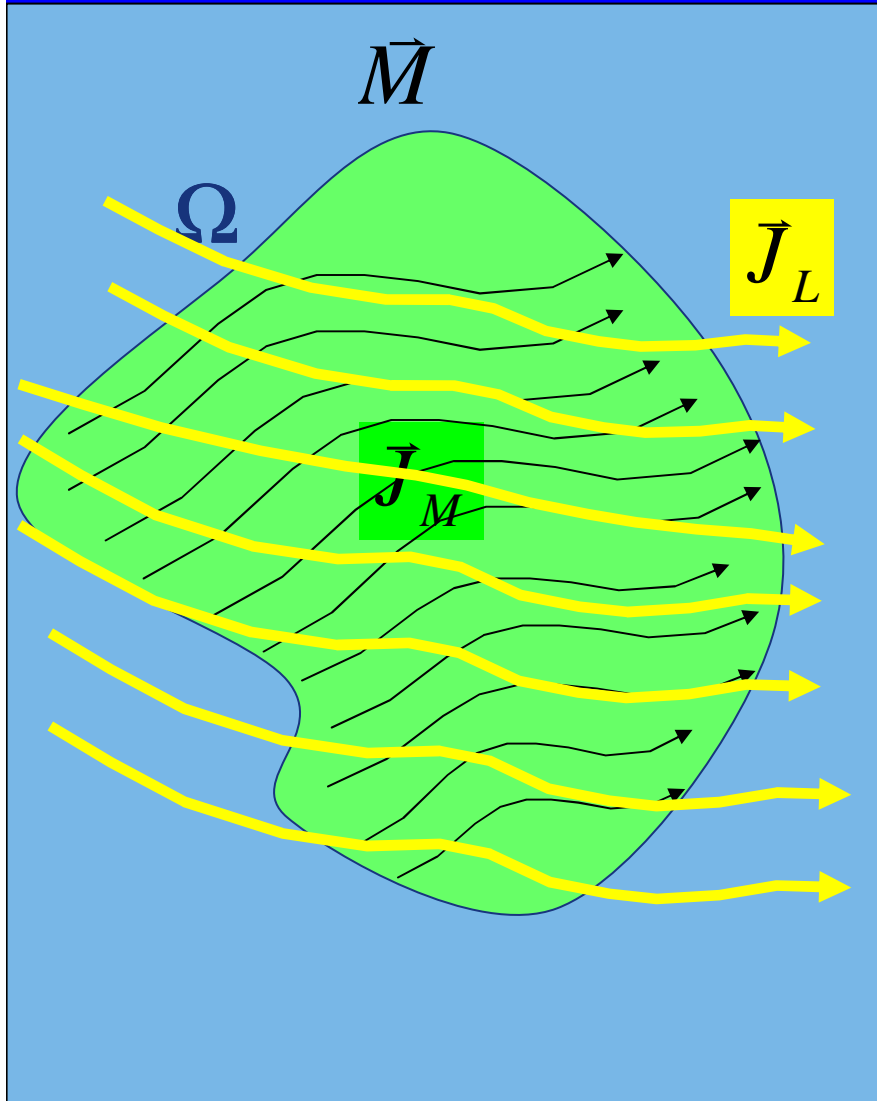
Potencial  
producido  
por una  
densidad de  
corriente de  
superficie

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}$$



# Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación  
de maxwell es

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos  
tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

Corriente  
libre

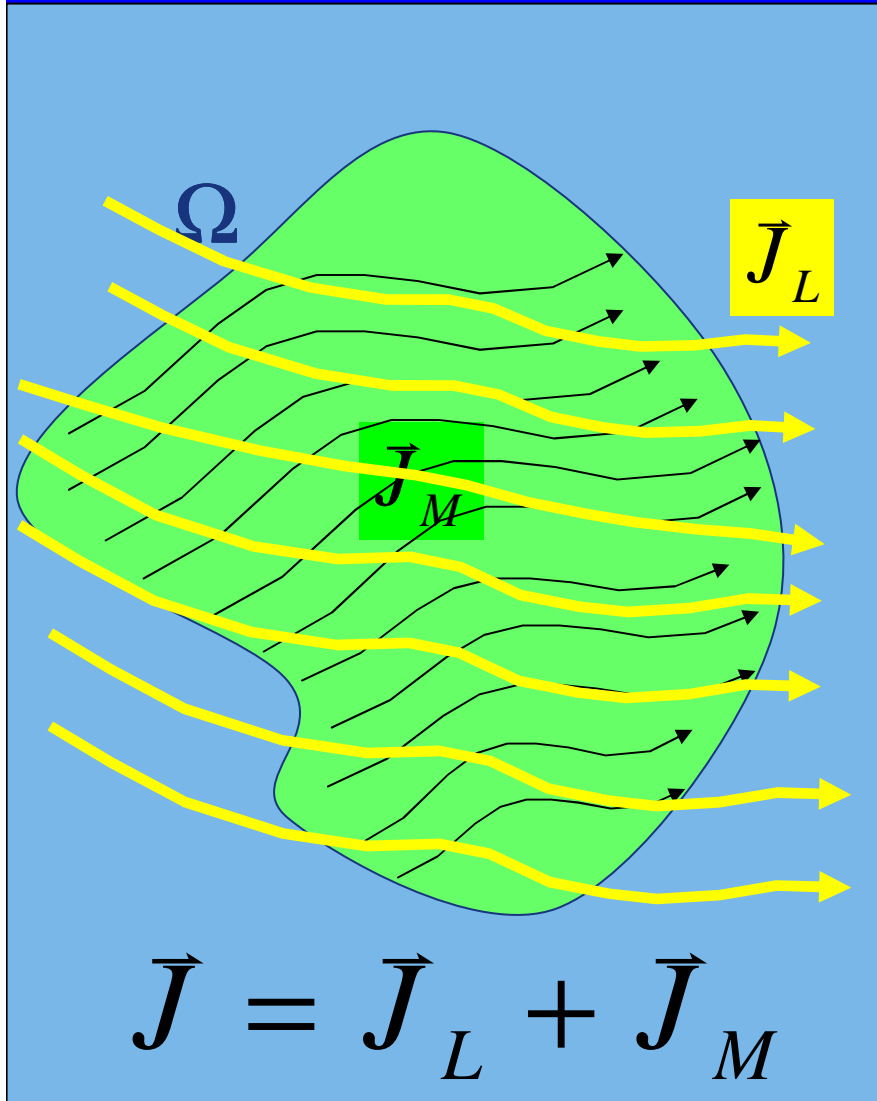
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

Corriente de  
magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



# Permeabilidad magnética



$$\Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Experimentalmente se encuentra que  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

permeabilidad relativa del material  $\mu_R$

$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H}$$

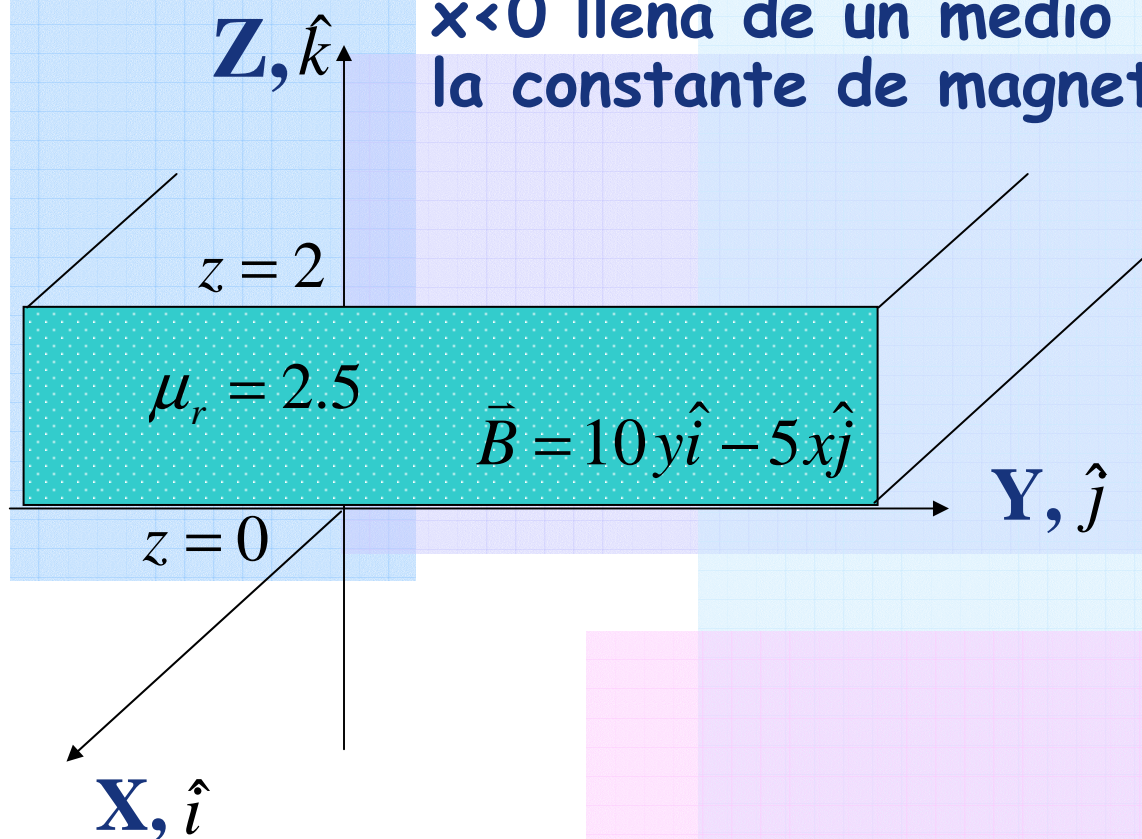
Permeabilidad magnética del material  $\mu = \mu_R \mu_0$





## Ejemplo

Considere una región del espacio definida por  $x < 0$  llena de un medio magnetizado. Dados  $\vec{B}$  y la constante de magnetización relativa se pide



$$\vec{M} = ?$$

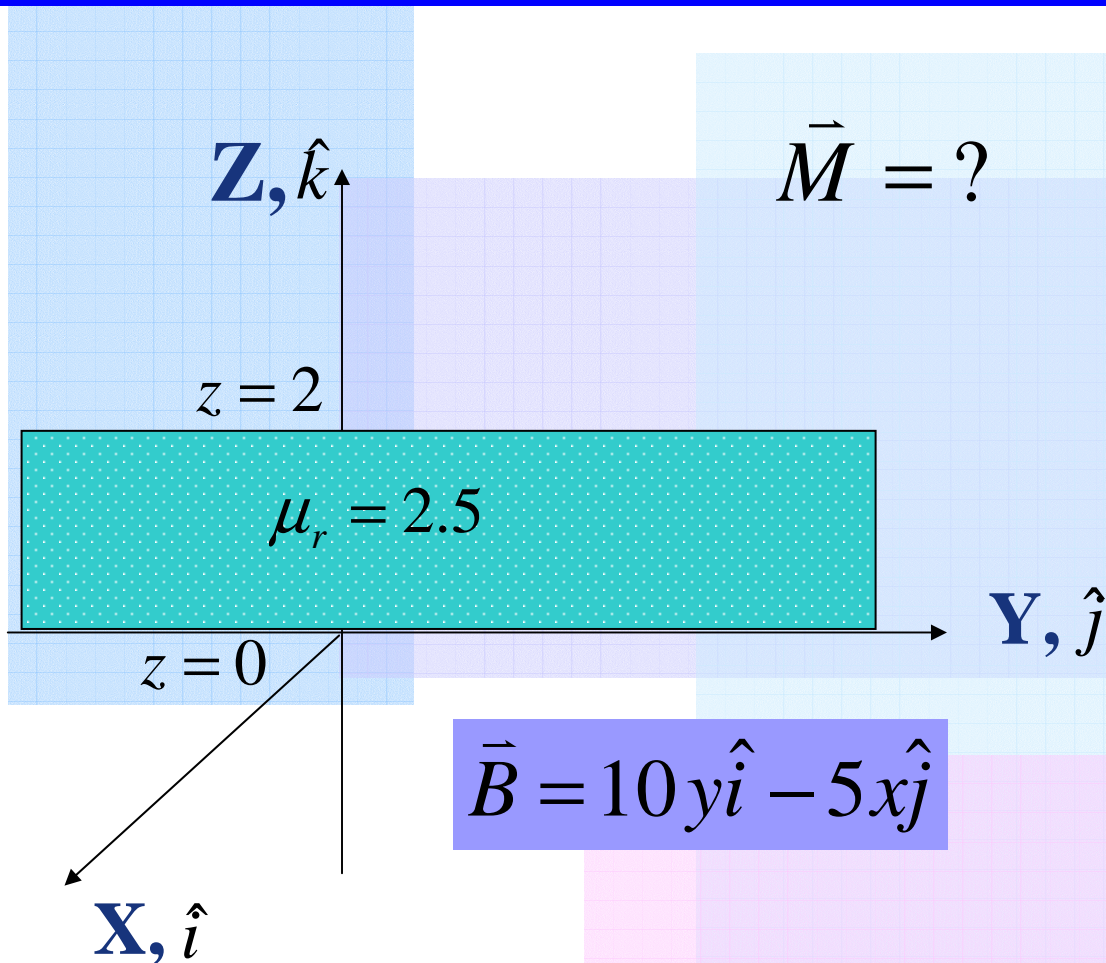
$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = ?$$

$$\vec{J}_L = ?$$



# Ejemplo



$$\vec{M} = ?$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

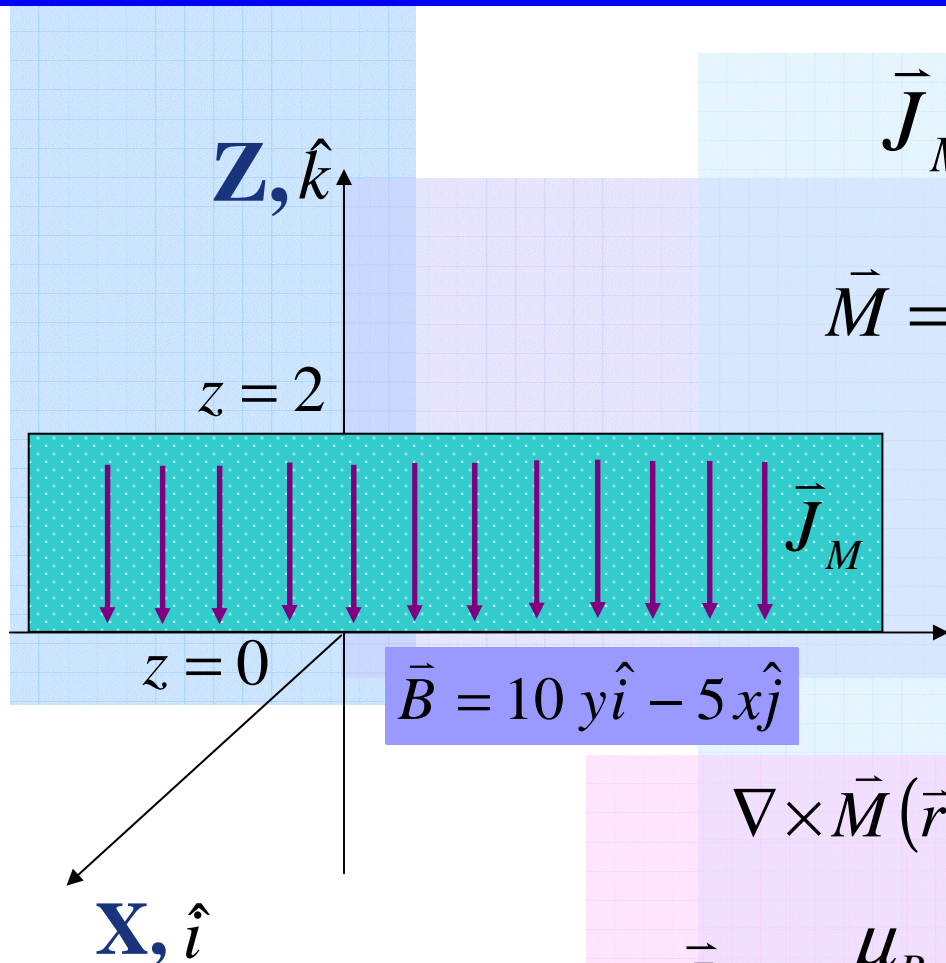
$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_R \mu_0$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) \vec{B}$$

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$



# Ejemplo



$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial M_y}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \hat{k} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (-5\hat{k} - 10\hat{k}) = -\frac{15(\mu_R - 1)}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$$



# Ejemplo

Diagram of a magnetic medium with permeability  $\mu_r = 2.5$  in the region  $0 \leq z \leq 2$ . The medium is bounded by the planes  $z=0$  and  $z=2$ . The magnetic field vector  $\vec{B}$  is given by  $\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$  in the region  $z=0$ .

The magnetic field vector  $\vec{M}$  is defined by the equation:

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

The magnetic field vector  $\vec{M}$  is given by:

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

The unit normal vector  $\hat{n}$  is defined by the boundary conditions:

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & \text{en } z = 0 \\ \hat{k} & \text{en } z = 2 \\ \hat{i} & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

The magnetic field vector  $\vec{M}$  is given by:

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x\hat{j} + M_y\hat{i}$$

The magnetic field vector  $\vec{M}$  is given by:

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=2} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

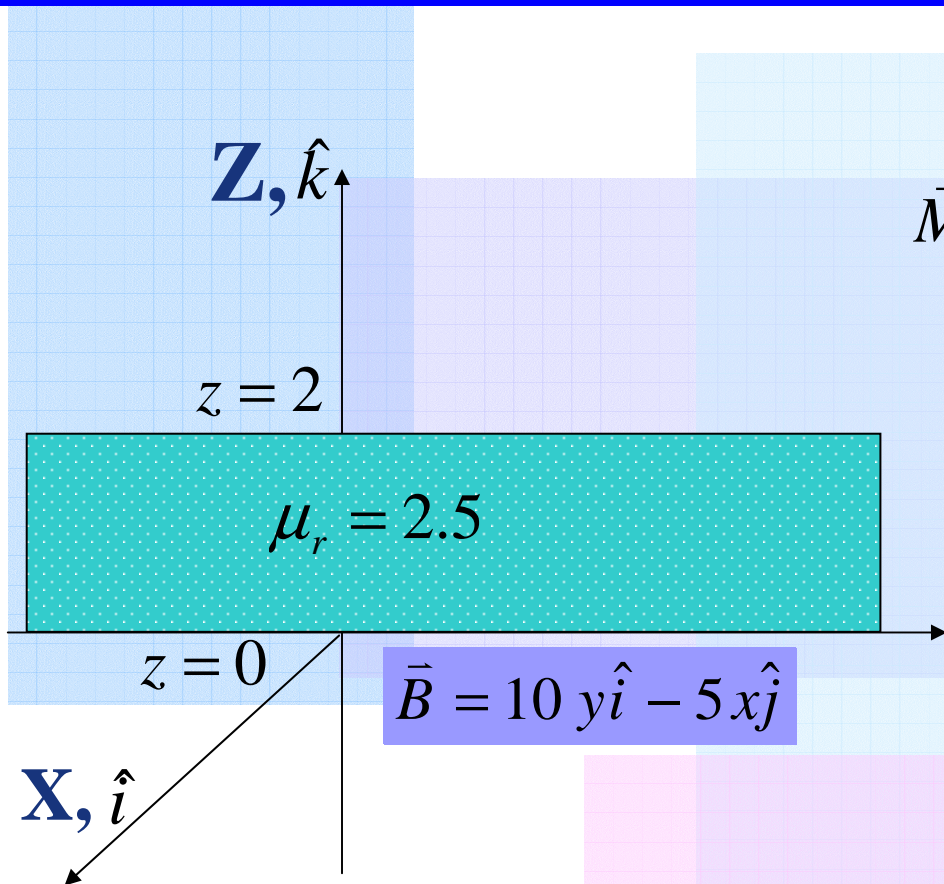
The magnetic field vector  $\vec{M}$  is given by:

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = M_x\hat{j} - M_y\hat{i} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$





# Ejemplo



$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j}) = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

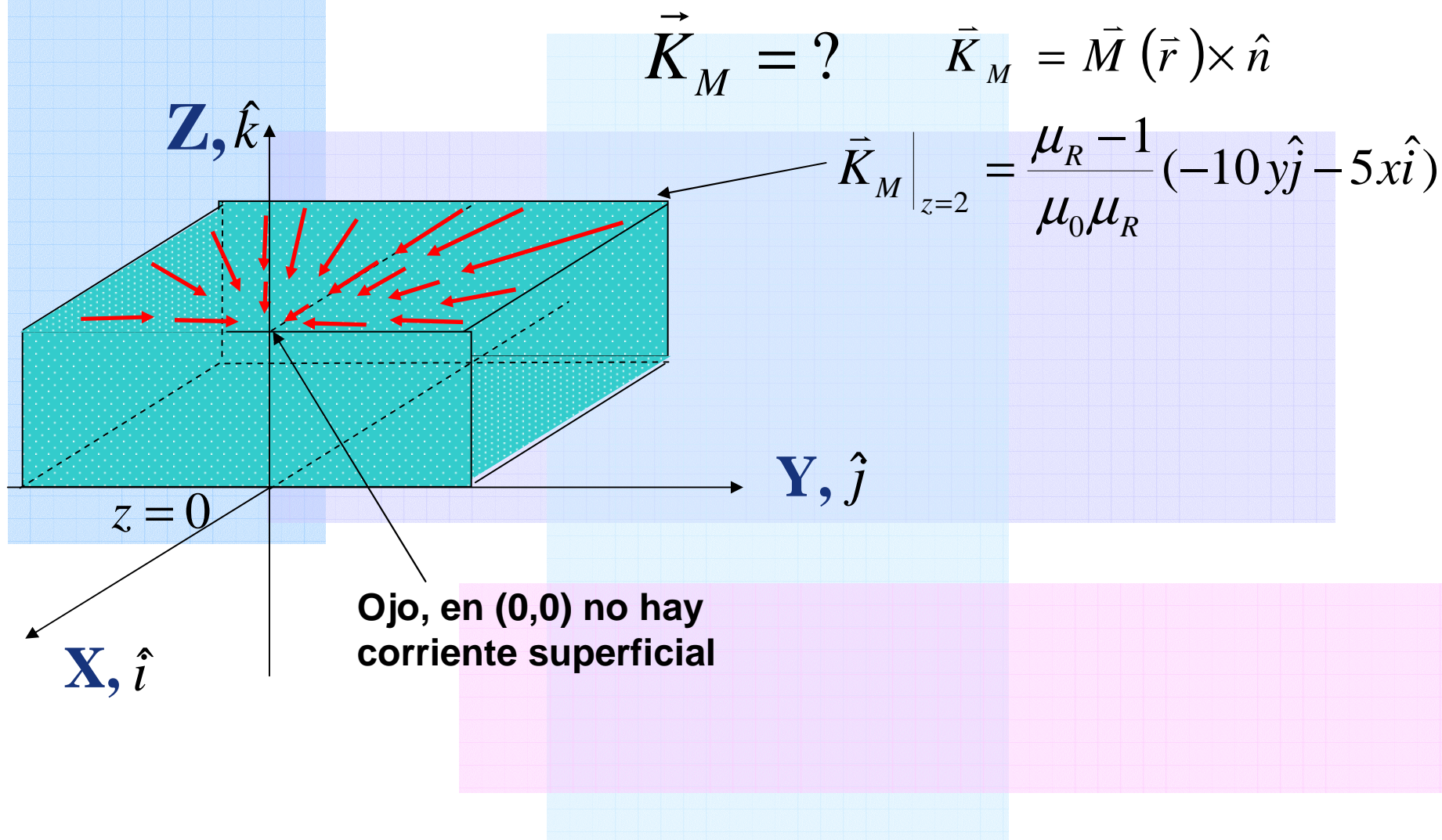
$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & \text{en } z=0 \\ \hat{k} & \text{en } z=2 \\ \hat{i} & \text{en } x=0 \end{cases}$$

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{x=0} \times \hat{n} = \left( \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} \right) (10 y \hat{i}) \times \hat{i}$$

$$\vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = M_x \hat{j} - M_y \hat{i} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) \Big|_{z=0} \times \hat{n} = \frac{\mu_R - 1}{\mu_0 \mu_R} (10 y \hat{j} + 5 x \hat{i})$$

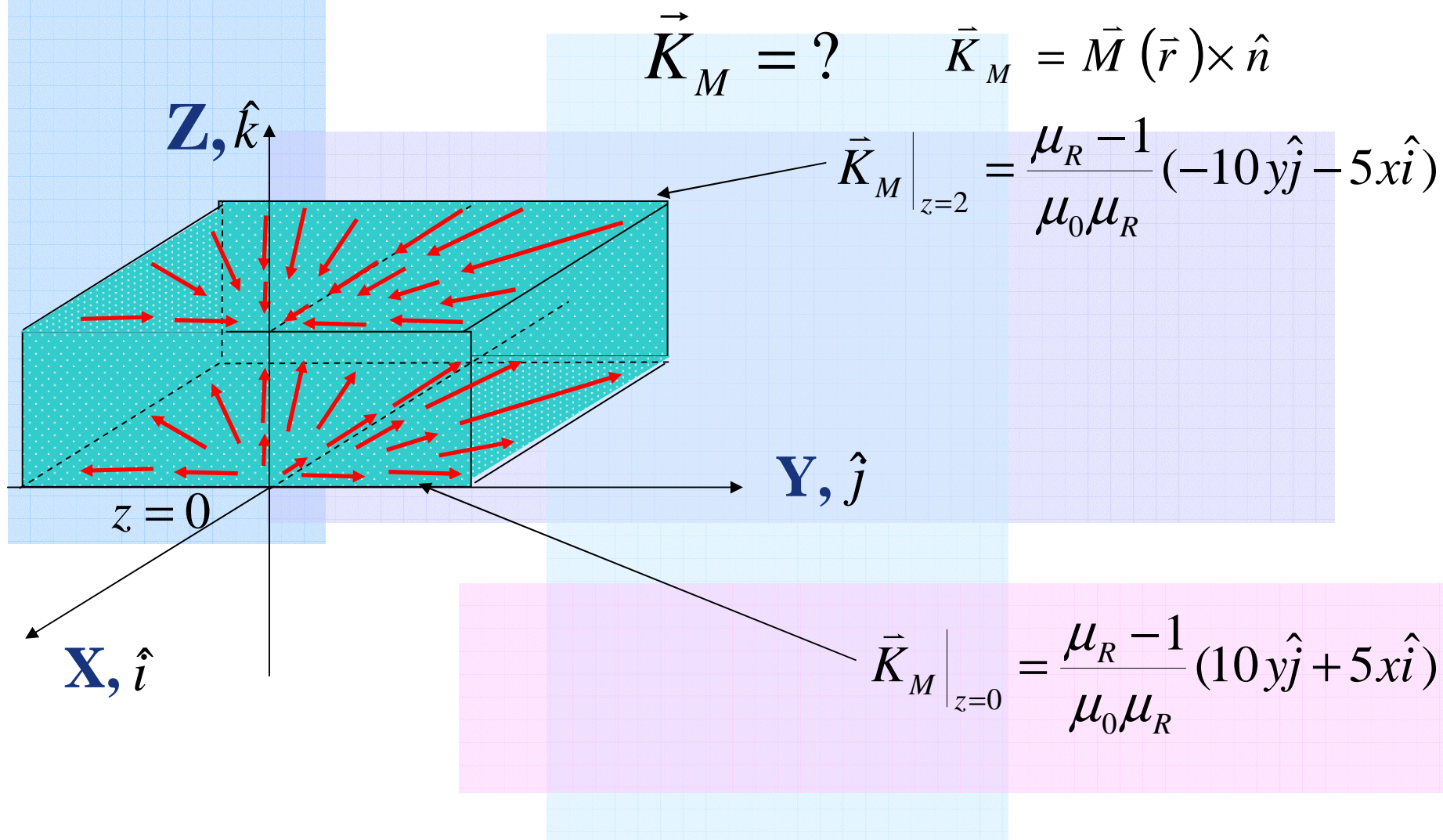


# Ejemplo



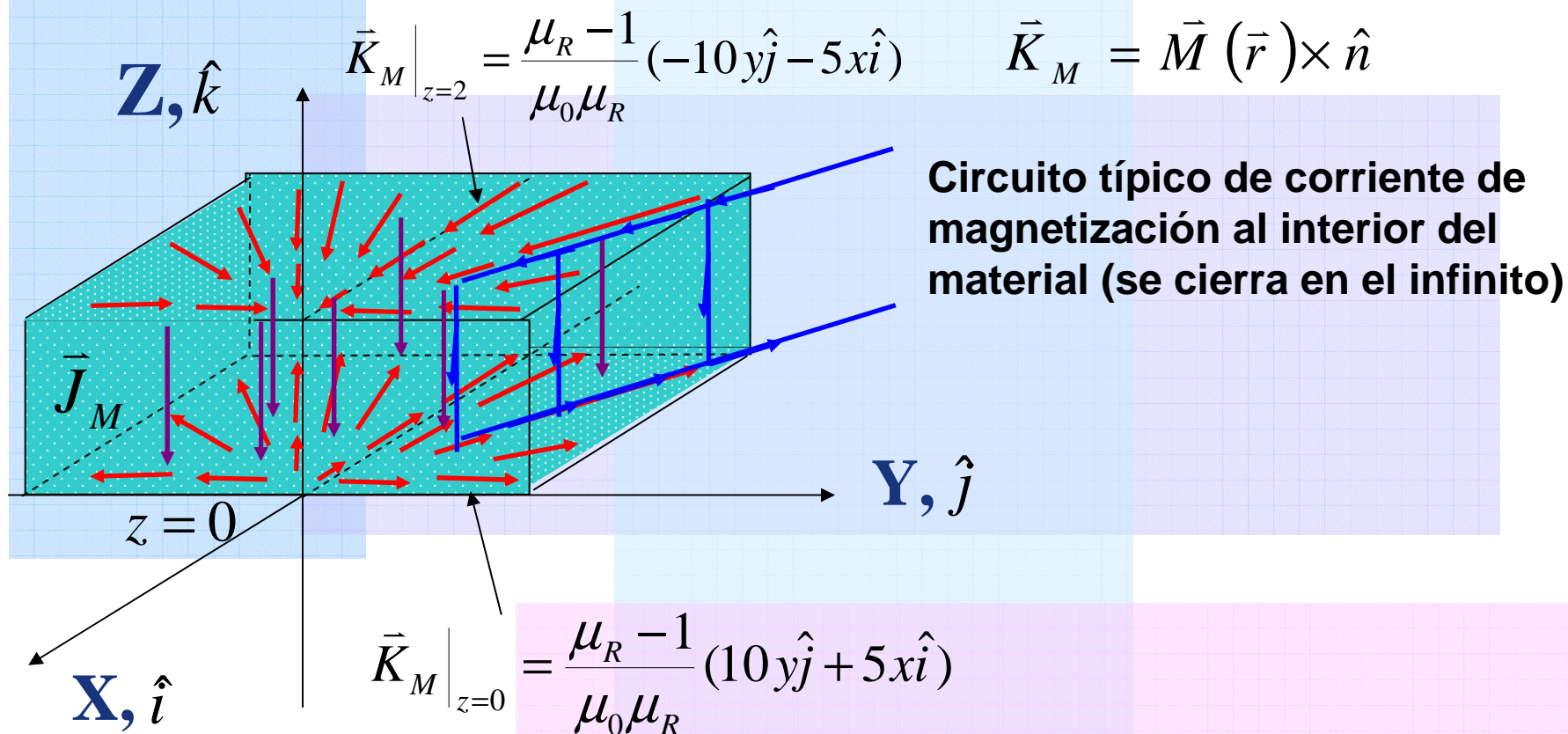


# Ejemplo





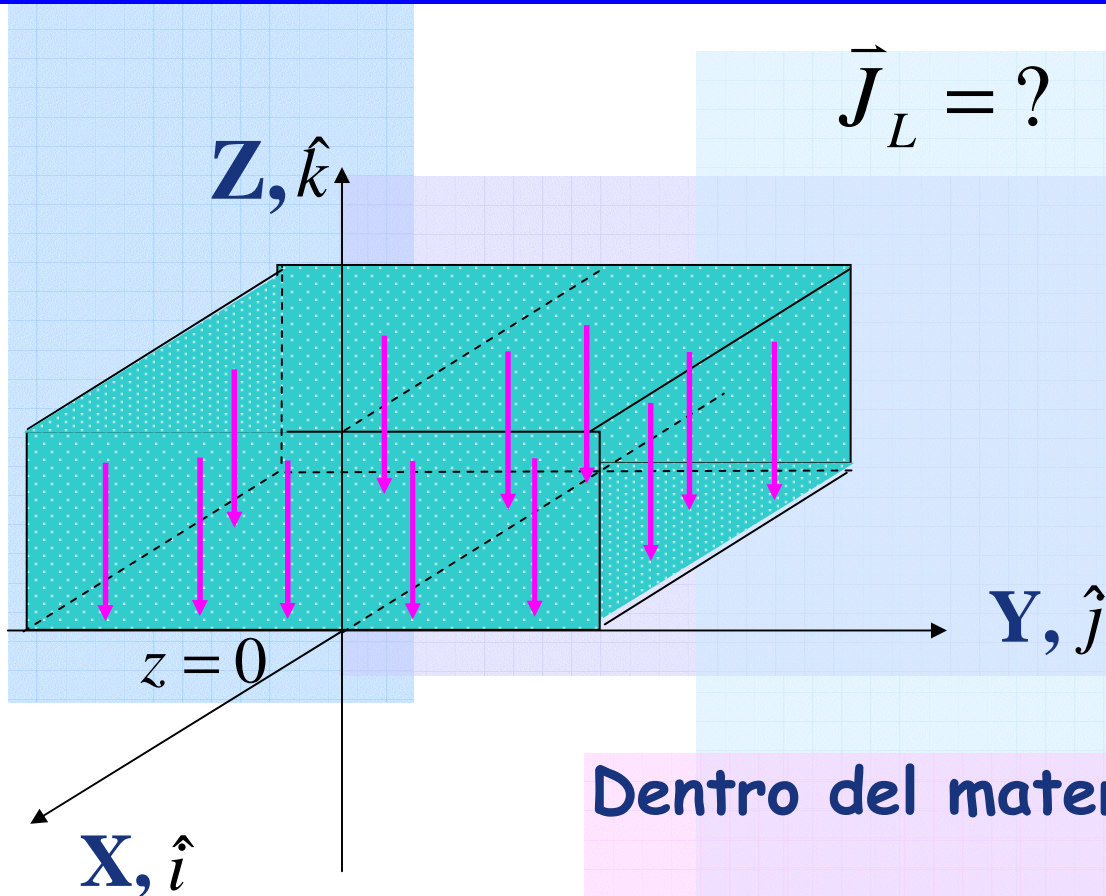
# Ejemplo







# Ejemplo



$$\vec{J}_L = ?$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

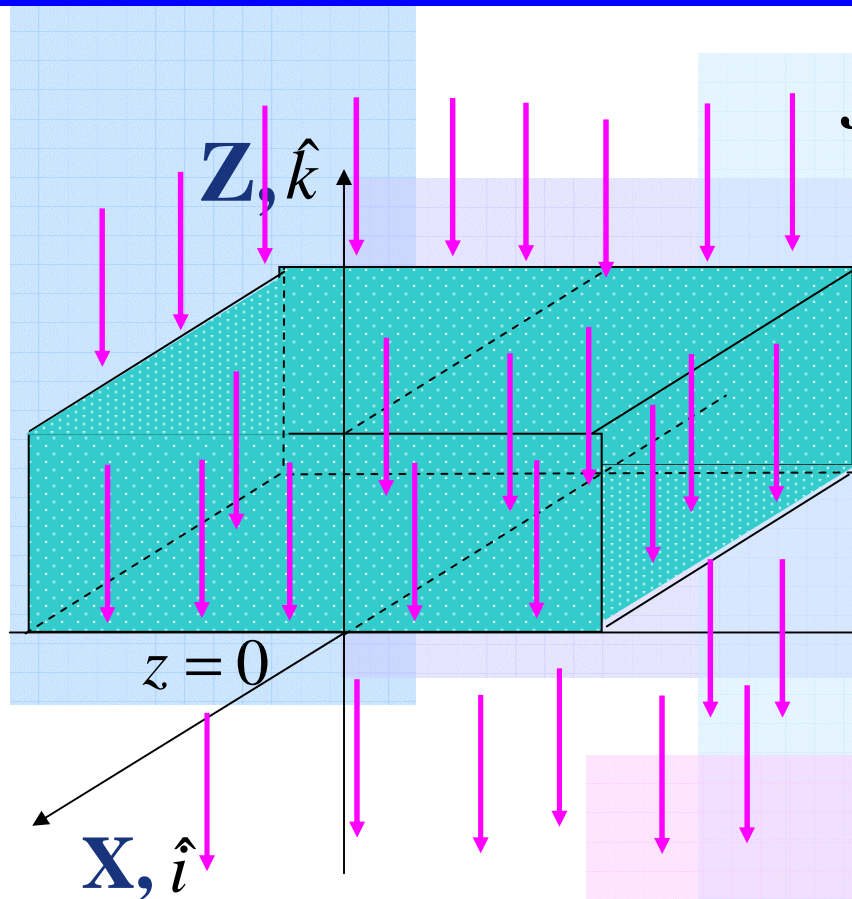
$$\vec{B} = 10 y \hat{i} - 5 x \hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j})$$

Dentro del material 
$$\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$$



# Ejemplo



$$\vec{J}_L = ?$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{B} = 10 y \hat{i} - 5 x \hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j})$$

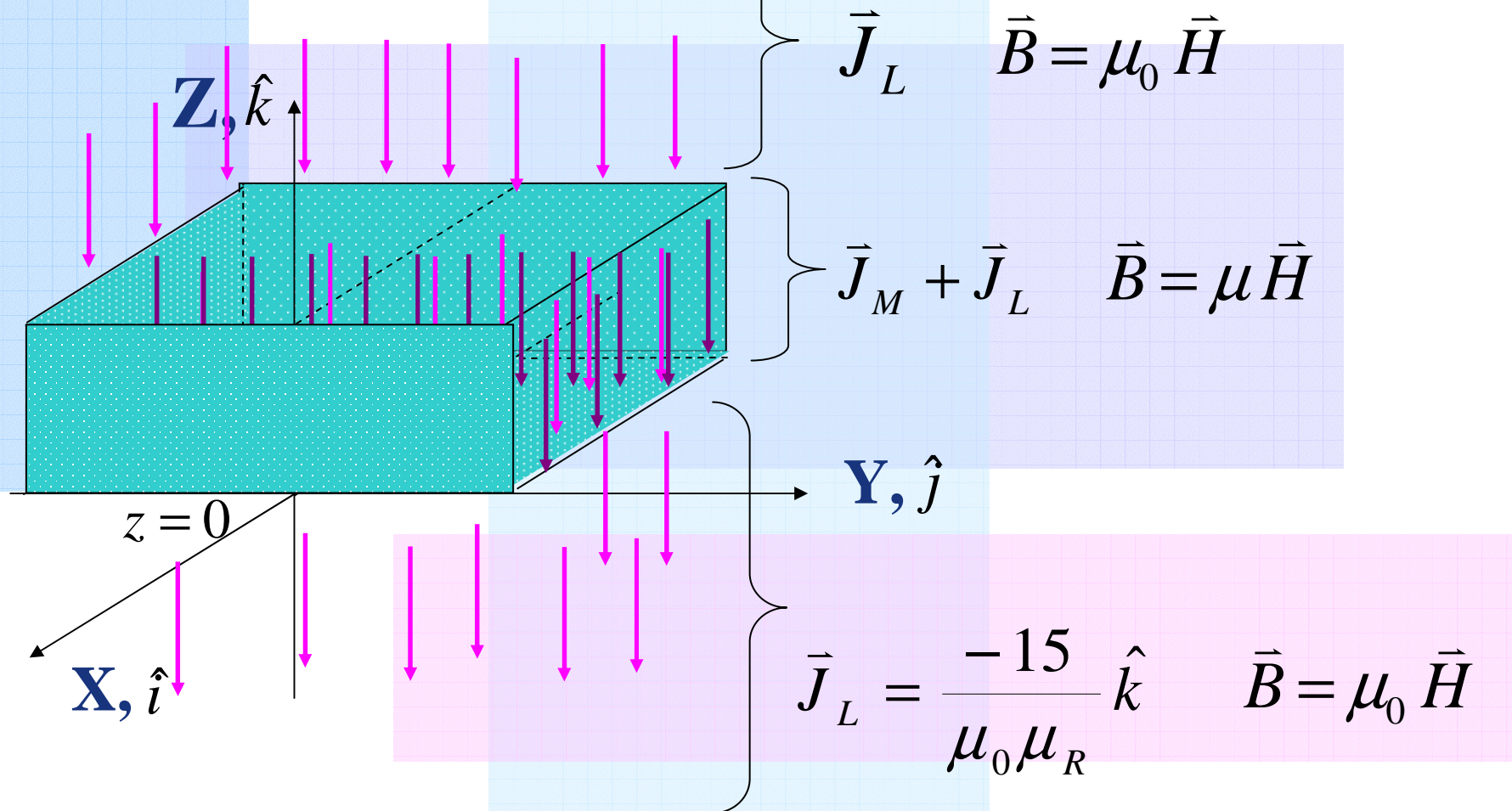
$$\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$$

Dentro y  
fuera del  
material



# Ejemplo

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L \quad \text{Todo el espacio}$$





# Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

## Materiales magnéticos

**Materiales  
diamagnéticos**

$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

**Materiales  
paramagnéticos**

$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

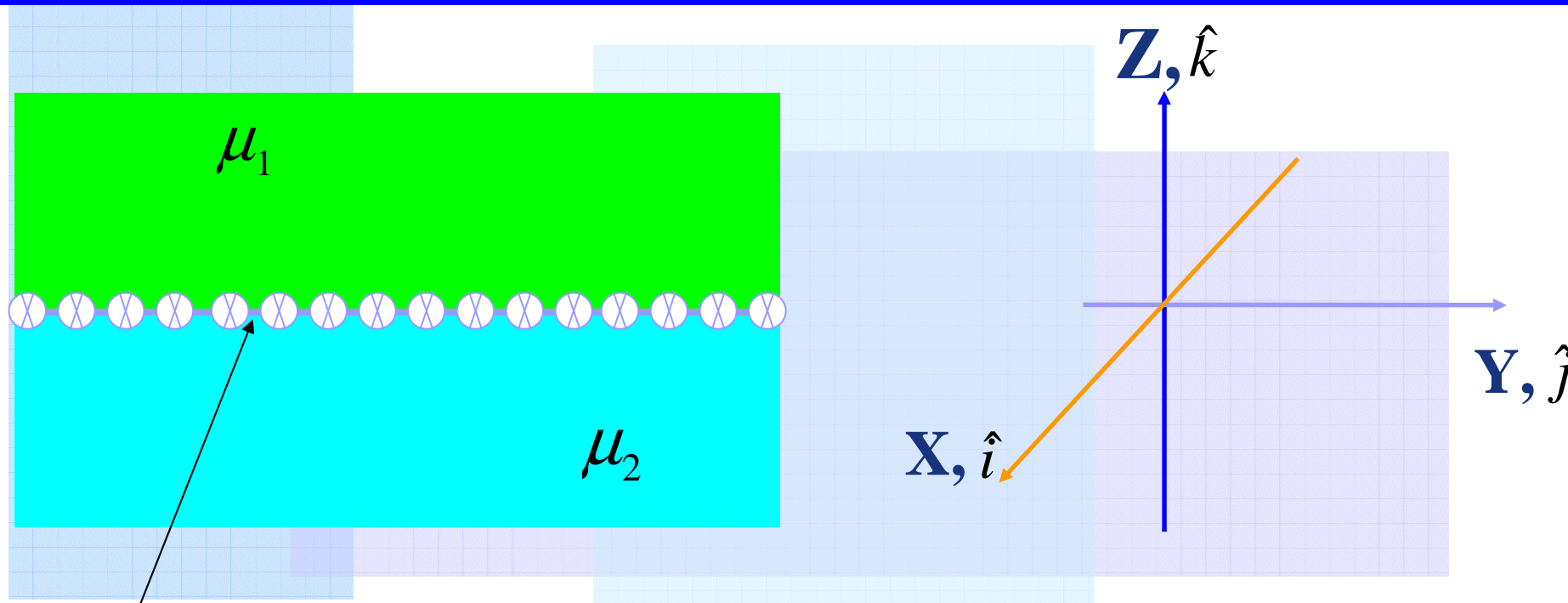
**Materiales  
Ferromagnéticos**

$$\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$$

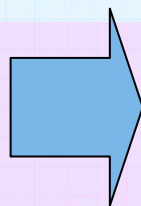




## Condiciones de borde entre dos medios



Plano de corriente  
entrando en la interfaz  
de dos medios

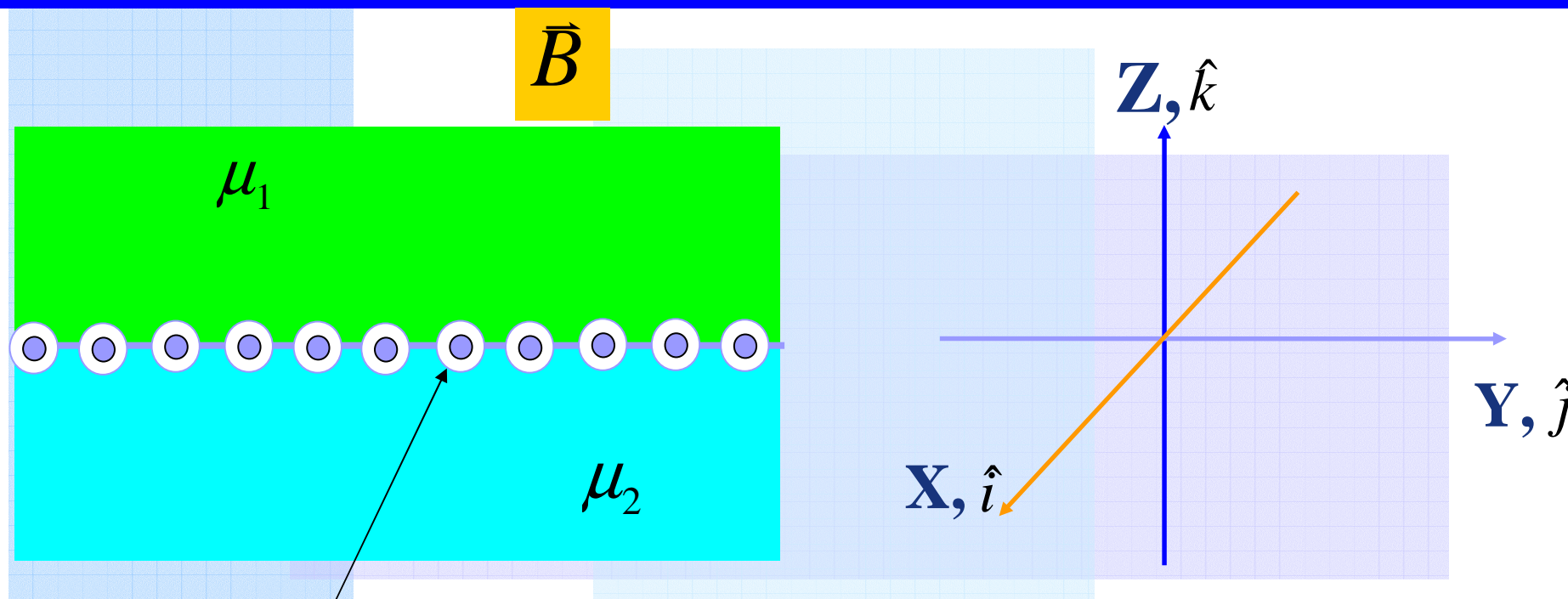


Densidad de  
corriente  
lineal

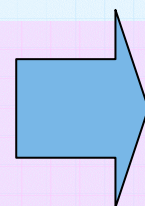
$$\vec{K} = K(-\hat{i})$$



## Condiciones de borde entre dos medios



Plano de corriente saliendo  
en la interfaz de  
dos  
medios

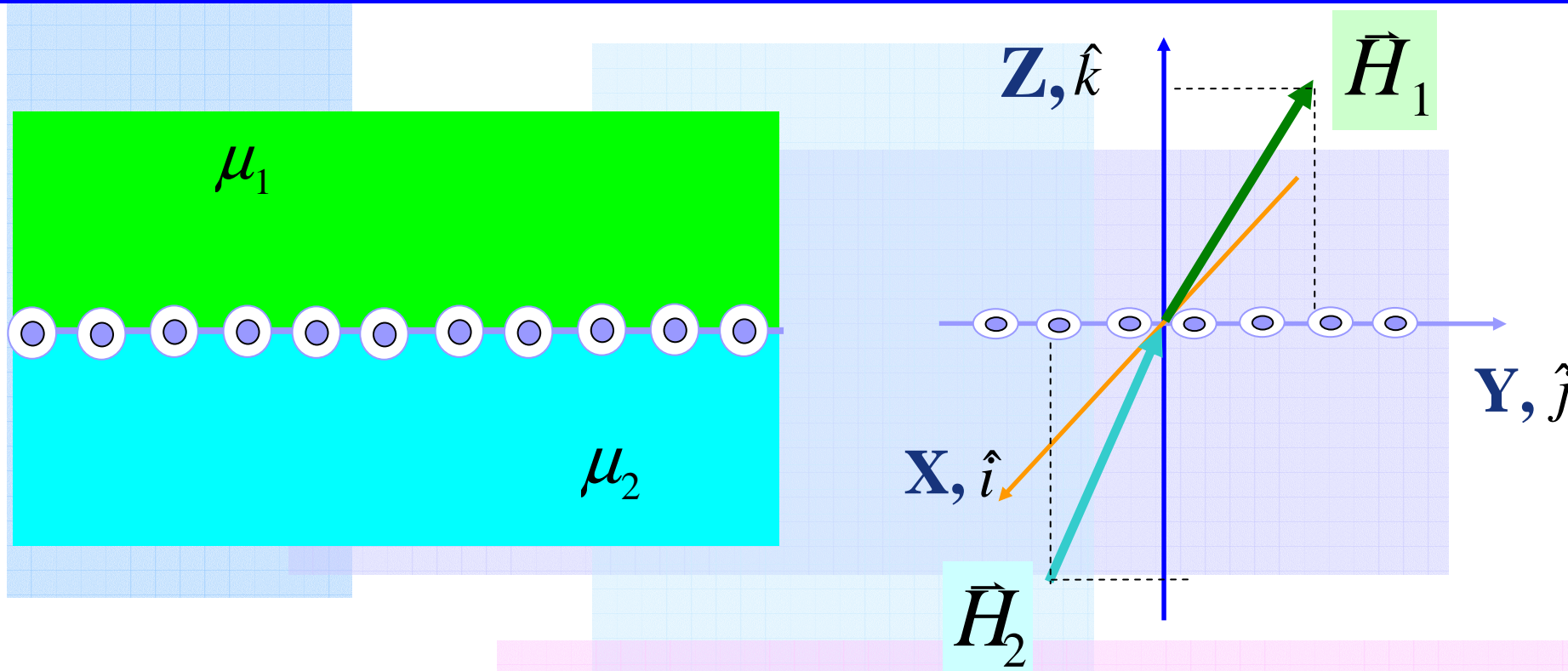


Densidad de  
corriente  
lineal

$$\vec{K} = K \hat{i}$$



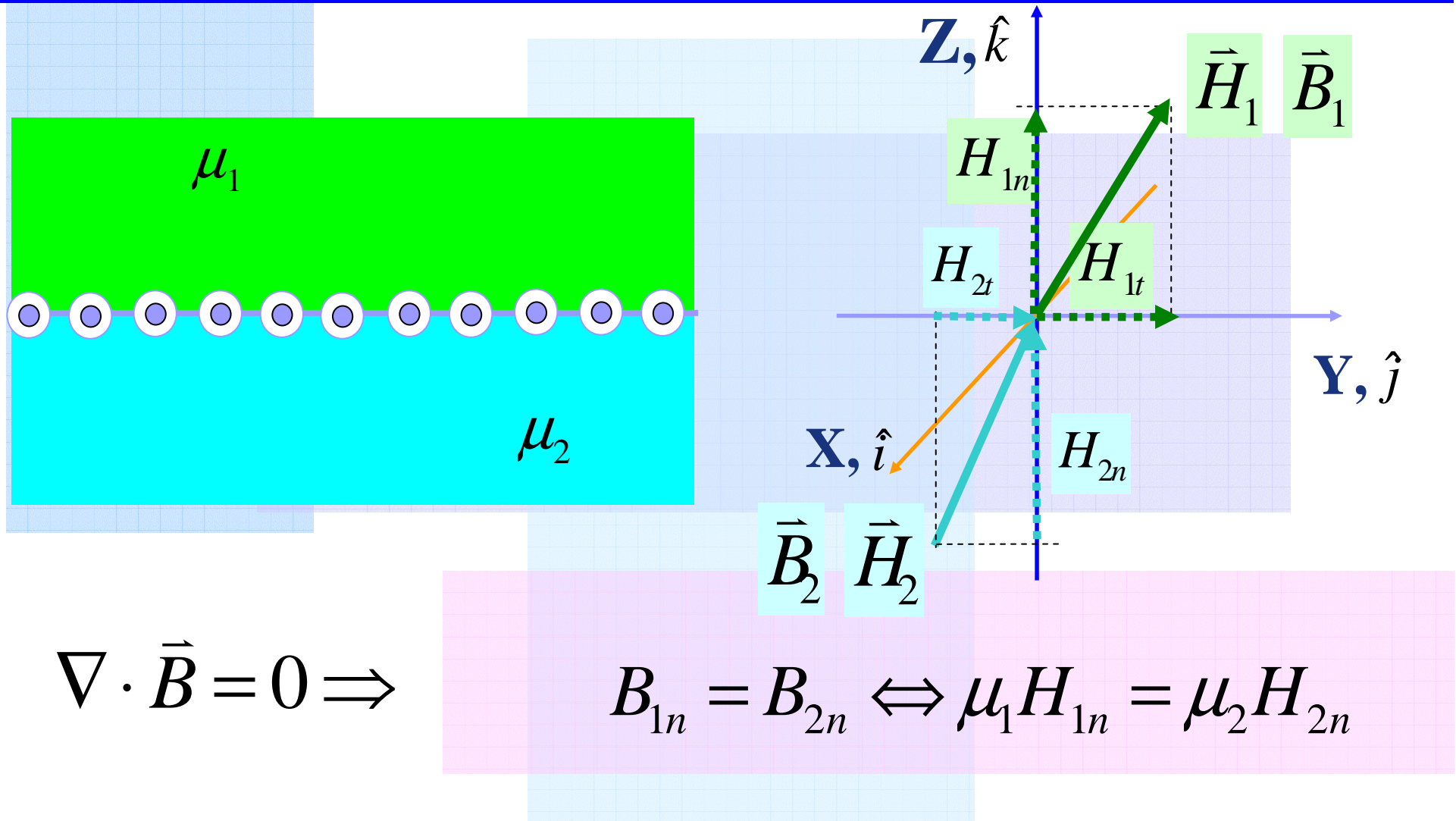
## Condiciones de borde entre dos medios



¿qué condiciones cumplen los campos magnéticos en la interfaz?



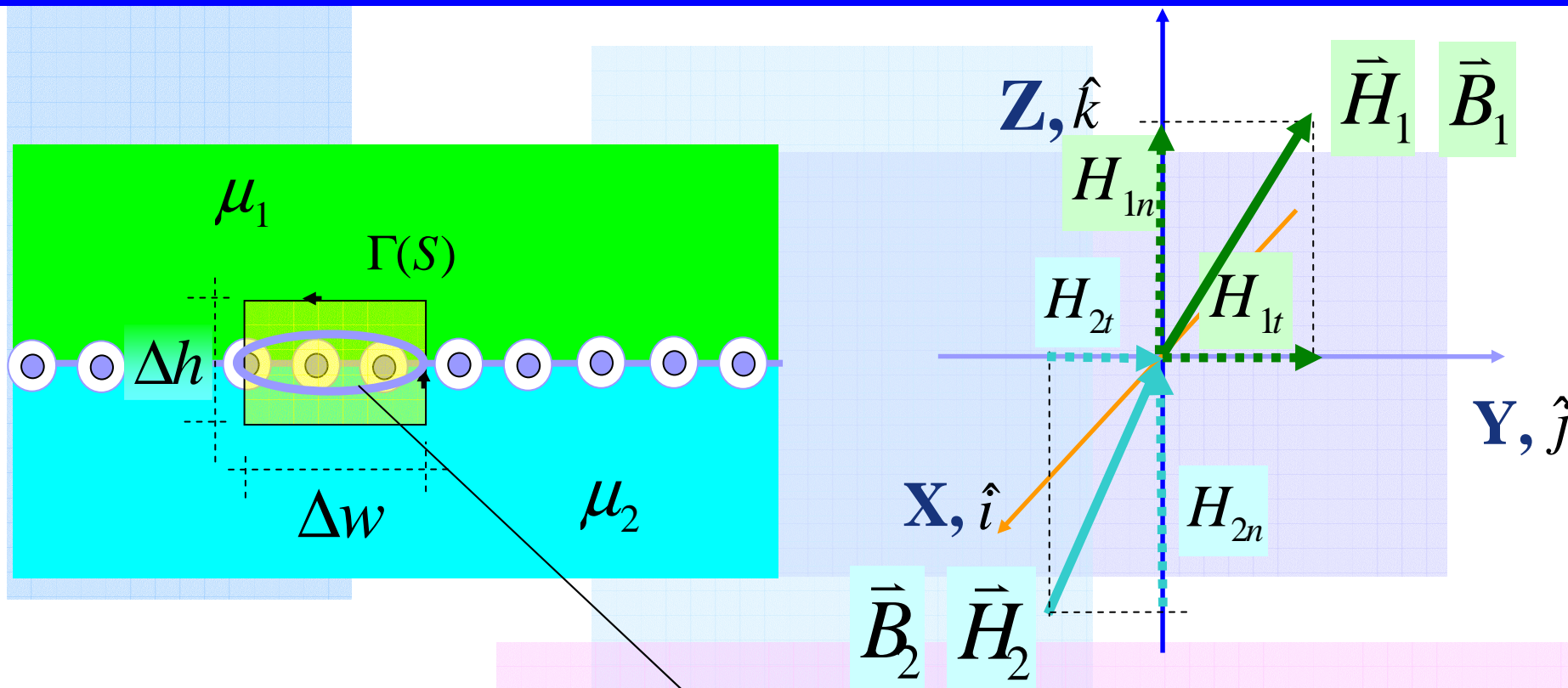
## Condiciones de borde entre dos medios







# Condiciones de borde entre dos medios

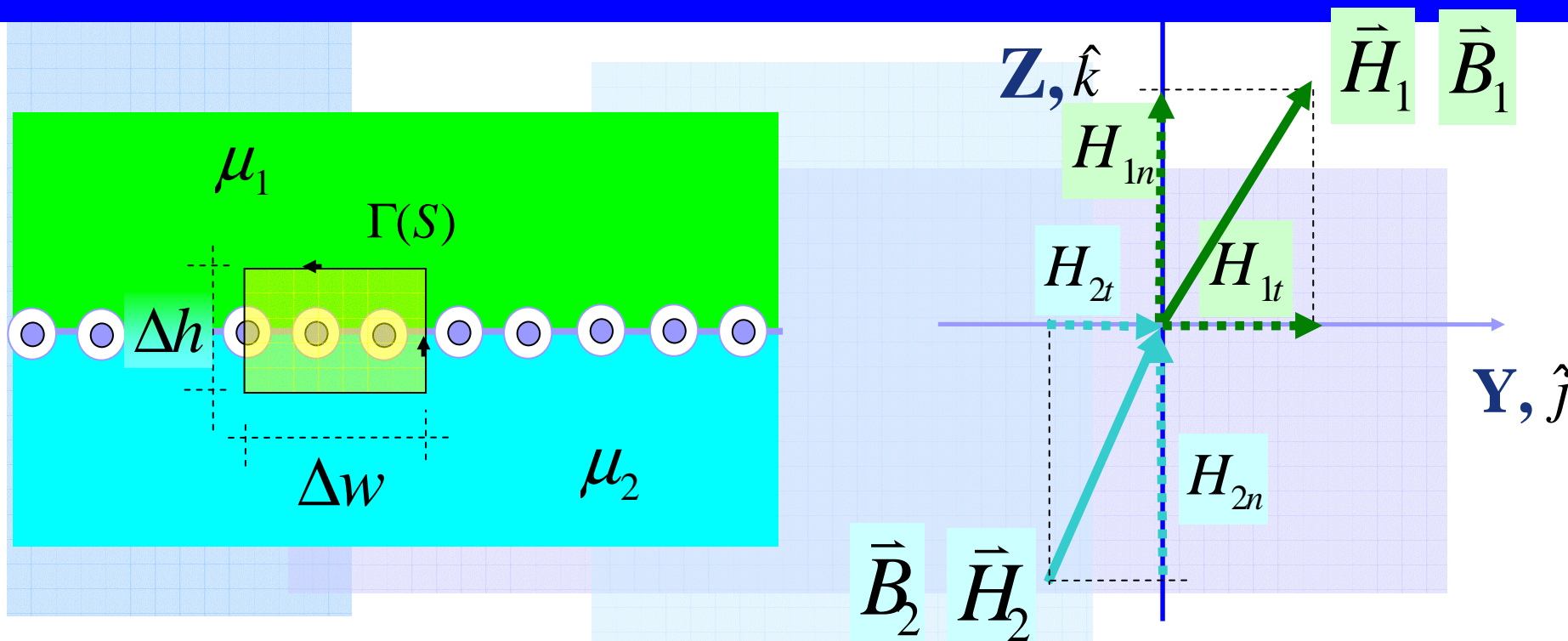


$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

$$I_{\text{enlazada}} = I_E = K\Delta w$$

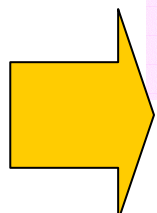


# Condiciones de borde entre dos medios



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T}\Delta w + H_{2N}\frac{\Delta h}{2} + H_{1N}\frac{\Delta h}{2} - H_{1T}\Delta w - H_{1N}\frac{\Delta h}{2} - H_{2N}\frac{\Delta h}{2}$$

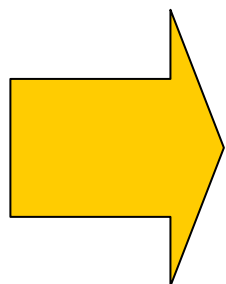
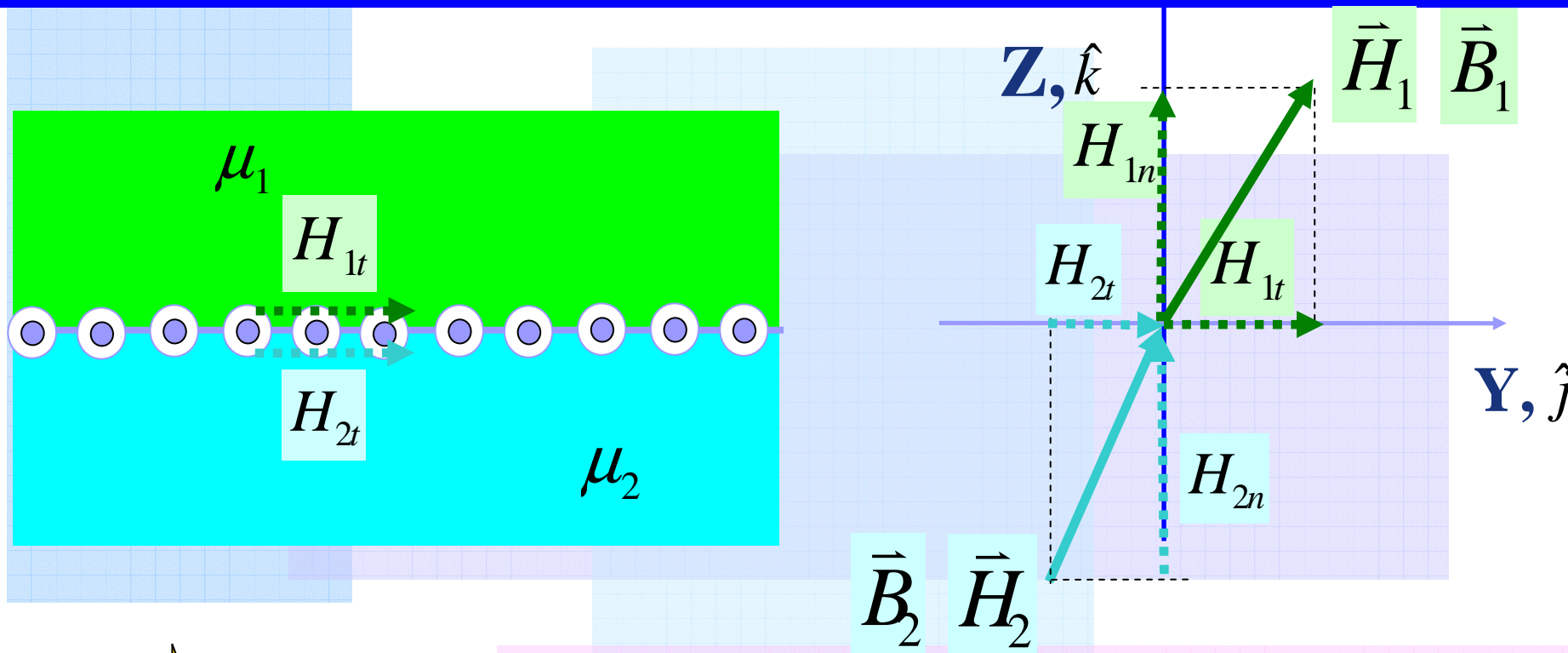
para  $\Delta h \rightarrow 0$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{2T}\Delta w - H_{1T}\Delta w$$



## Condiciones de borde entre dos medios

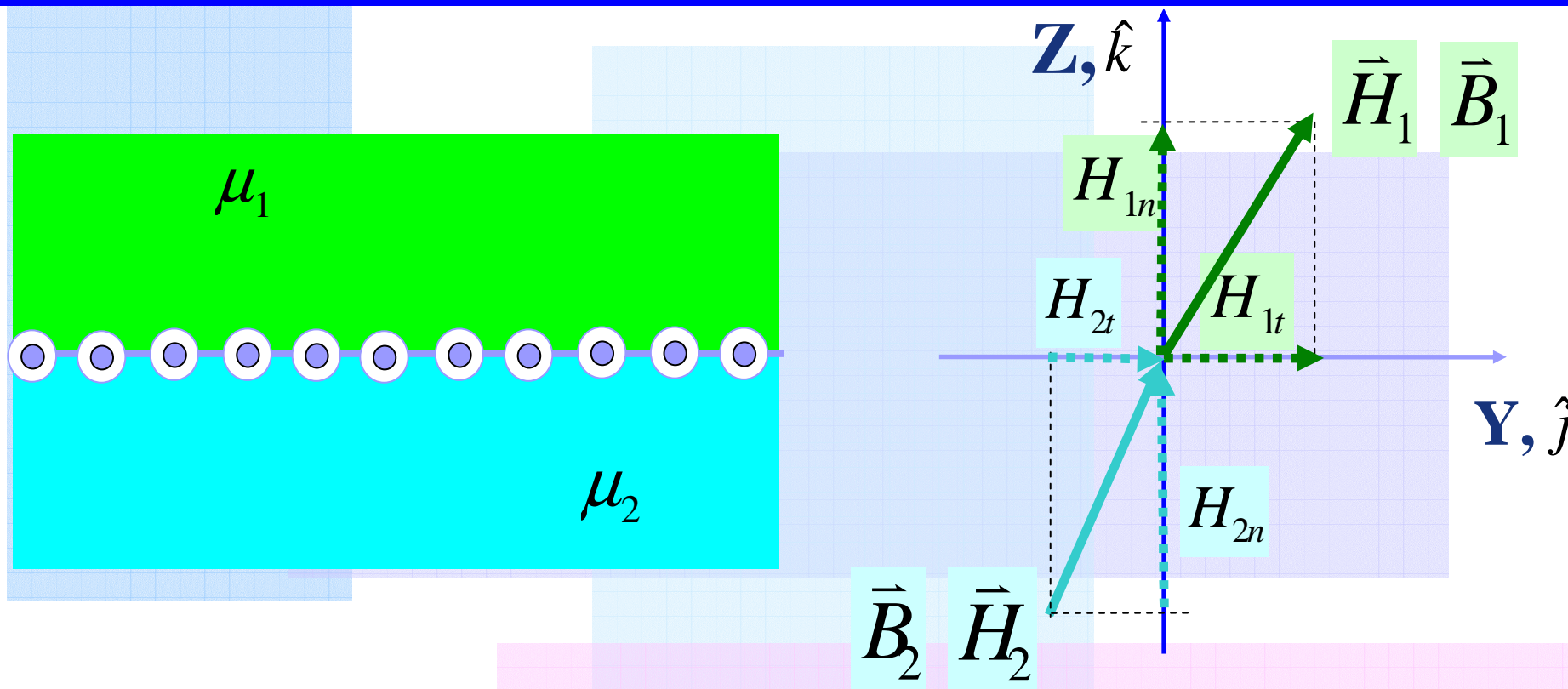


$$H_{2T}\Delta w - H_{1T}\Delta w = K\Delta w$$

$$\therefore H_{2T} - H_{1T} = K$$



## Condiciones de borde entre dos medios



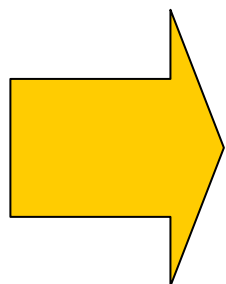
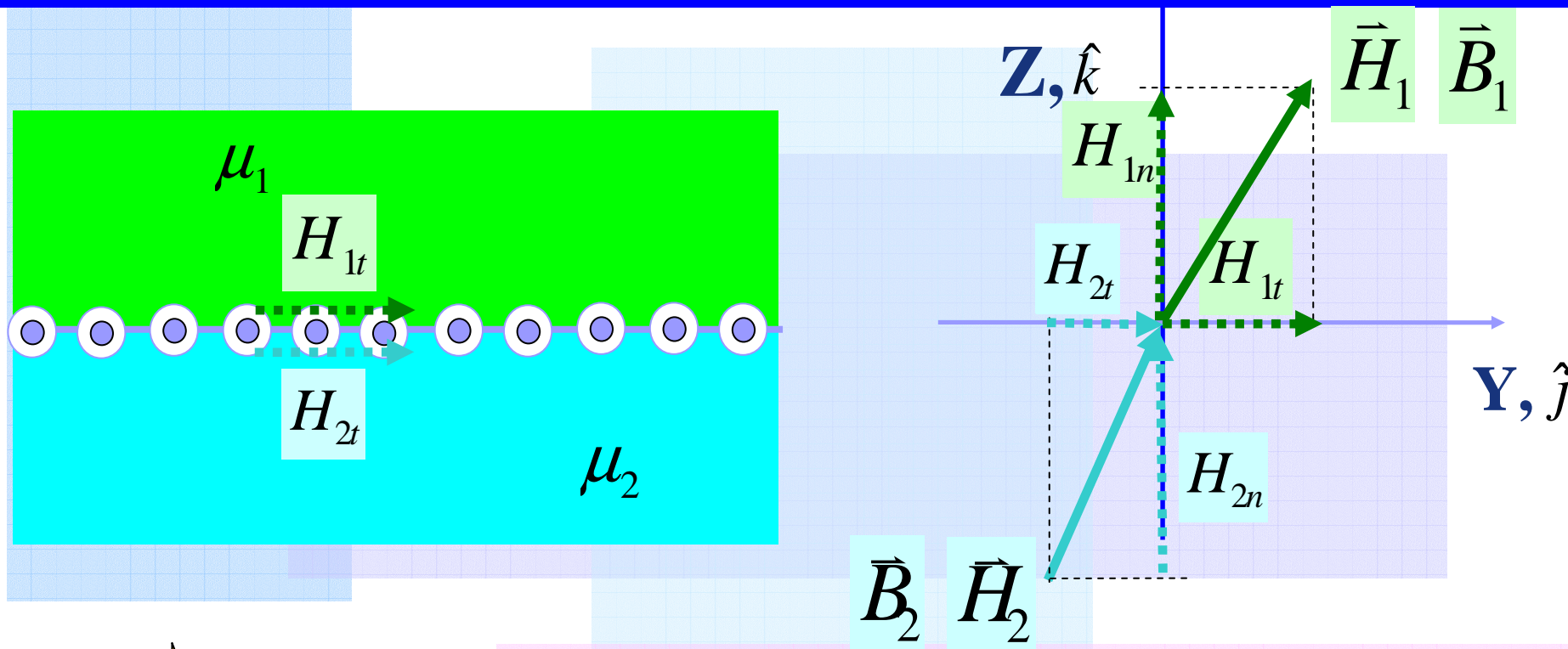
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$





# Condiciones de borde entre dos medios



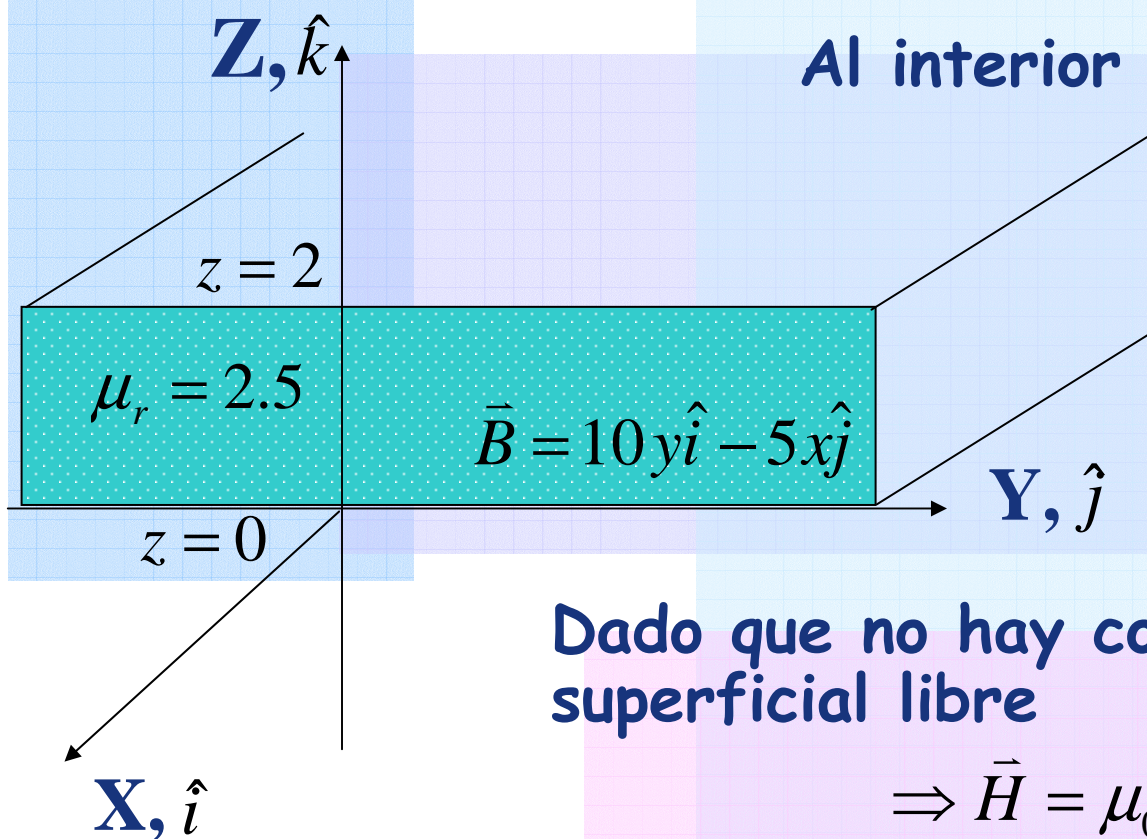
$$H_{2T}\Delta w - H_{1T}\Delta w = K\Delta w$$

$$\therefore H_{2T} - H_{1T} = K$$



## Ejemplo

Dado  $\vec{B}$  al interior del medio, determinar  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  afuera



Al interior

$$\vec{B} = 10y\hat{i} - 5x\hat{j}$$

$$\vec{H} = \mu_0\mu_r(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$

Al exterior

$$B_{1n} = B_{2n} = \vec{B} \cdot \hat{k} = 0$$

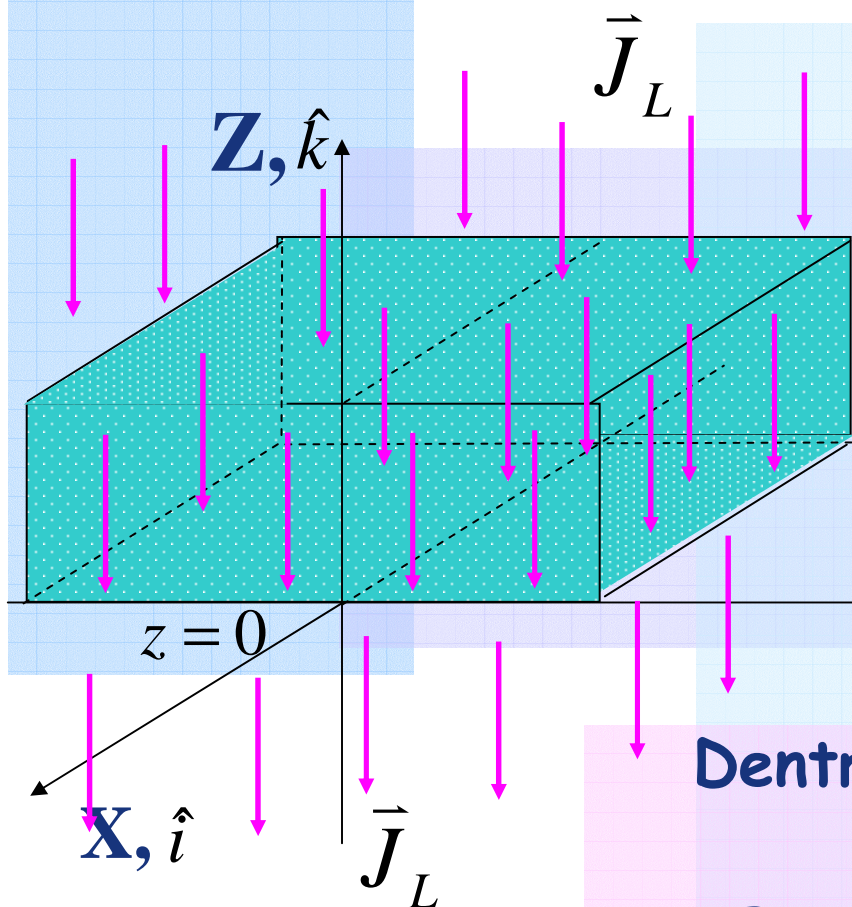
Dado que no hay corriente superficial libre

$$H_{2T} - H_{1T} = K = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \mu_0\mu_r(10y\hat{i} - 5x\hat{j})$$



# Ejemplo



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\vec{B} = 10 y \hat{i} - 5 x \hat{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} (10 y \hat{i} - 5 x \hat{j})$$

Dentro del material  $\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$

Fuera del material  $\vec{J}_L = \frac{-15}{\mu_0 \mu_R} \hat{k}$



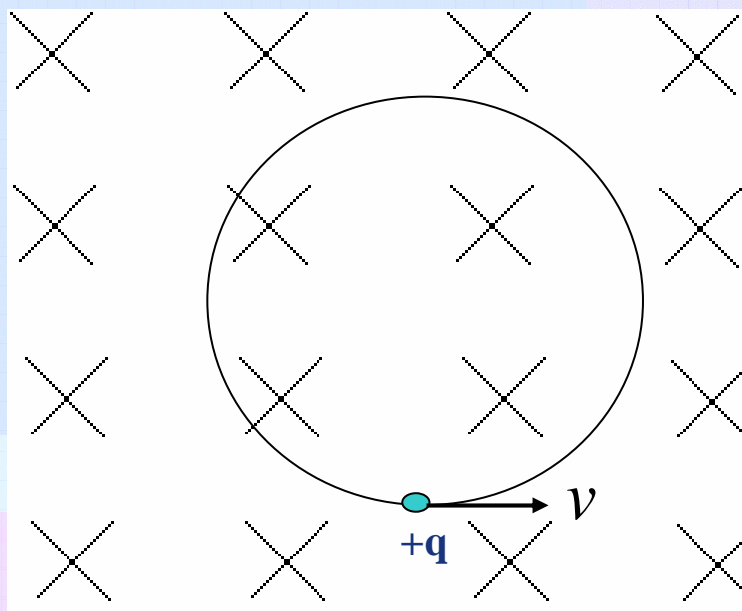
## Cargas en campos magnéticos

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$



$\vec{B}$

Trayectoria circular





# Cargas en campos magnéticos

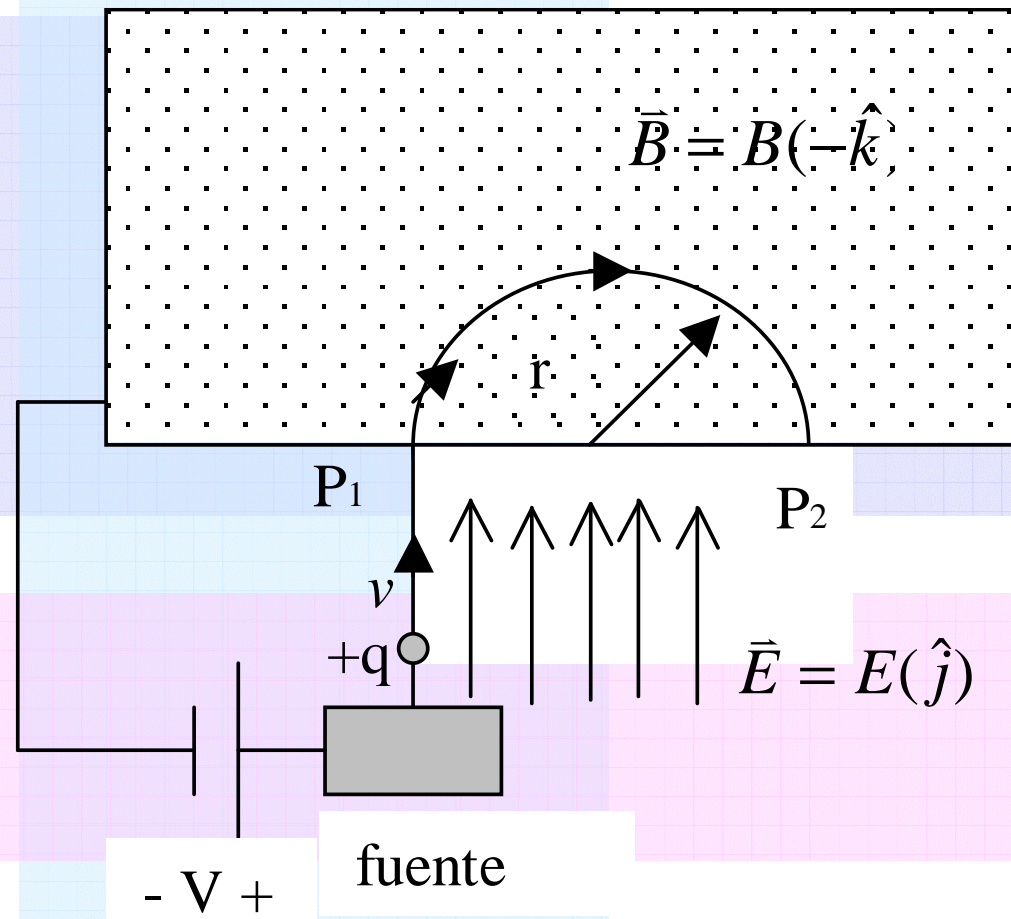
$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

*Radio  $r$  depende  
de la razón  
masa/carga*

## Espectrógrafo de Masas



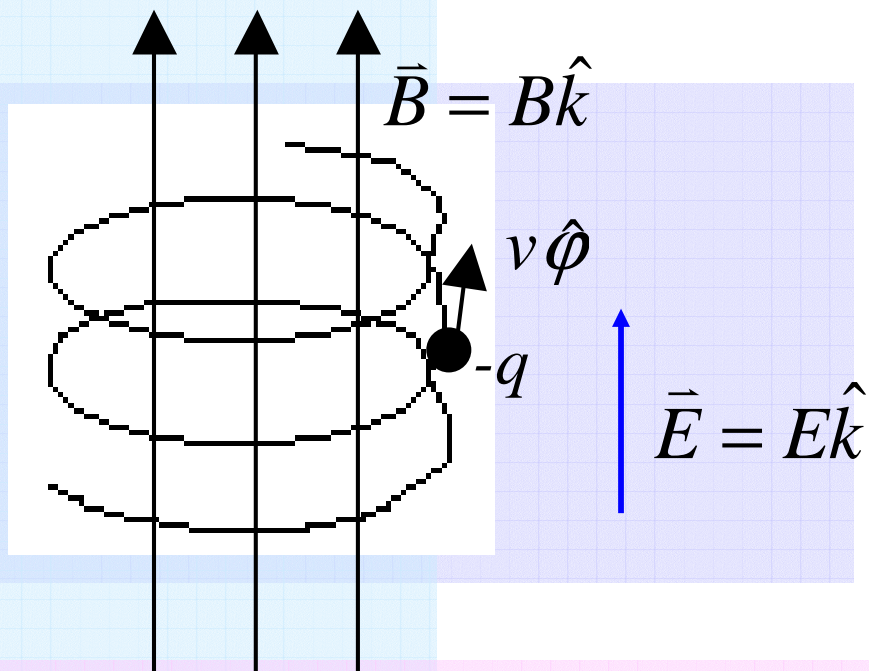


# Cargas en Campos Magnéticos

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$



*Trayectoria helicoidal*

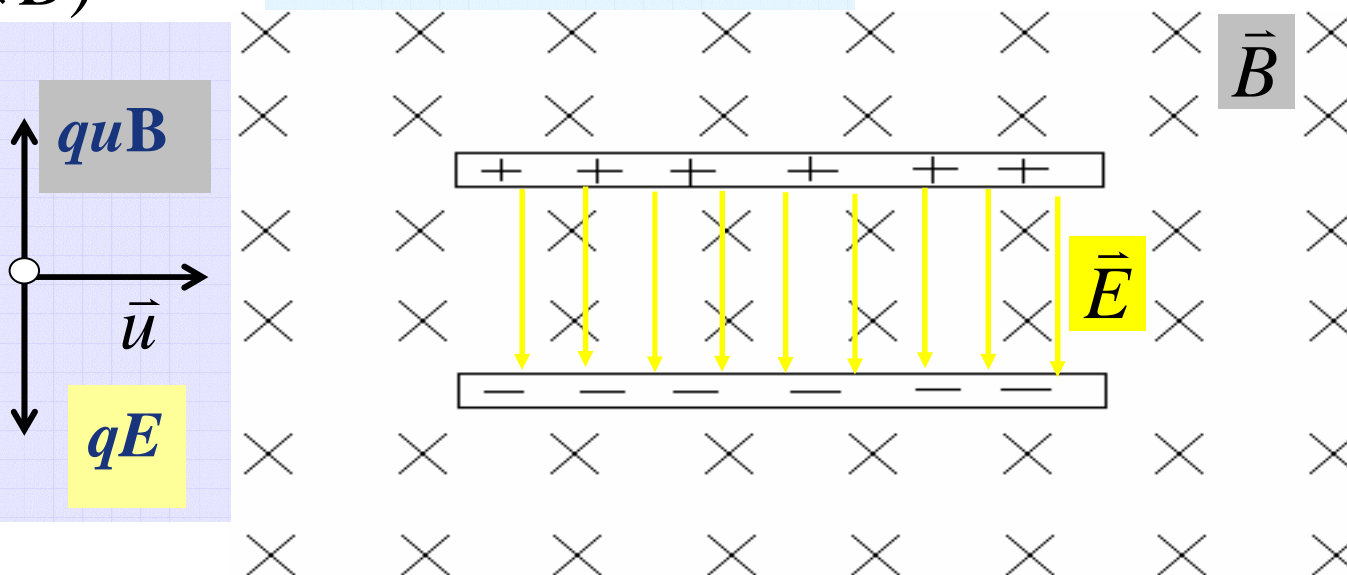


# Cargas en Campos Magnéticos

## Selector de Velocidades

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

*Fuerza y  
velocidad*



$$\vec{F} = 0 \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = 0$$

$$\therefore u = \frac{B}{E}$$

*Independiente de la masa y carga*