



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 19

Magnetostática-V

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Vector potencial magnético
- Vector potencial magnético de dipolo
- Modelo atómico de los materiales
- Corrientes de Magnetización
- Permeabilidad Magnética
- Clasificación de materiales magnéticos
- Ciclo de histéresis
- Condiciones de borde



Potencial Magnético Vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

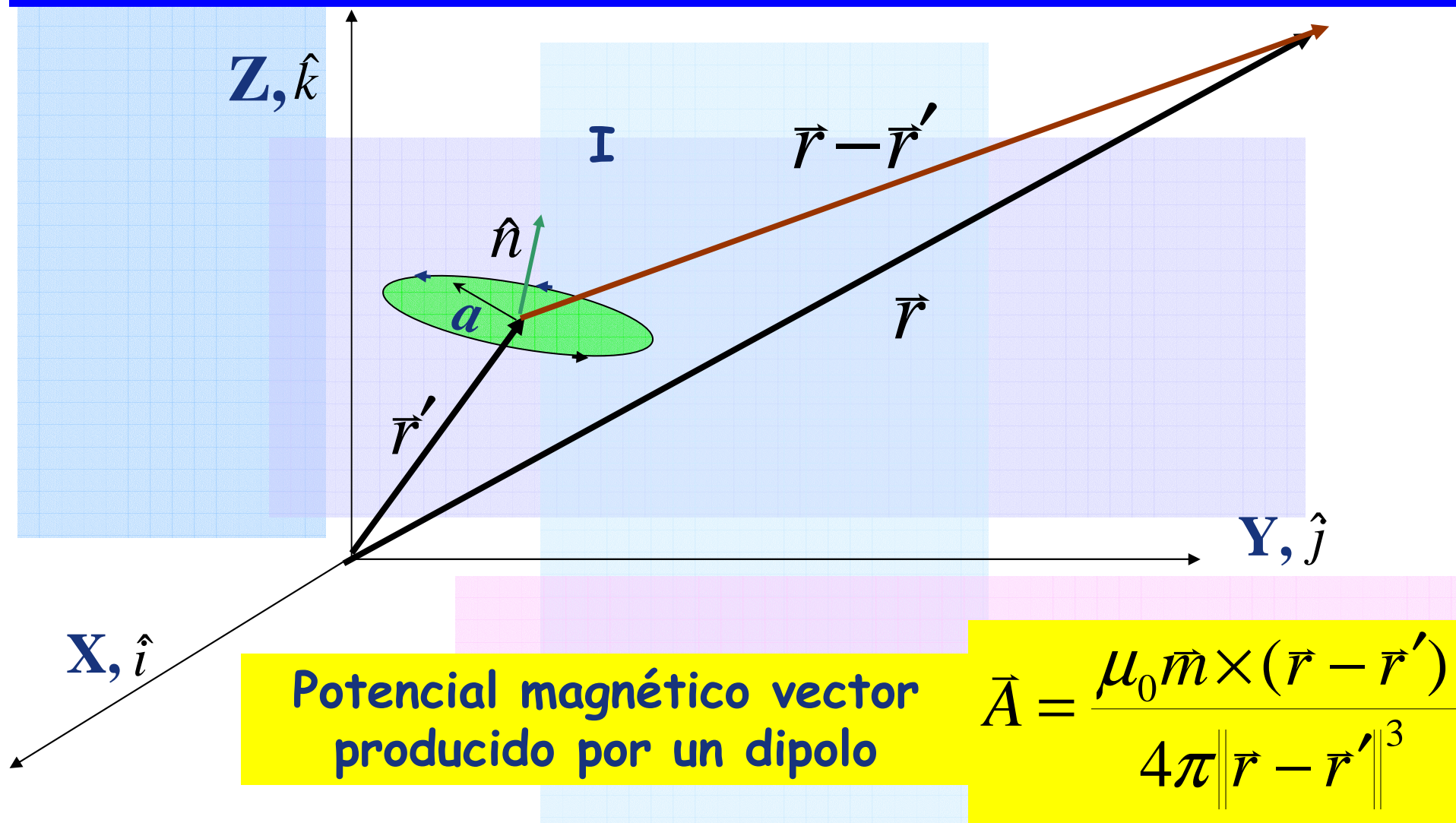
Para corrientes superficiales $[\vec{K}] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes en volumen $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$

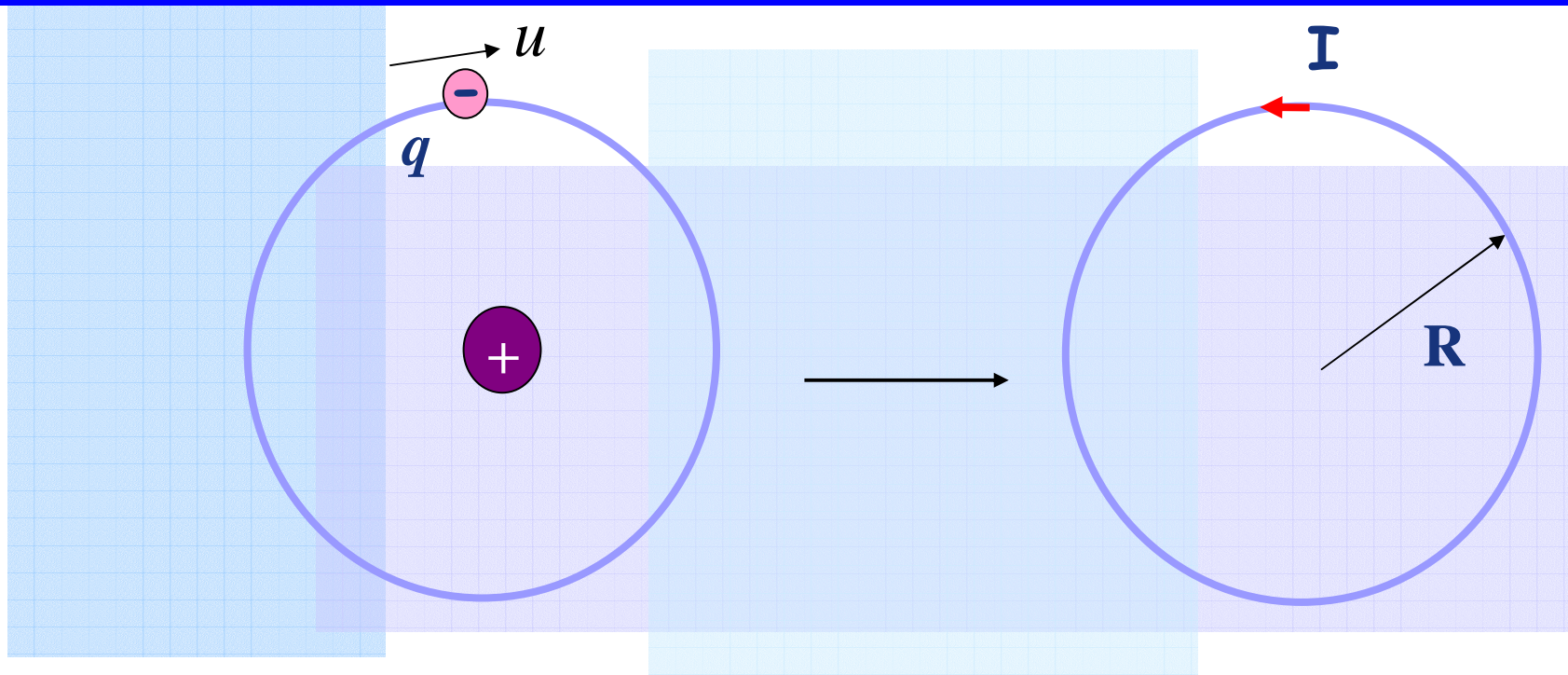


Vector potencial magnético de un dipolo





Modelo atómico de los materiales

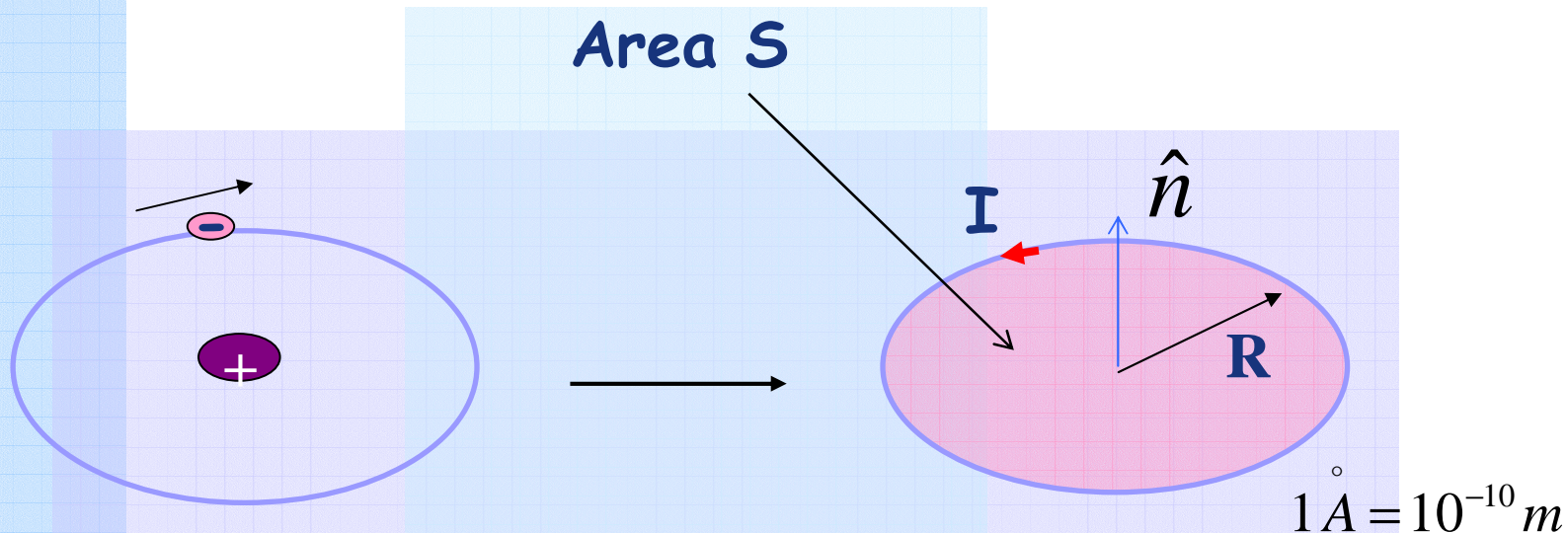


Movimiento de electrones se puede modelar como una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = qf = q \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qu}{2\pi R}$$



Modelo atómico de los materiales



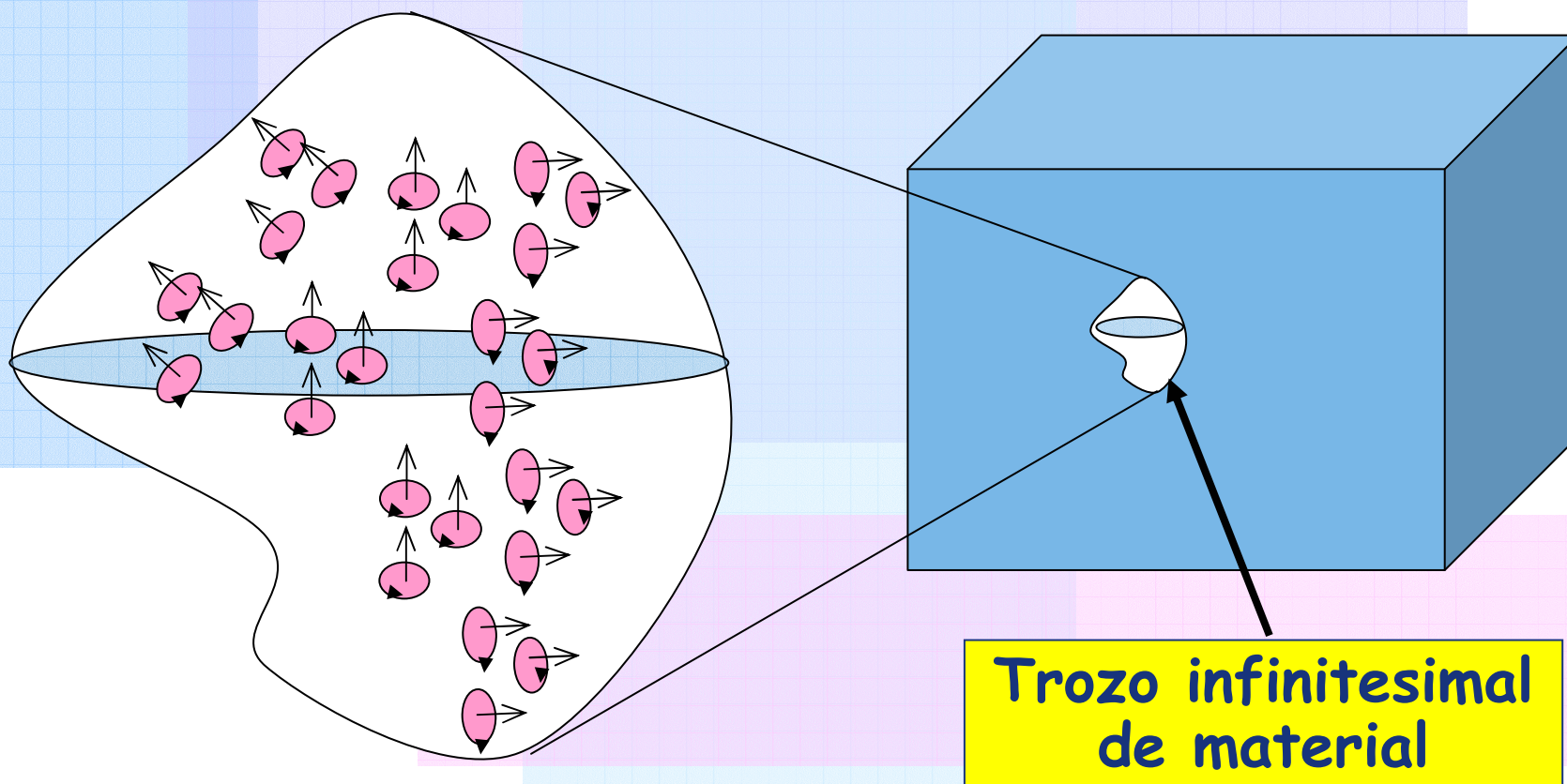
Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S \hat{n} [Am^2]$$



Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (10^{17} - 10^{23} átomos/cm³)

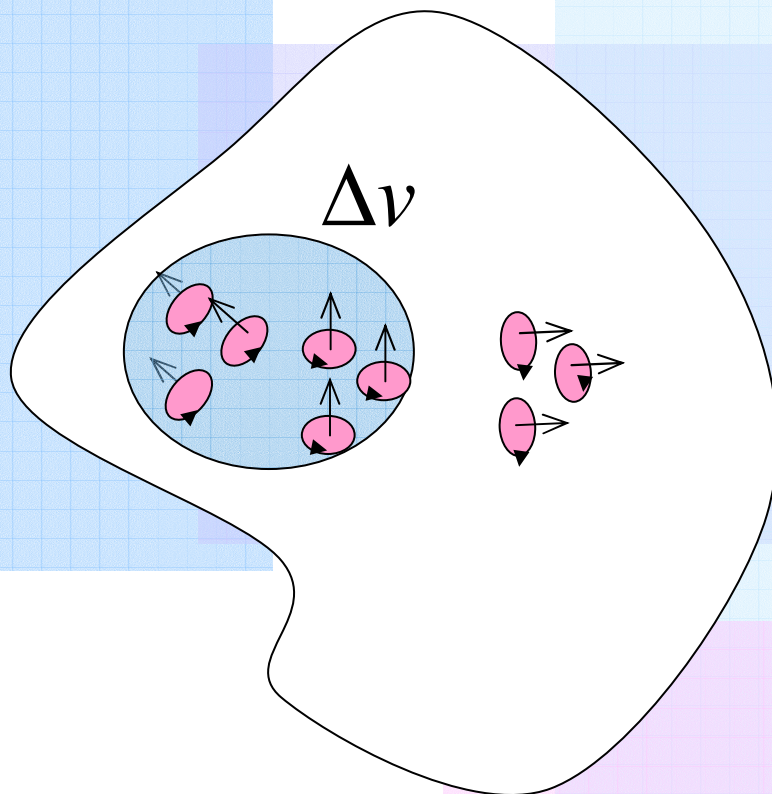


**Trozo infinitesimal
de material**



Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



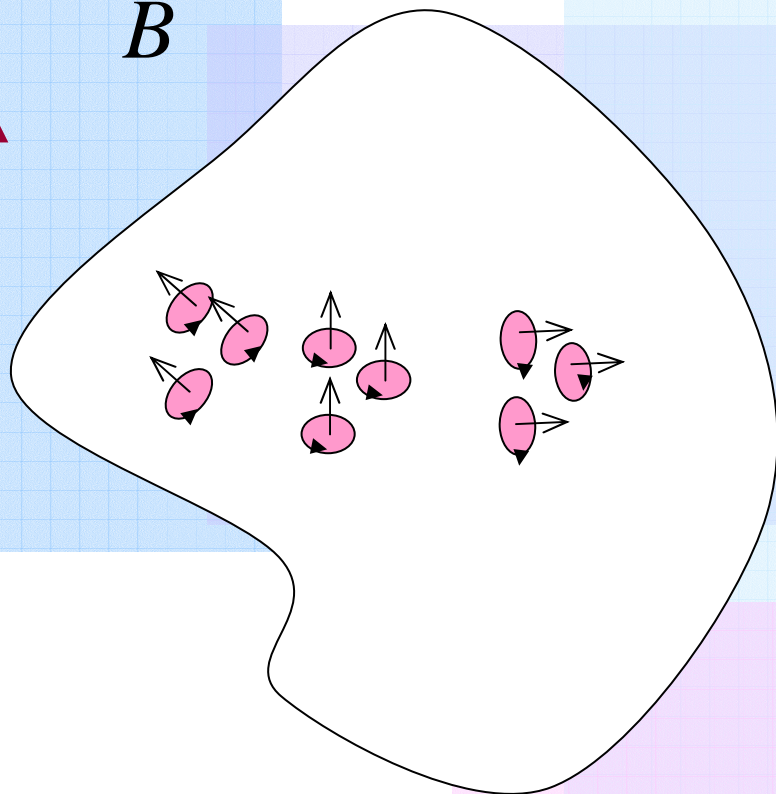
$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$



Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización

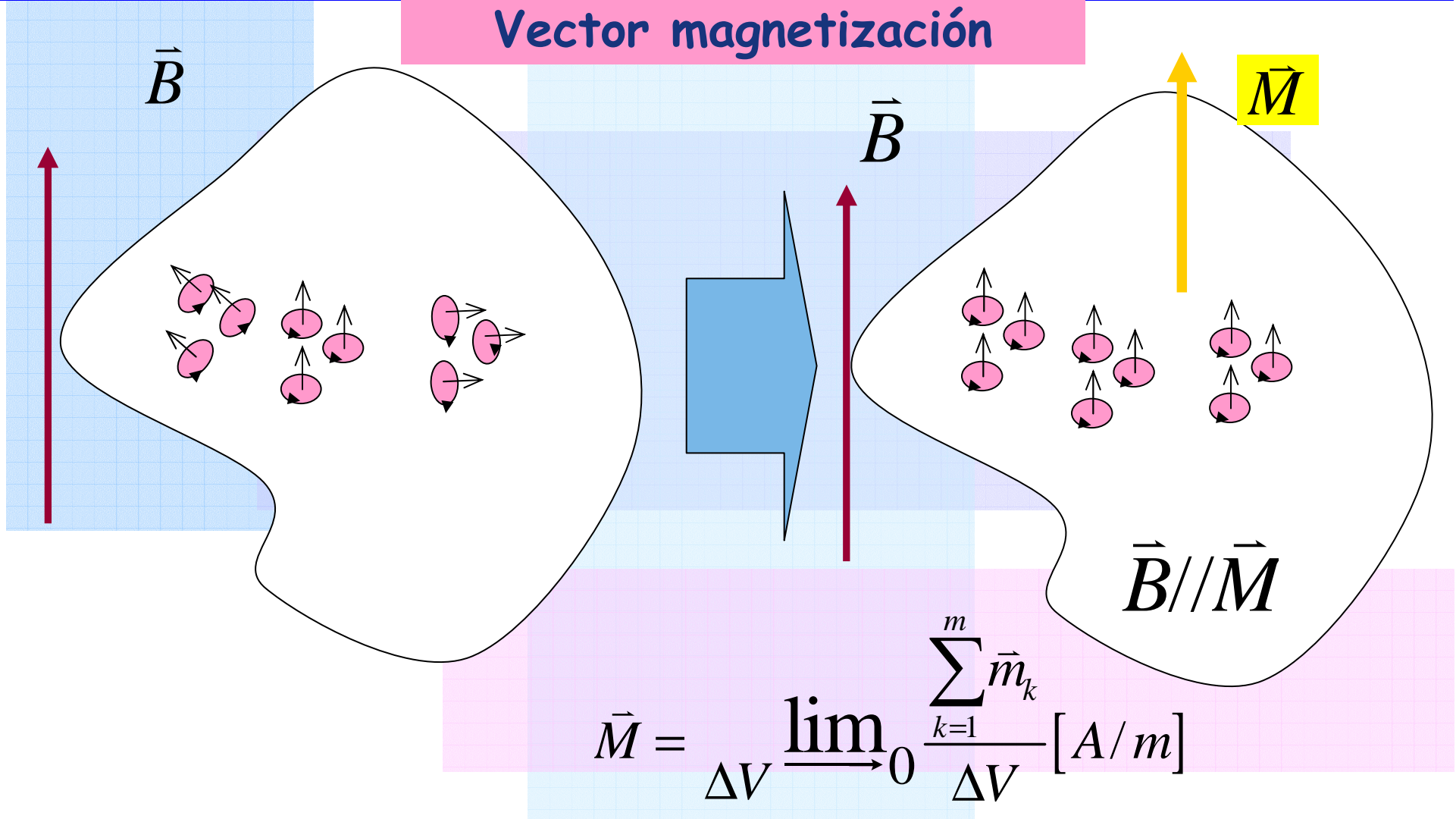
\vec{B}





Modelo atómico de los materiales

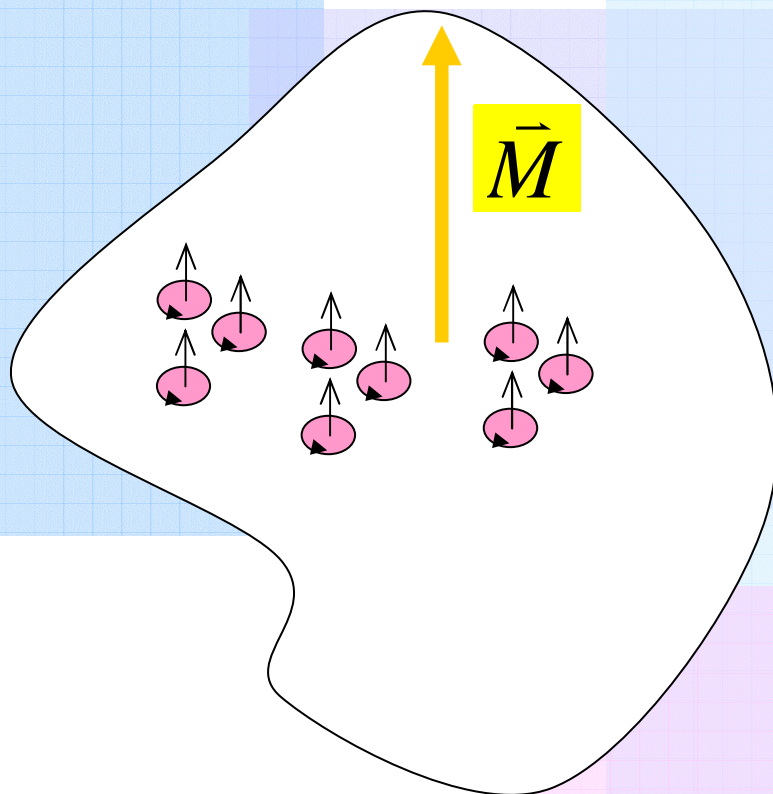
Vector magnetización





Modelo atómico de los materiales

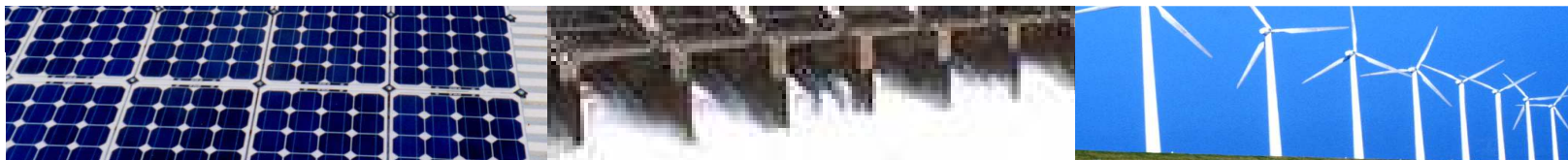
Vector magnetización



si $\vec{B} = 0$

¿Qué
ocurre para
 $t \rightarrow \infty$?

$\vec{M} = ?$

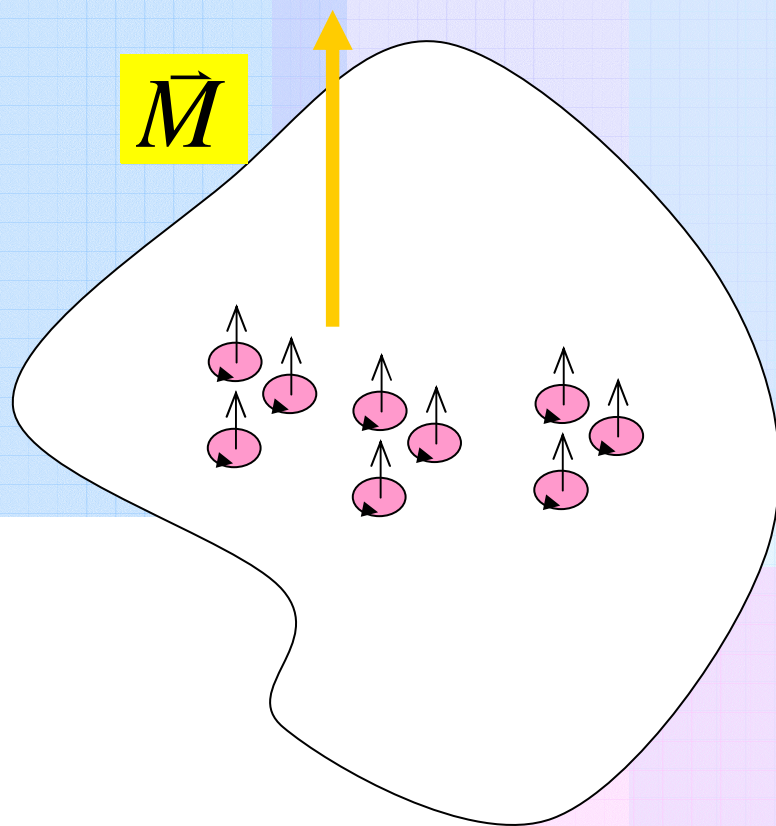


Modelo atómico de los materiales

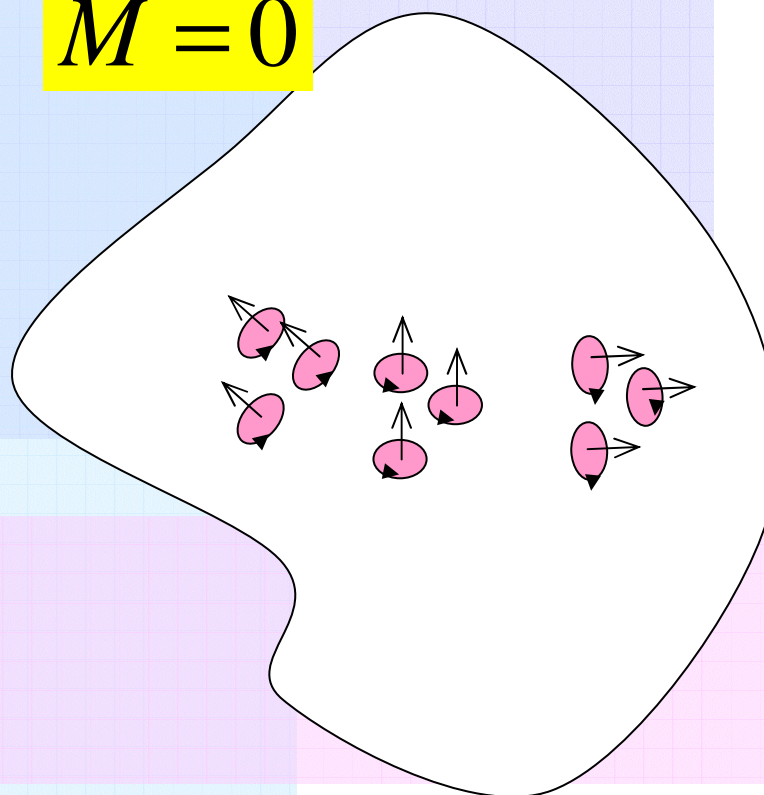
Materiales mantienen la magnetización

Pero la mayoría la pierde

\vec{M}



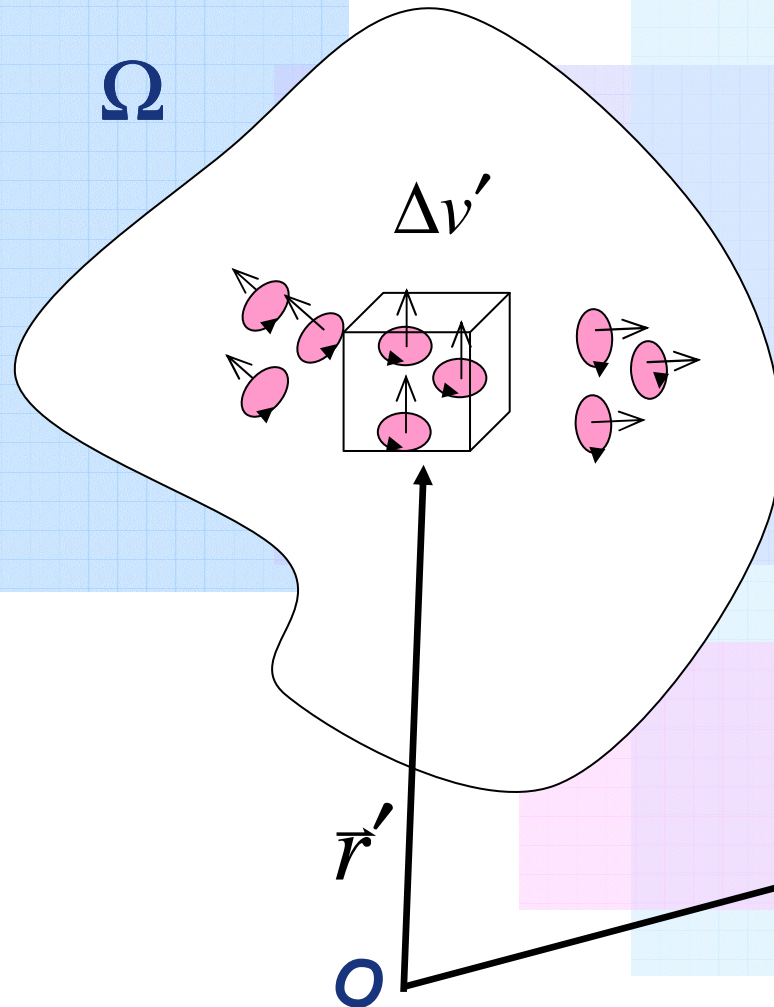
$\vec{M} = 0$





Corrientes de Magnetización

Consideremos un material magnetizado



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m \vec{m}_k}{\Delta V} [A/m]$$

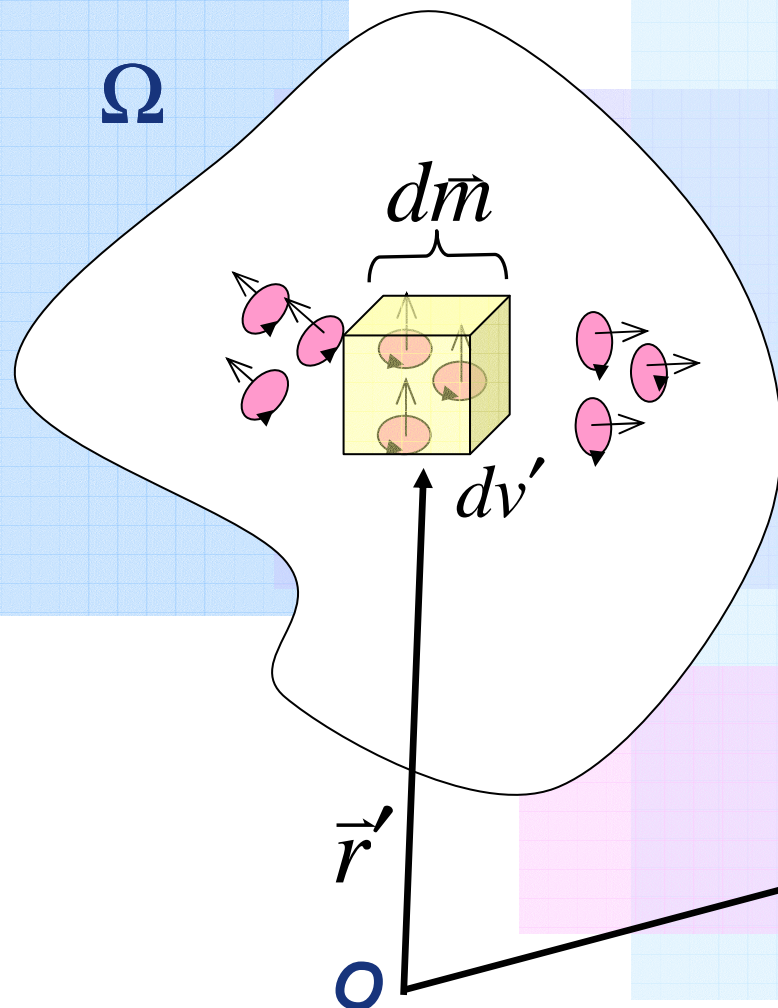
¿Como es el campo
magnético producido por
este material?

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



Corrientes de Magnetización

Calcularemos el campo a partir del vector potencial magnético



Recordemos que para un dipolo $\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

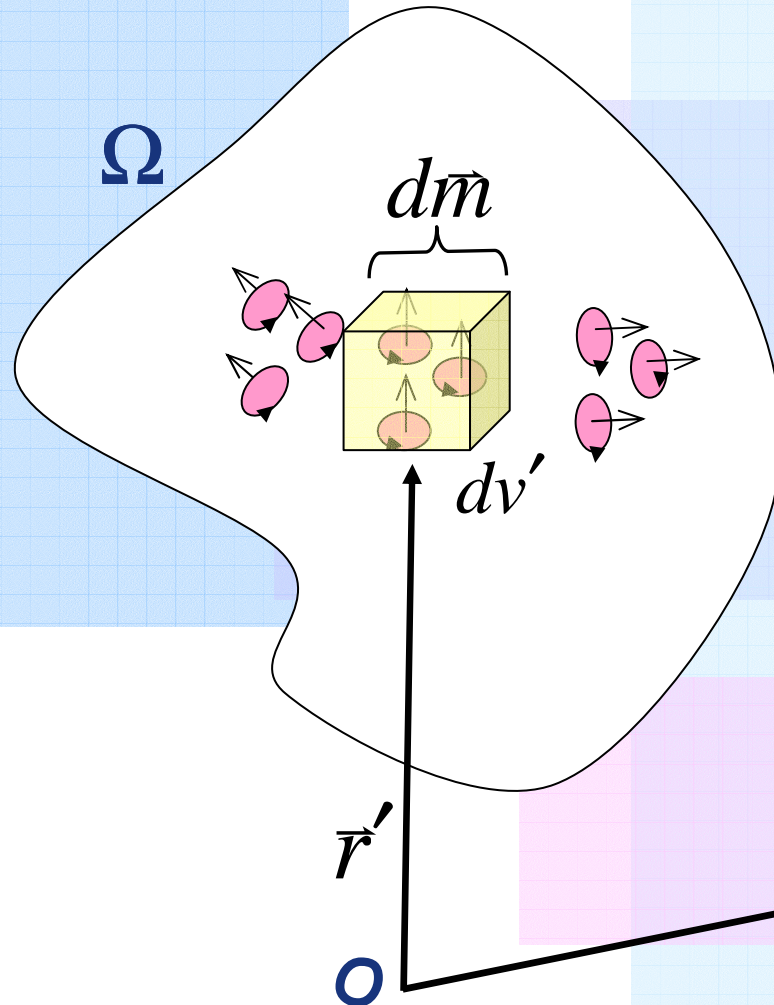
y en forma diferencial

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Corrientes de Magnetización

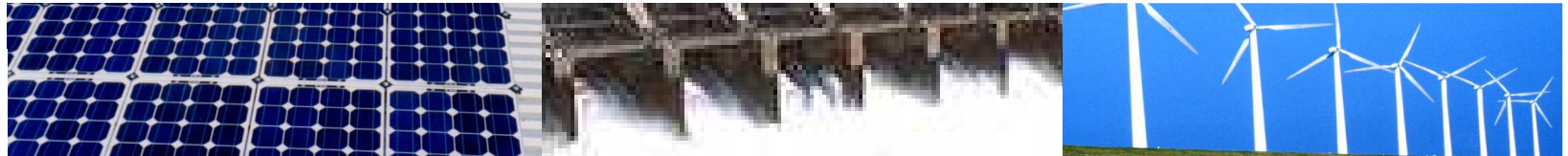
En términos del vector magnetización $d\vec{m} = \vec{M} dv'$



$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} dv' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Se cumple $\nabla_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$



Corrientes de Magnetización

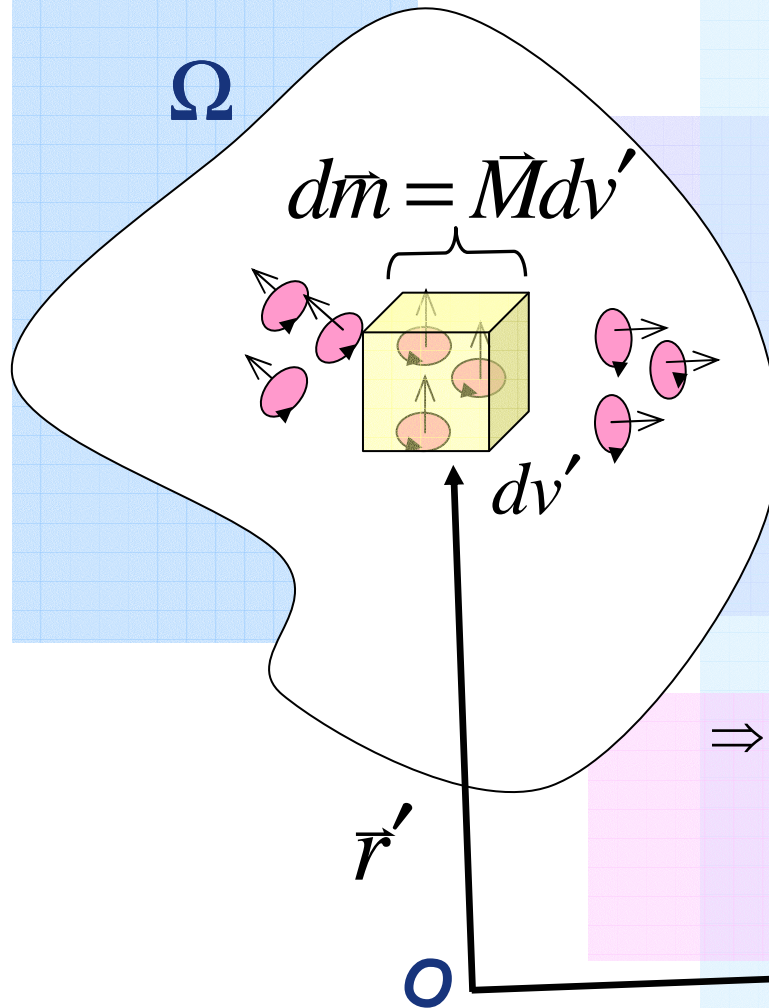
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

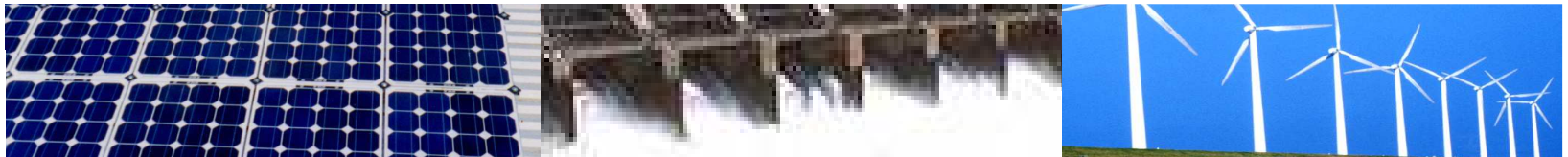
Usando la propiedad

$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$$

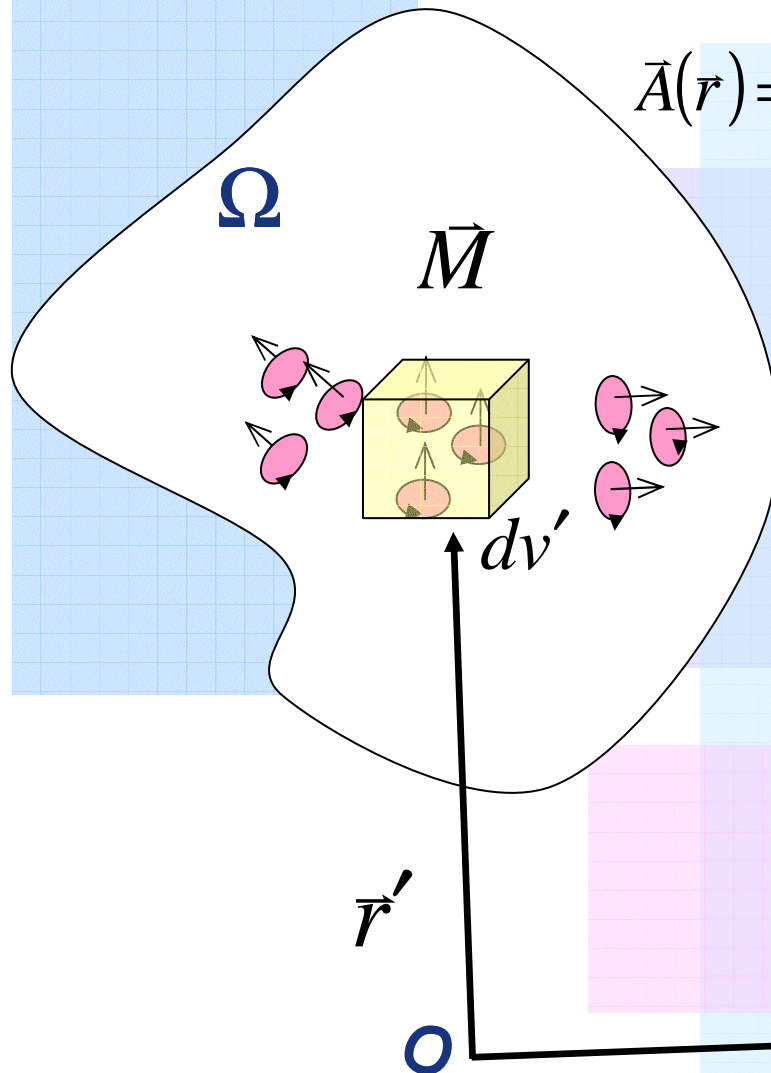
$$\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') + \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) + \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$





Corrientes de Magnetización



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dv'$$

Aplicando el teorema

$$\iiint_V \nabla \times \vec{F} dV = - \oiint_{S(V)} \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega'} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega')} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

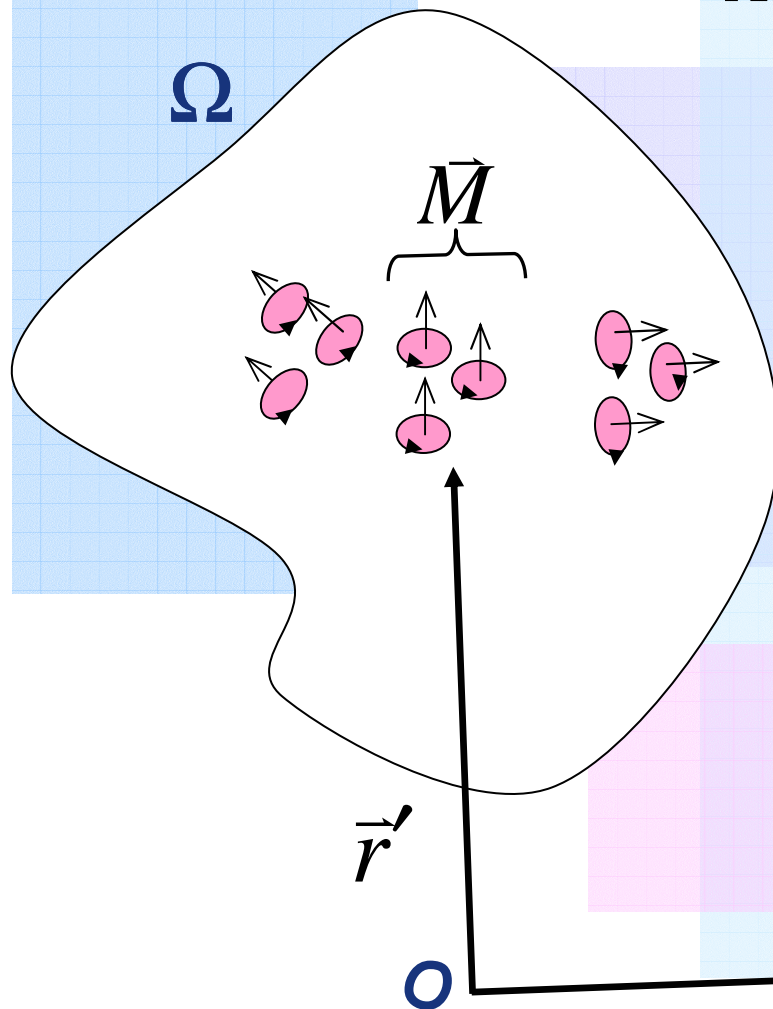
Esta expresión tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n} \quad \text{de superficie}$$





Corrientes de Magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{s}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

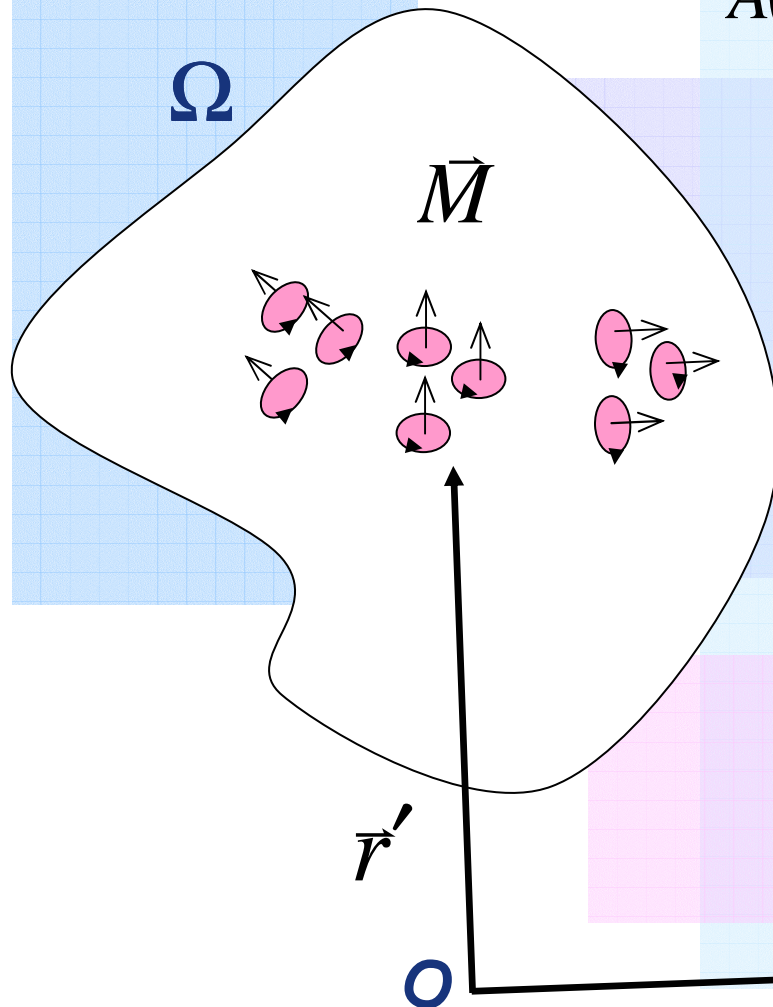
Esta expresión tiene la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Con densidades de corriente

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}') \quad \text{en volumen}$$

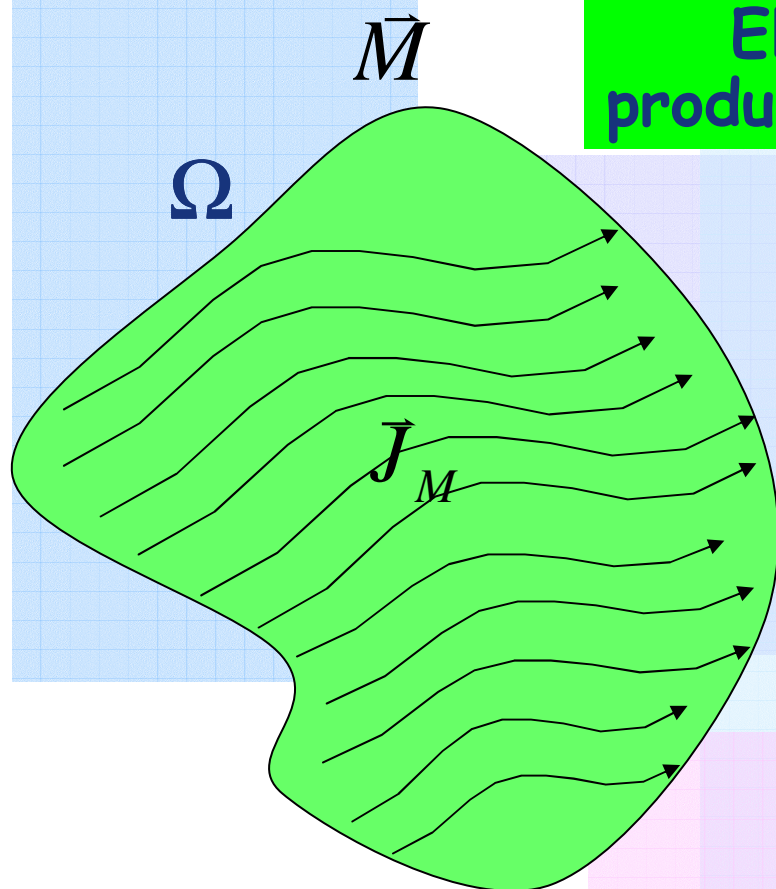
$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n} \quad \text{de superficie}$$





Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es



$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

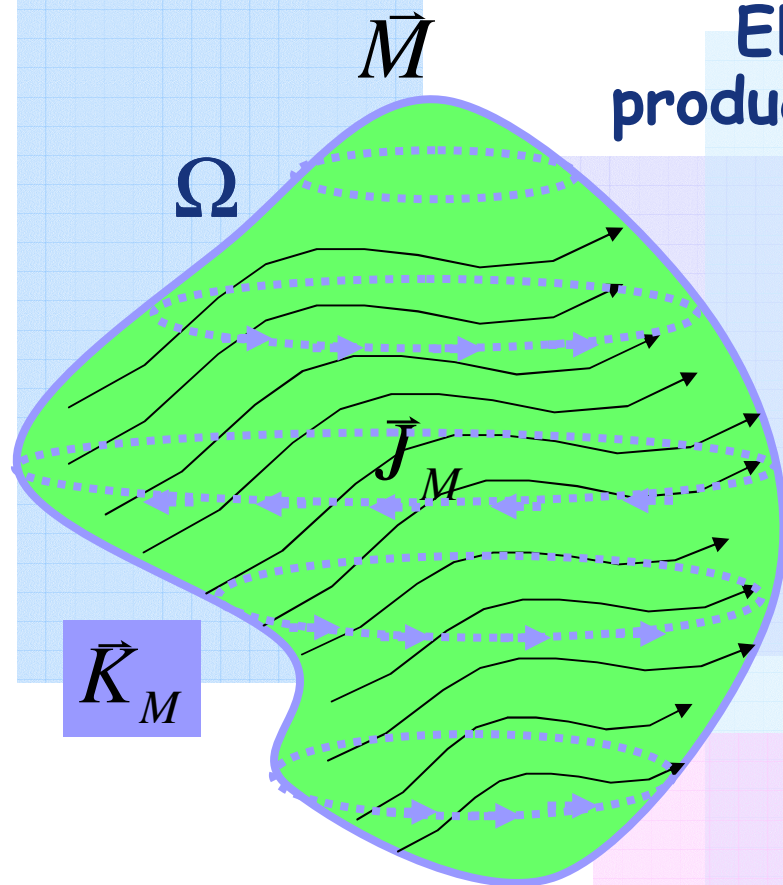
Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$



Corrientes de Magnetización

El vector potencial magnético que produce un material con magnetización es



$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}_M dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente en volumen}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S(\Omega)} \frac{\vec{K}_M ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}}_{\text{Potencial producido por una densidad de corriente de superficie}}$$

Potencial
producido
por una
densidad de
corriente
en volumen

Potencial
producido
por una
densidad de
corriente de
superficie

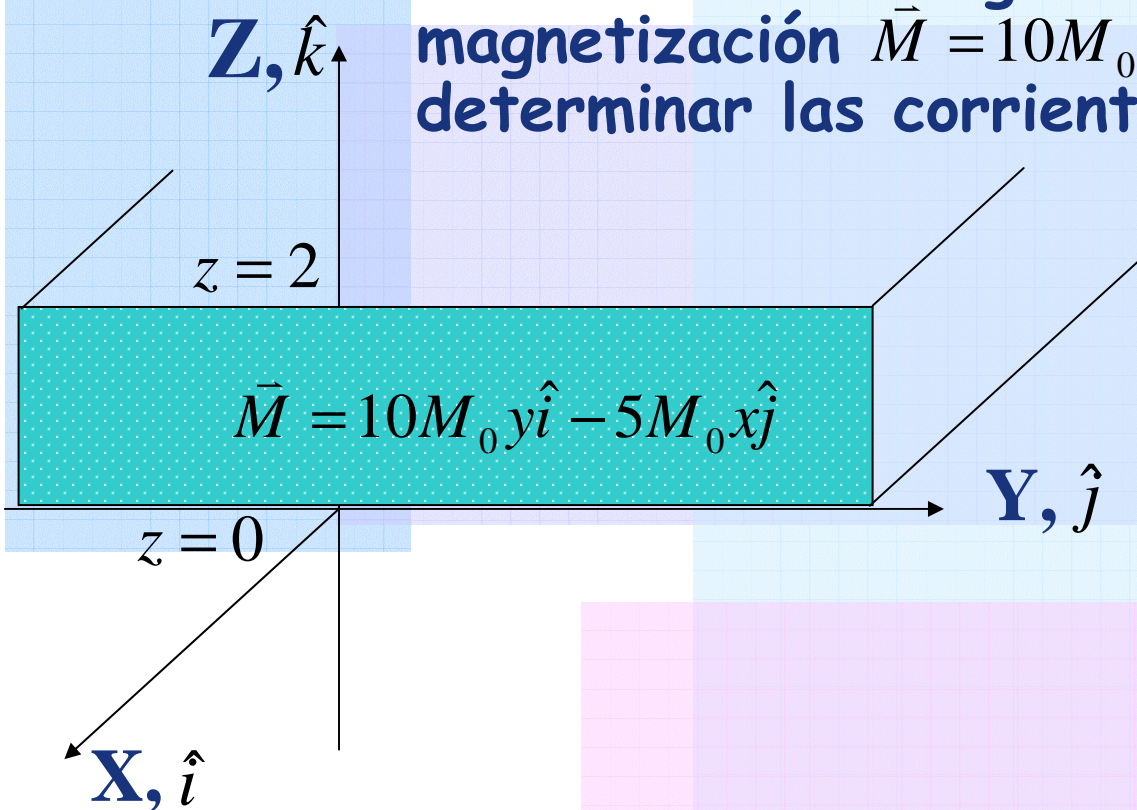
$$\vec{J}_M = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')$$

$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}$$



Ejemplo Corrientes de Magnetización

Considere una región del espacio llena de un medio material magnetizado, el cual posee una magnetización $\vec{M} = 10M_0y\hat{i} - 5M_0x\hat{j}$. Se pide determinar las corrientes de magnetización

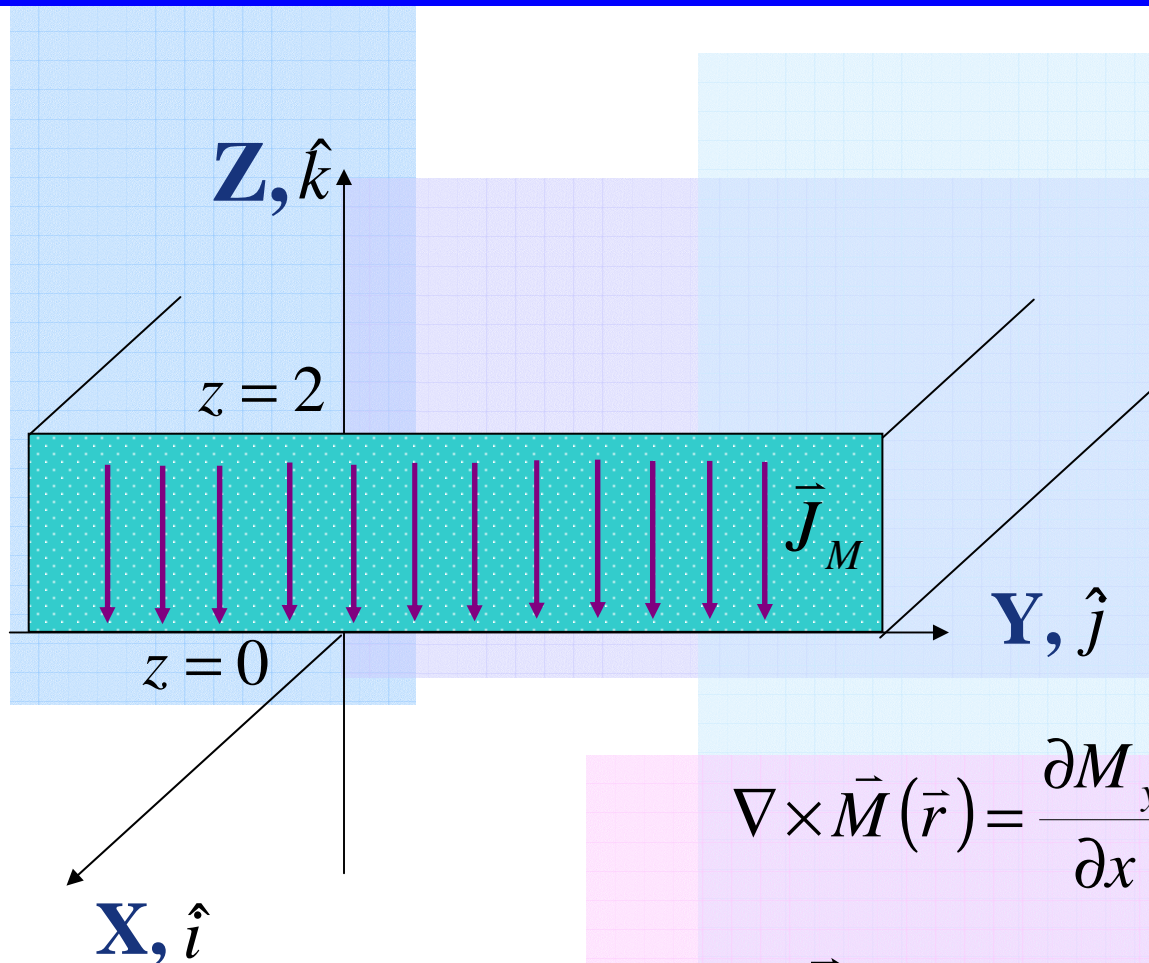


$$\vec{J}_M = ?$$

$$\vec{K}_M = ?$$



Ejemplo Corrientes de Magnetización



$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\vec{M} = 10M_0 y \hat{i} - 5M_0 x \hat{j}$$

$$\vec{M} = M_x \hat{i} + M_y \hat{j}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\partial M_y}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \hat{k} + \frac{\partial M_x}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_M = M_0(-5\hat{k} - 10\hat{k}) = -15M_0\hat{k}$$



Ejemplo Corrientes de Magnetización

Diagram of a rectangular slab in the xy -plane, extending from $z=0$ to $z=2$. The coordinate system has \hat{i} along the x -axis, \hat{j} along the y -axis, and \hat{k} along the z -axis. The slab is shaded in light blue.

Given magnetization vector:

$$\vec{M} = M_0(10y\hat{i} - 5x\hat{j}) = M_x\hat{i} + M_y\hat{j}$$

Unit normal vectors at the boundaries:

$$\hat{n} = \begin{cases} -\hat{k} & \text{en } z=0 \\ \hat{k} & \text{en } z=2 \end{cases}$$

Surface current densities at the boundaries:

$$\vec{M}(\vec{r})\big|_{z=2} \times \hat{n} = -M_x\hat{j} + M_y\hat{i}$$

$$\vec{M}(\vec{r})\big|_{z=2} \times \hat{n} = M_0(-10y\hat{j} - 5x\hat{i})$$

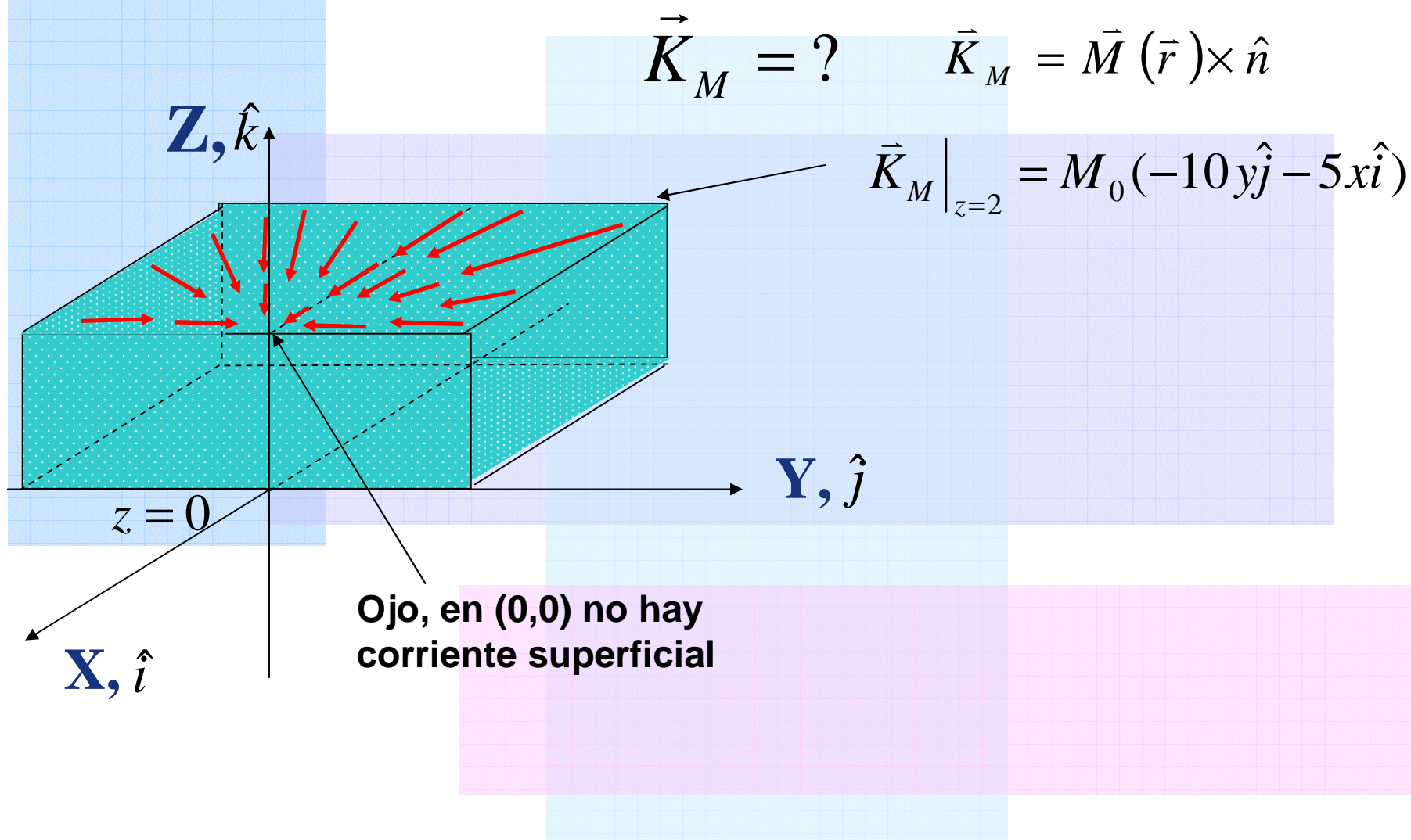
$$\vec{M}(\vec{r})\big|_{z=0} \times \hat{n} = M_x\hat{j} - M_y\hat{i} \Rightarrow \vec{M}(\vec{r})\big|_{z=0} \times \hat{n} = M_0(10y\hat{j} + 5x\hat{i})$$

Question: $\vec{K}_M = ?$

Formula: $\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$

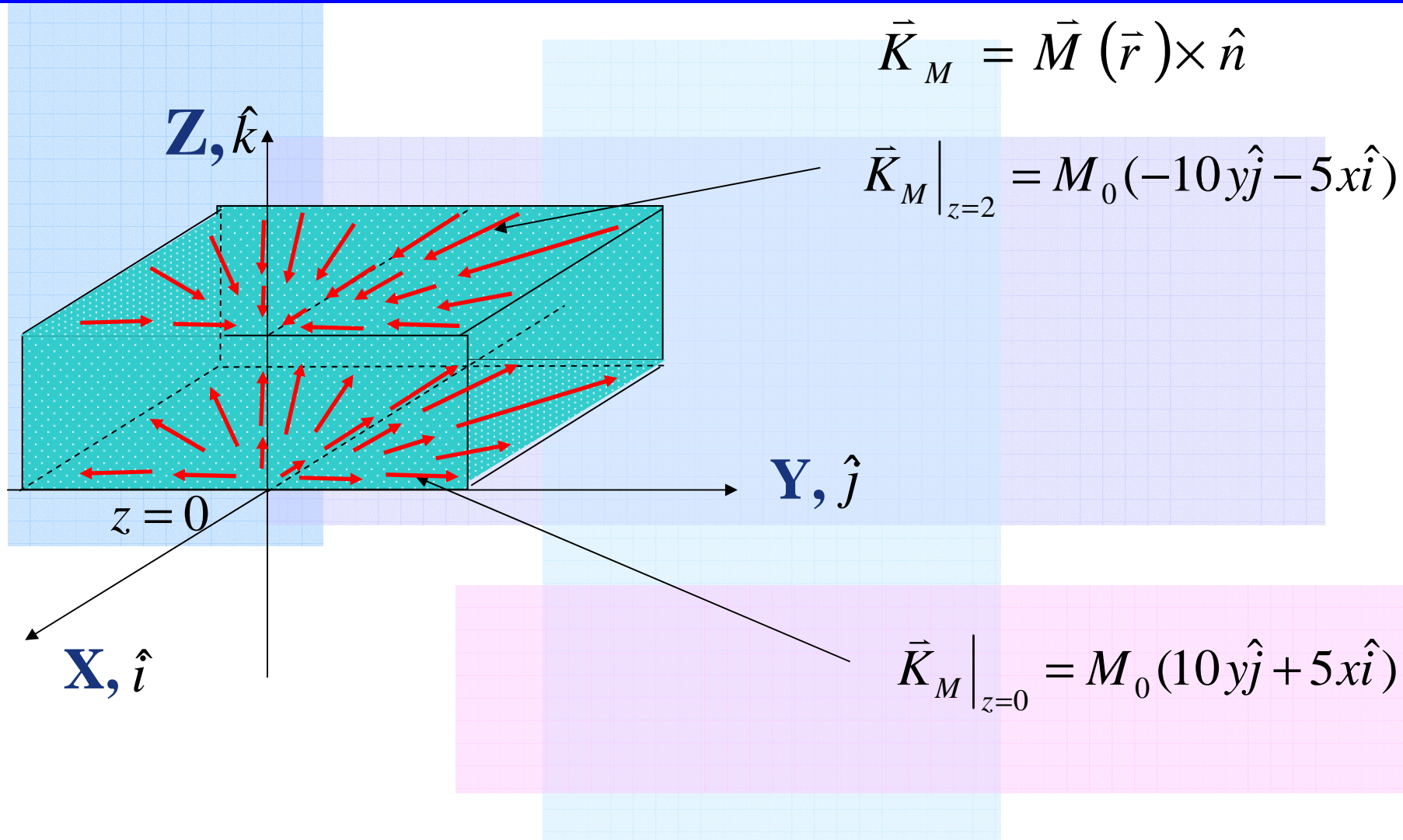


Ejemplo Corrientes de Magnetización



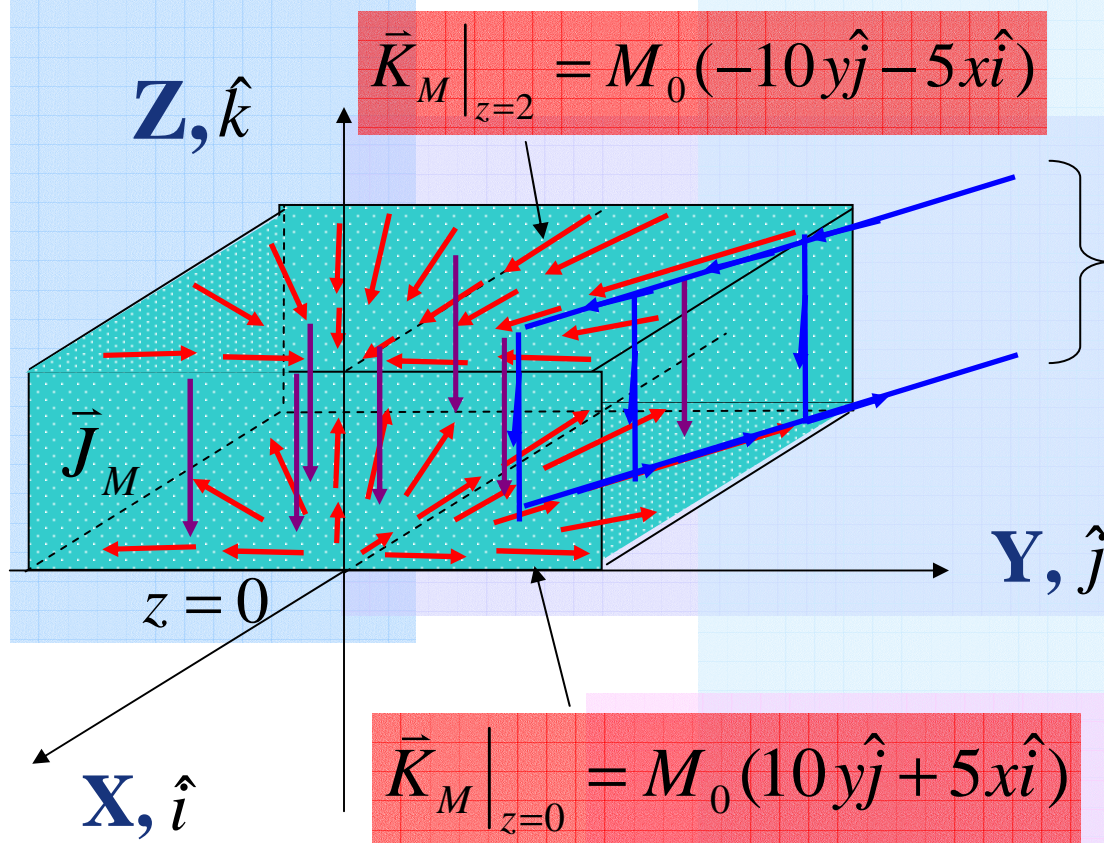


Ejemplo Corrientes de Magnetización





Ejemplo Corrientes de Magnetización



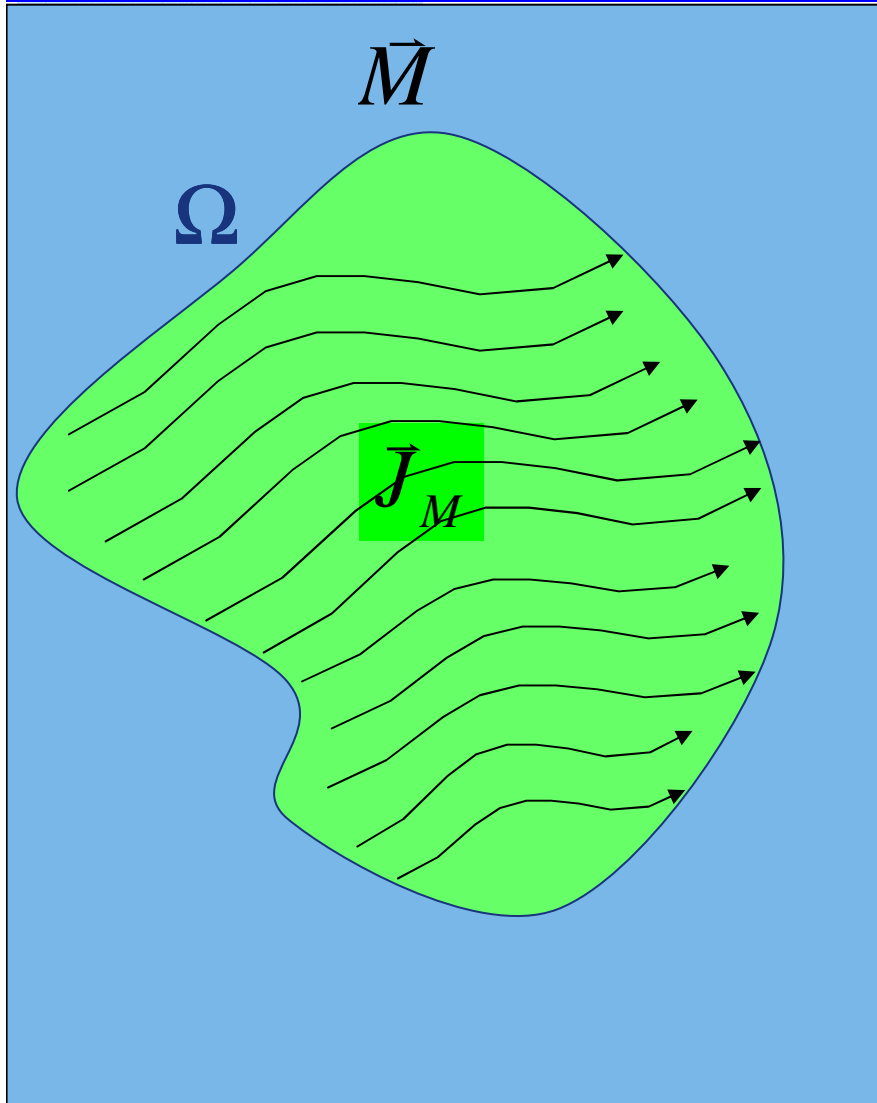
$$\vec{K}_M = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

Circuito típico de corriente de magnetización al interior del material (se cierra en el infinito)

Notar que esta corriente no se debe a los electrones libres que circulan en un conductor metálico !



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación
de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos
tipos de corrientes en volumen

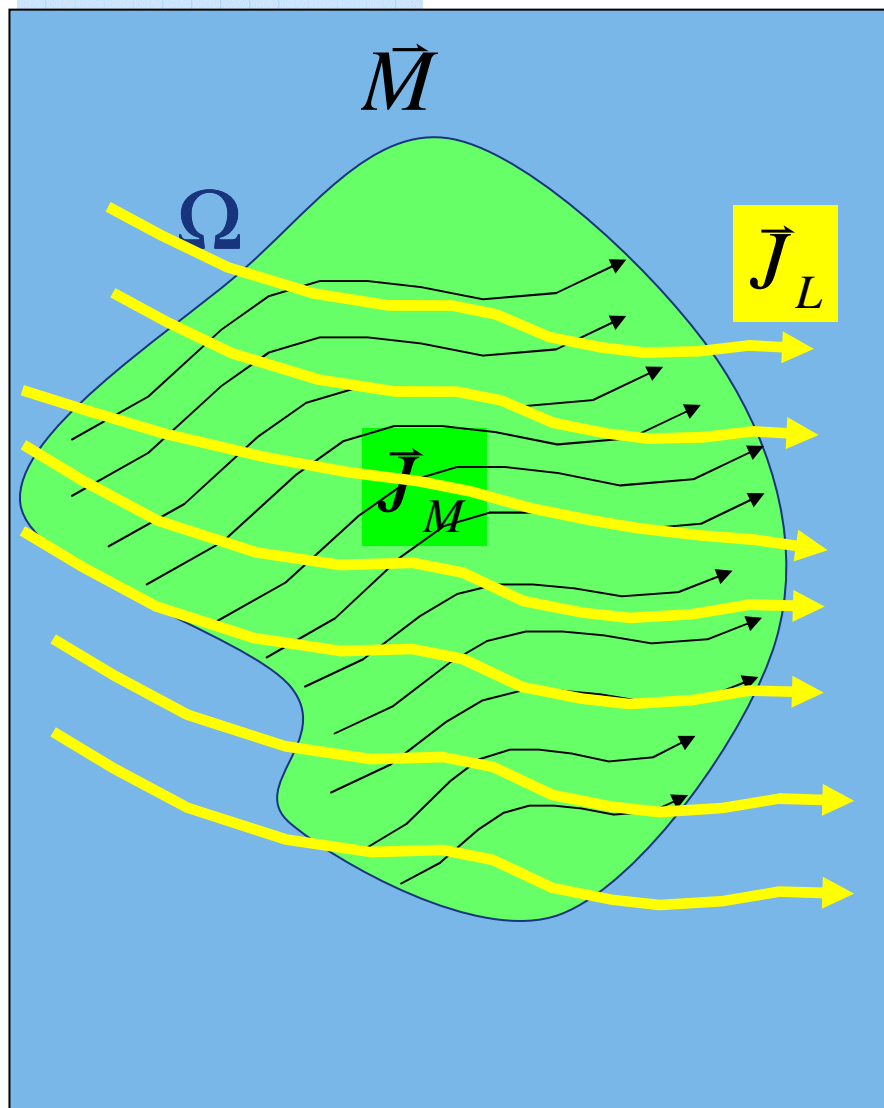
$$\underbrace{\vec{J}_M}$$

Corriente de
magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación
de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos
tipos de corrientes en volumen

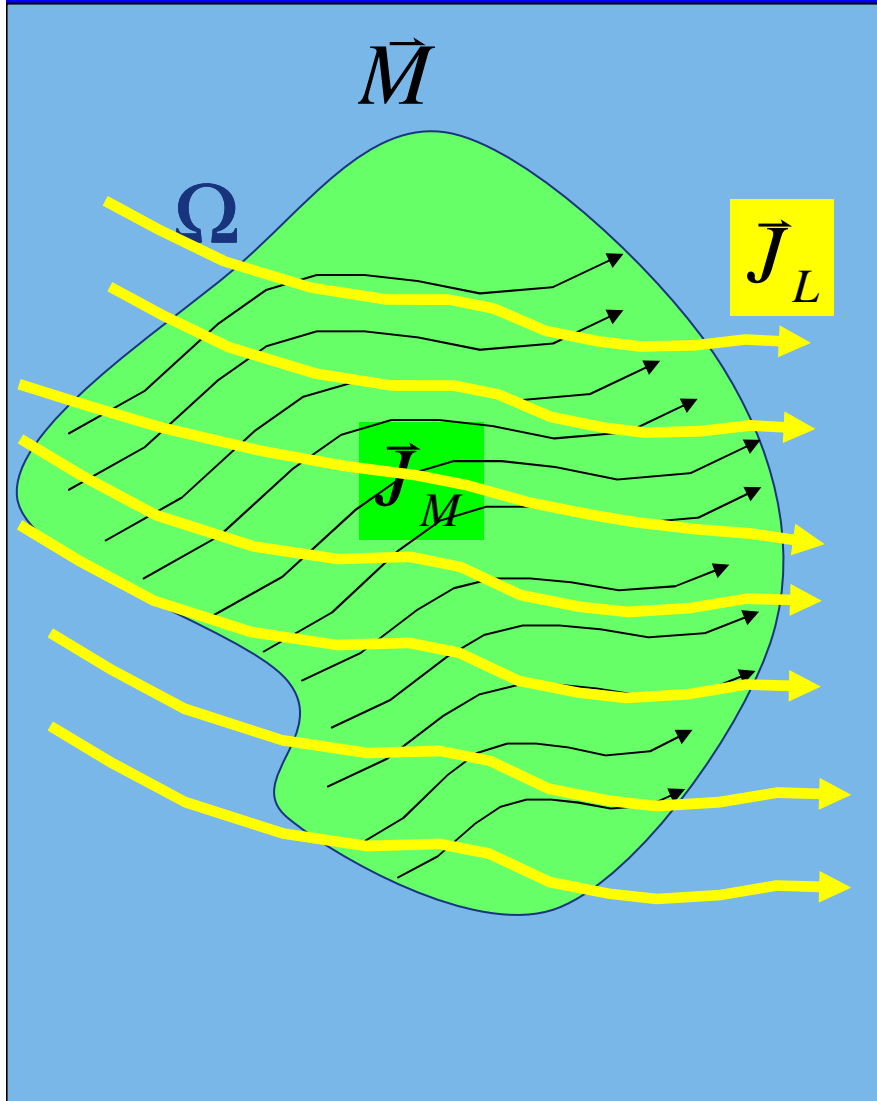
$$\underbrace{\vec{J}}_L$$

Corriente libre

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$



Permeabilidad magnética



La 4ta ecuación
de maxwell es

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

En general pueden haber dos
tipos de corrientes en volumen

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_M$$

Corriente
libre

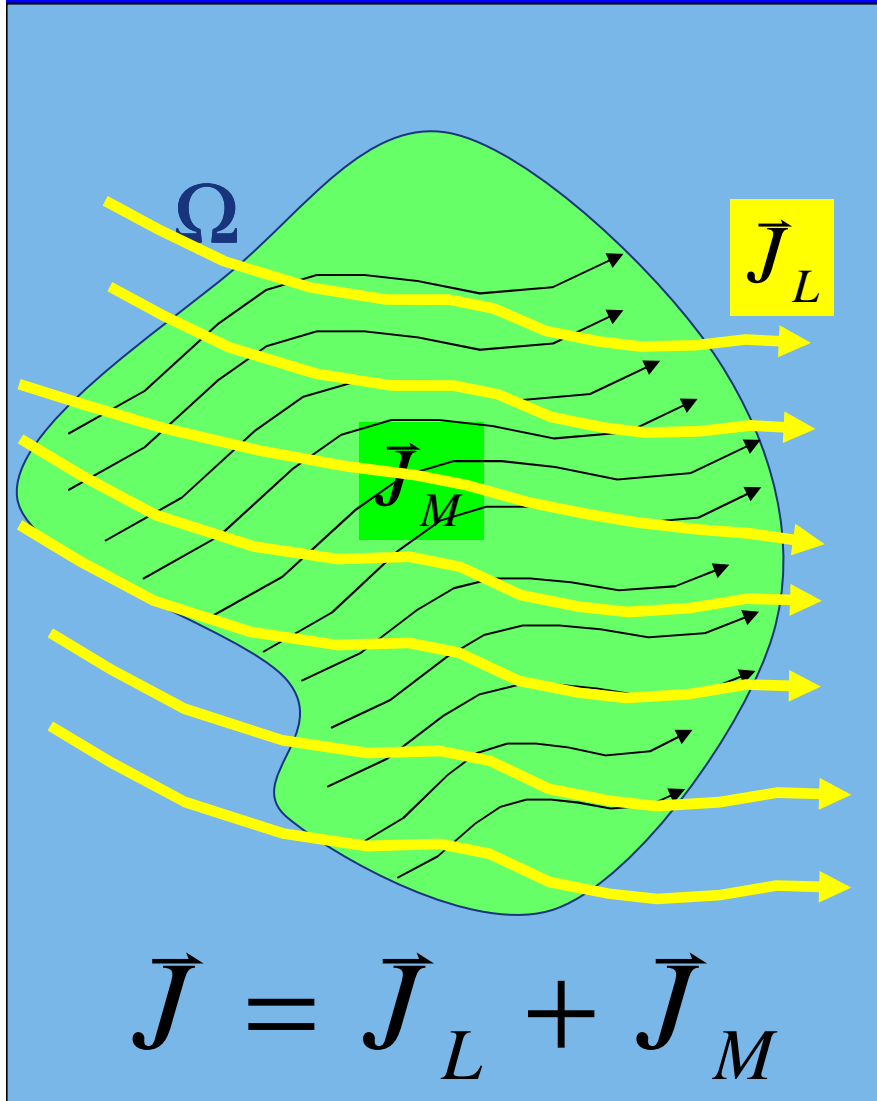
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L$$

Corriente de
magnetización

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_M$$



Permeabilidad magnética



$$\Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \nabla \times \vec{H} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Experimentalmente se encuentra que $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

permeabilidad relativa del material μ_R

$$\therefore \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del material $\mu = \mu_R \mu_0$



Clasificación de los Materiales Magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\mu = \mu_R \mu_0$$

Materiales magnéticos

**Materiales
diamagnéticos**

$$\chi_m < 0, \mu_r \leq 1$$

**Materiales
paramagnéticos**

$$\chi_m > 0, \mu_r \geq 1$$

**Materiales
Ferromagnéticos**

$$\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$$



Clasificación de los Materiales Magnéticos

Material

Diamagnéticos

Bismuto

0.999833

Mercurio

0.999968

Plata

0.9999736

Plomo

0.9999831

Cobre

0.9999906

Agua

0.9999912

Hidrógeno (s.t.p.)

≈ 1.0

Paramagnéticos

Oxígeno (s.t.p.)

0.999998

Aire

1.00000037

Aluminio

1.000021

Tungsteno

1.00008

Platino

1.0003

Manganeso

1.001

Ferromagnéticos

Cobalto

250

Níquel

600

Hierro Suave

5000

Hierro-Silicio

7000



Ciclo de histéresis

$\mu = \mu_R \mu_0$ se puede determinar experimentalmente

