



Escuela de
Ingeniería
Universidad
de Chile



FI33A ELECTROMAGNETISMO

Clase 21

Campos Variables en el Tiempo I

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Repaso
- Flujo magnético
- Ley de Faraday-Lenz
- Modificación 3ª ecuación de Maxwell
- Principio del generador



Repaso

Equilibrio electrostático
de las cargas

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') dv' \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

1ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

2ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Equilibrio dinámico de las
corrientes

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \vec{B} = \mu_R \mu_0 \vec{H}$$

3ª Ecuación de Maxwell

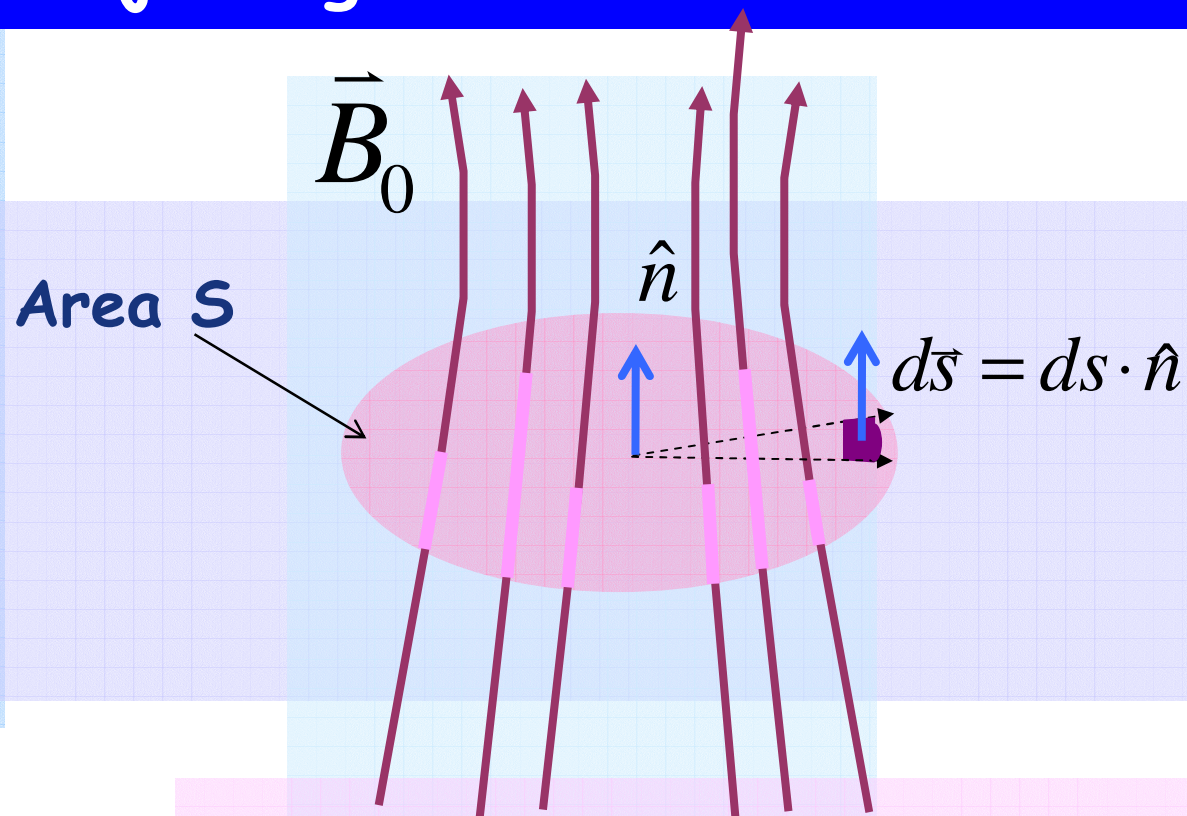
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$



Flujo magnético

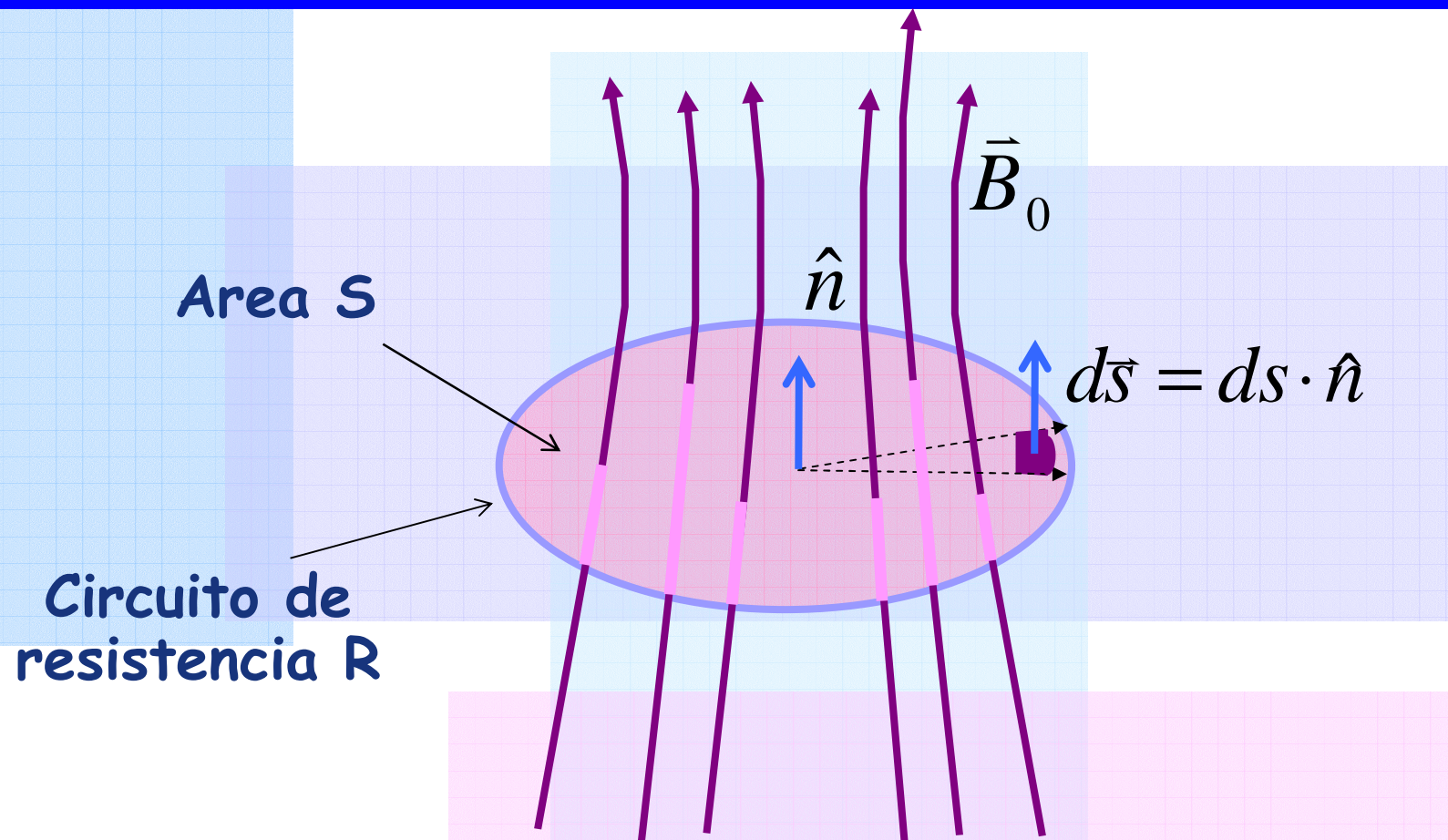


Flujo del campo magnético a través de área S

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$
$$[\phi] = [Tesla \times m^2]$$



Flujo magnético en un circuito



Flujo del campo magnético a través del circuito $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$



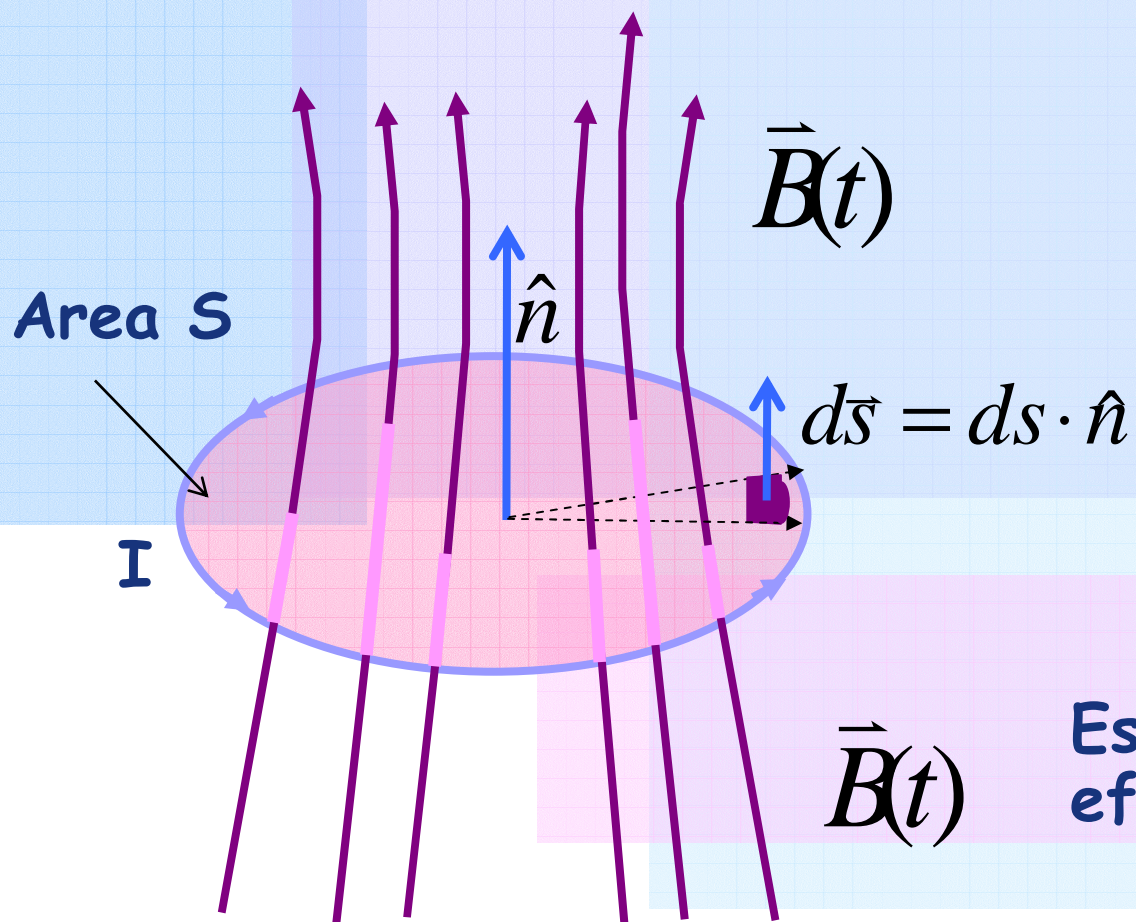
Ley de Faraday-Lenz

Se encuentra experimentalmente que si $\vec{B} = \vec{B}(t)$
Entonces aparece una corriente I dada por la relación

$$I = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{R}$$

donde

$$\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

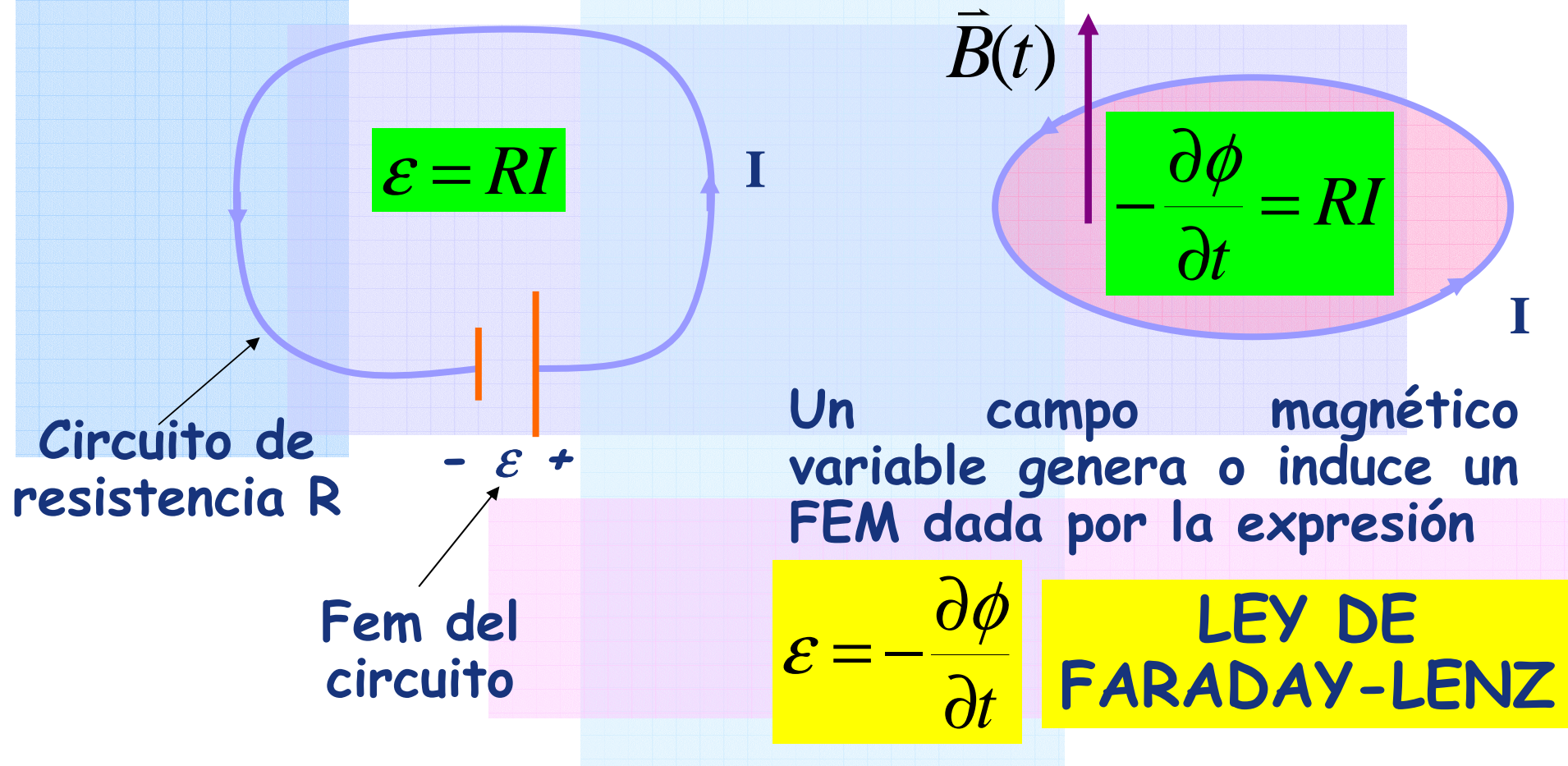


Este campo incluye el
efecto de la corriente I



Ley de Faraday-Lenz

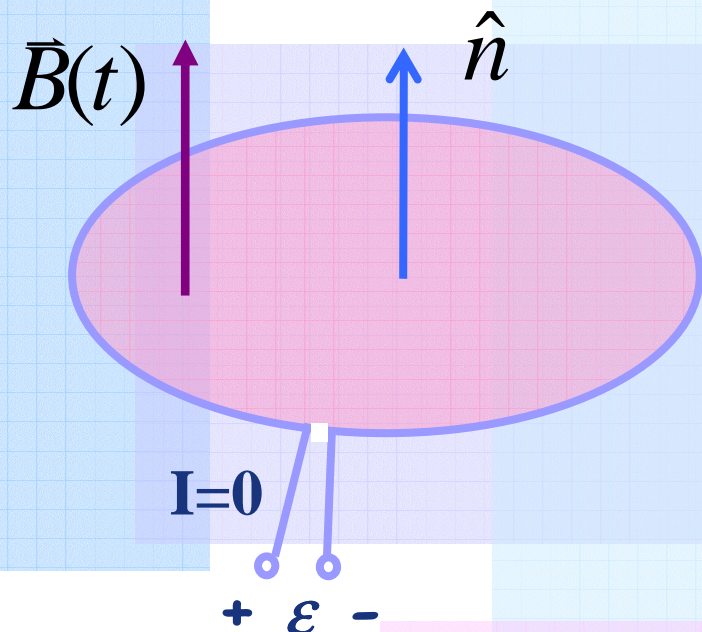
Recordemos que para un circuito resistivo se cumple $\varepsilon = RI$





Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

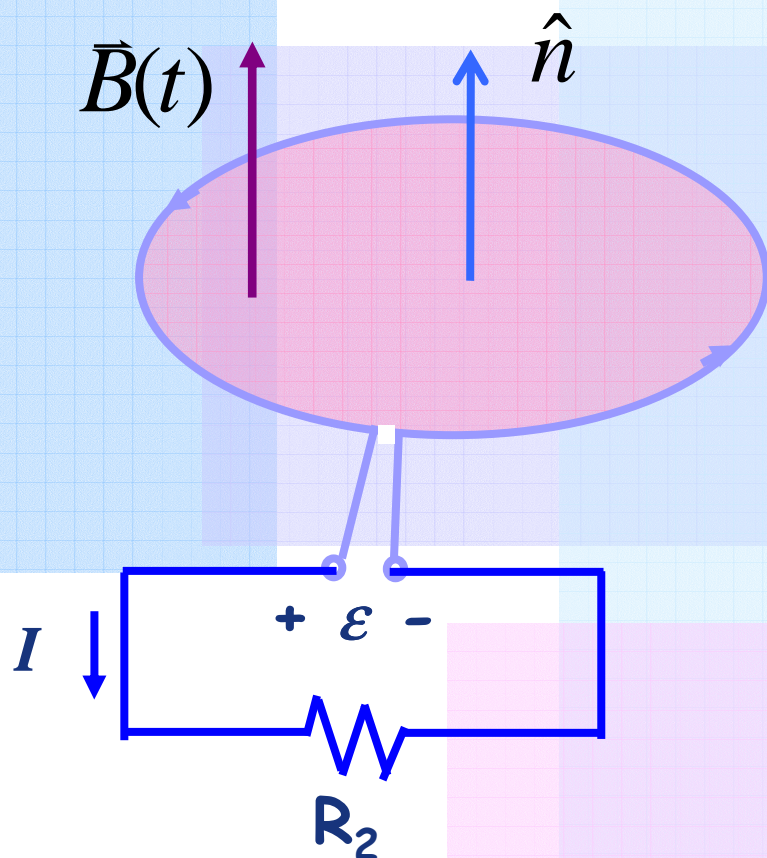
con $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

Notar que si el flujo es variable en el tiempo la fem se induce independiente de la corriente I



Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM



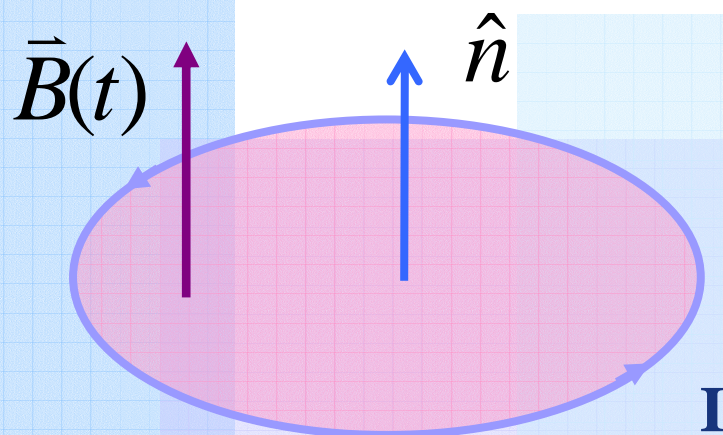
$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$

$$\mathcal{E} = R_2 I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$



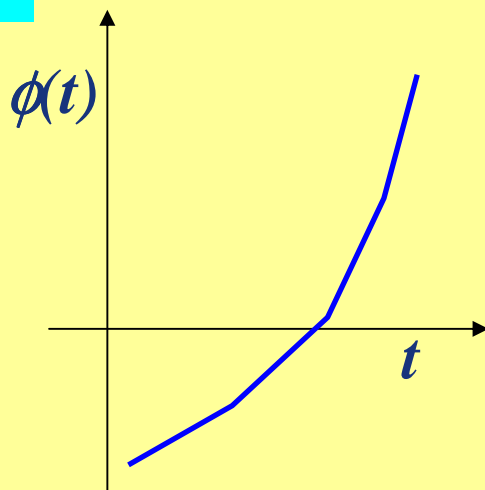
Ley de Faraday-Lenz



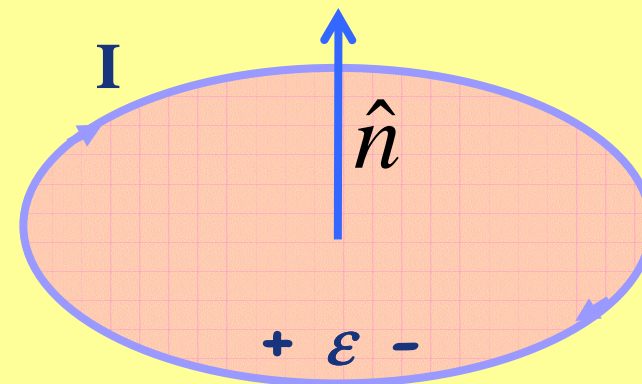
$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Si



$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$$

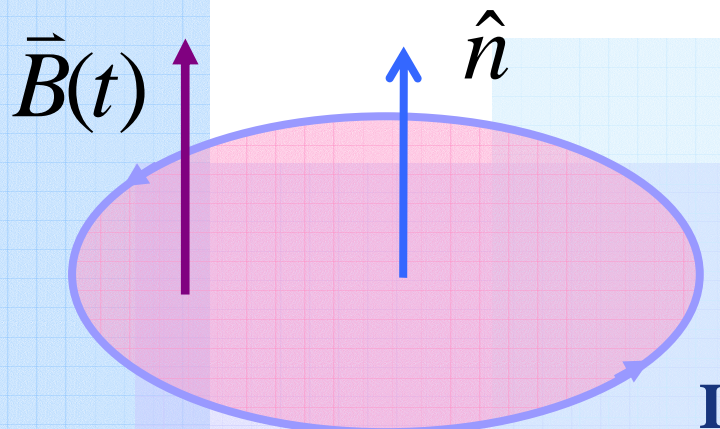


\vec{B} **crece** \Rightarrow

Corriente genera campo opuesto al crecimiento



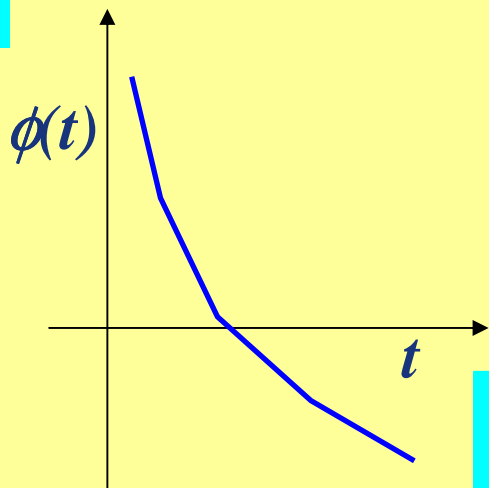
Ley de Faraday-Lenz



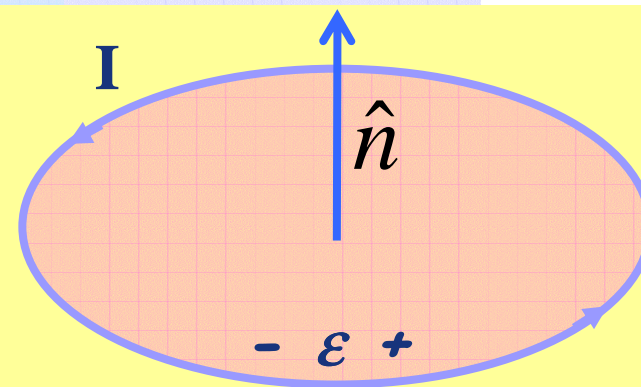
$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$

Si



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \mathcal{E} > 0$$



\vec{B}

decrece \Rightarrow

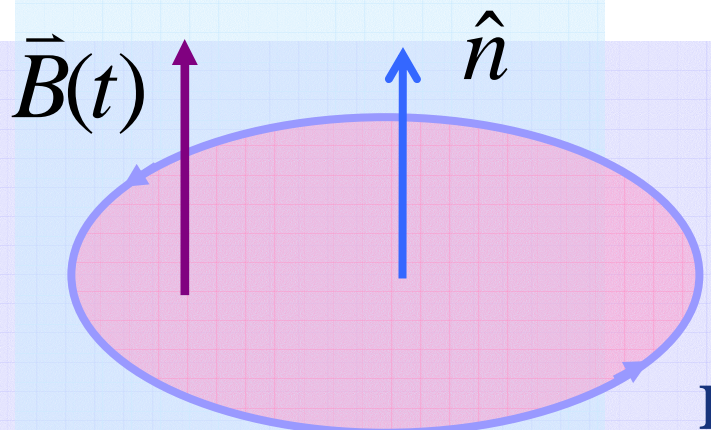
Corriente genera campo
opuesto al decrecimiento



Ley de Faraday-Lenz

Un flujo magnético variable genera o induce un FEM

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$



$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Notar que un flujo variable en el tiempo se puede lograr de dos formas:

- Con un campo variable $B(t)$
- Con una superficie variable $S(t)$



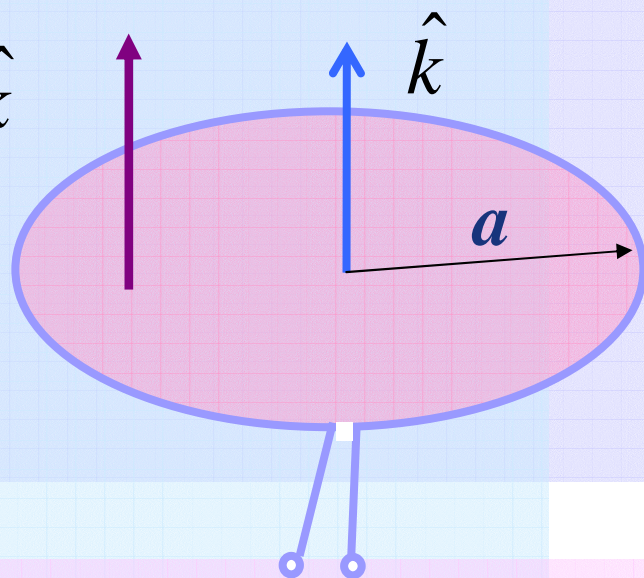
Ley de Faraday-Lenz

Ejemplo 1: flujo variable en el tiempo con un campo variable $B(t)$

Si

$$\vec{B}(t) = B_0 e^{-t/\tau} \hat{k}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$\phi(t) = B_0 e^{-t/\tau} \pi a^2$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- \mathcal{E} +

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{\tau} t e^{-t/\tau}$$



Ley de Faraday-Lenz

Ejemplo 2: área variable en el tiempo $B(t)$

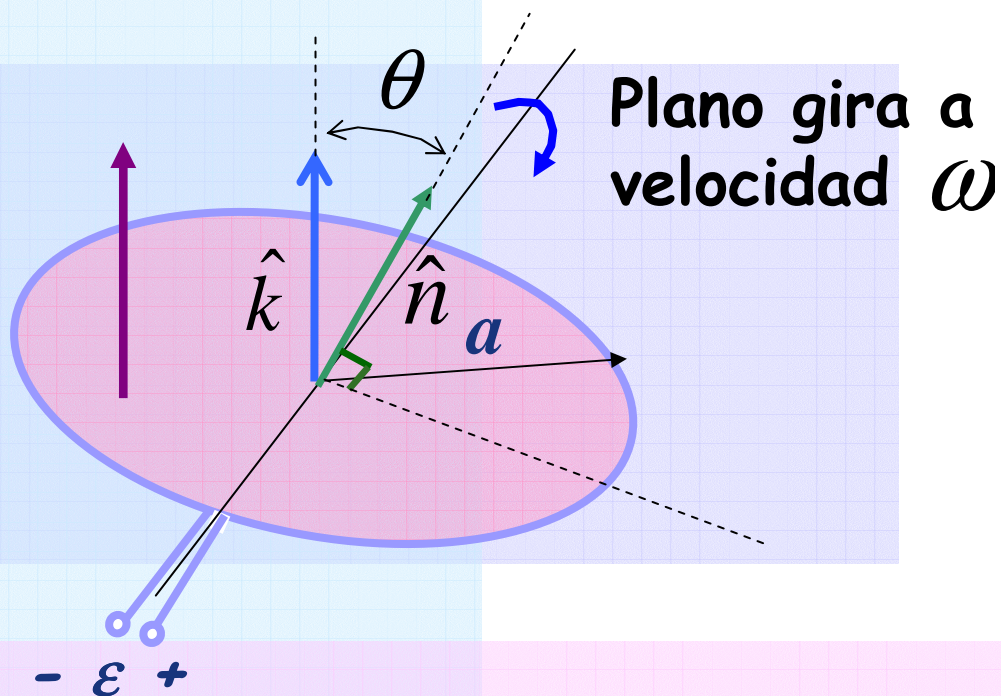
Si

$$\vec{B}(t) = B_0 \hat{k}$$

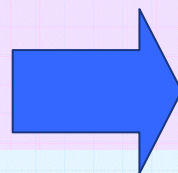
$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi(t) = B_0 A \cos \theta$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$



$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\mathcal{E}(t) = AB_0 \omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

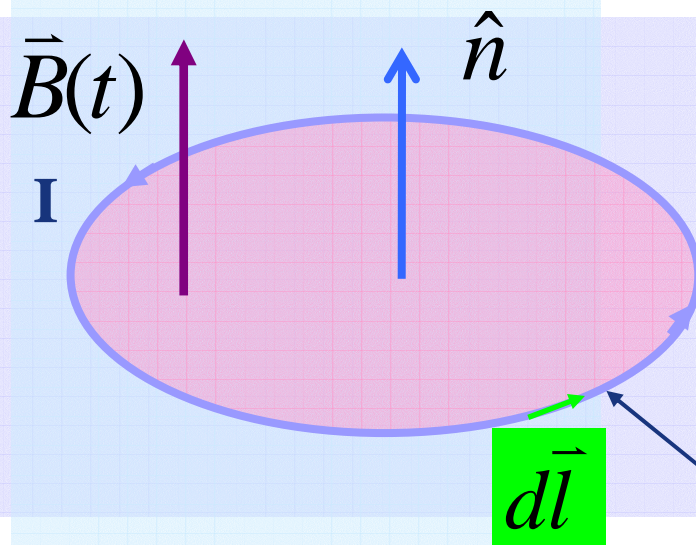


Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

Un campo magnético variable genera o induce una FEM

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

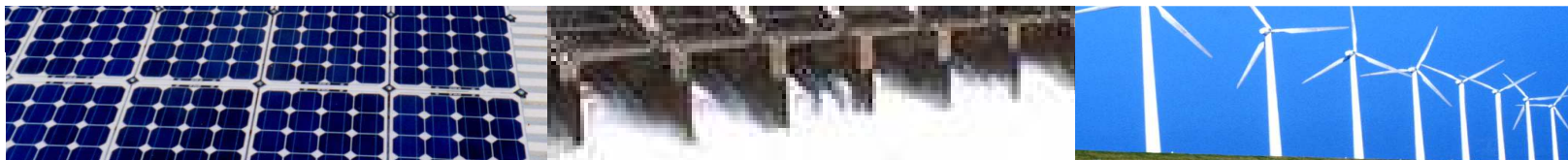
$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Trayectoria c

$$\Rightarrow \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.9)$$



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$\vec{B}(t)$

I

$d\vec{S} = ds\hat{n}$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$

Trayectoria c

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de
Maxwell

Dado
que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$



Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times (\nabla V) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

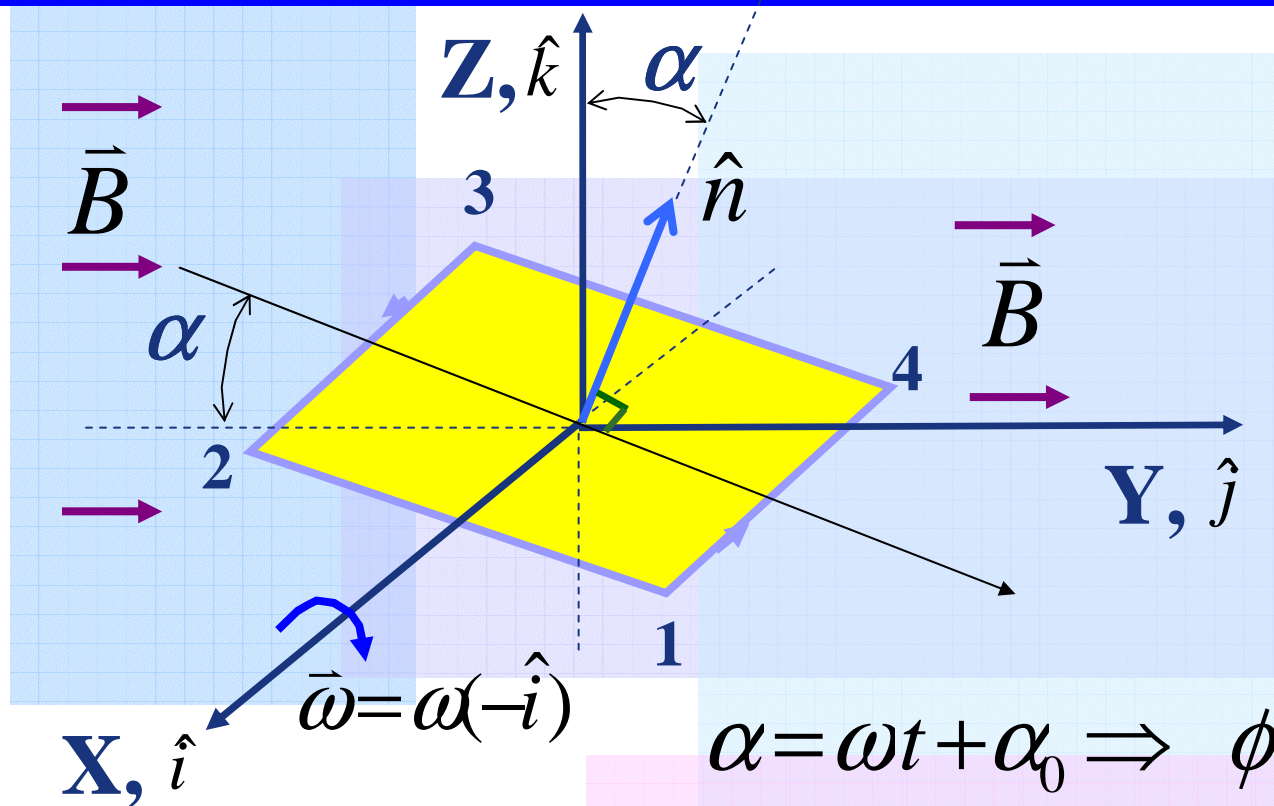
*Origen
electrostático*

$$\vec{E} = -\overbrace{\nabla V} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

*Debido a campo magnético
variable en el tiempo*



Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = BA \sin \alpha$$

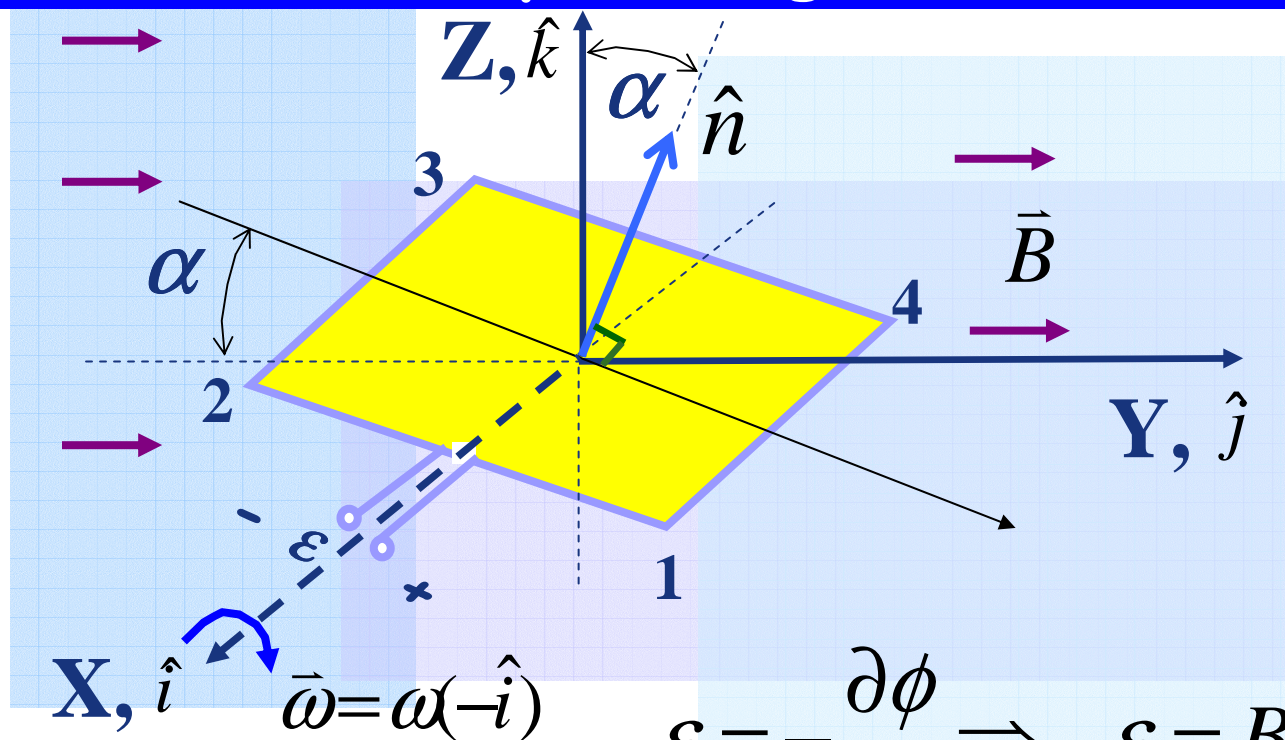
$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \phi = BA \sin(\omega t + \alpha_0)$$

**Ley de
Faraday-Lenz**

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



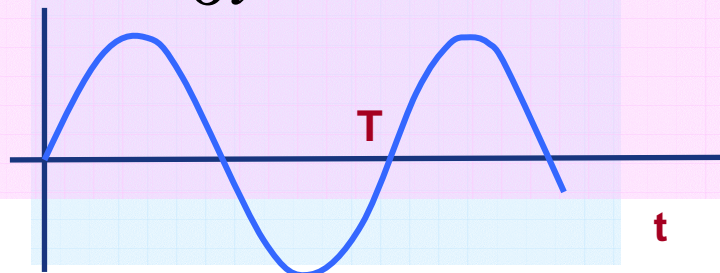
Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = B \sin \alpha$$

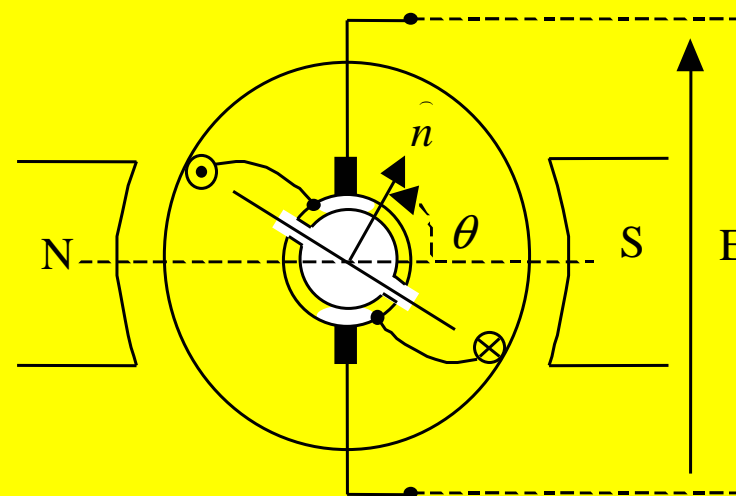
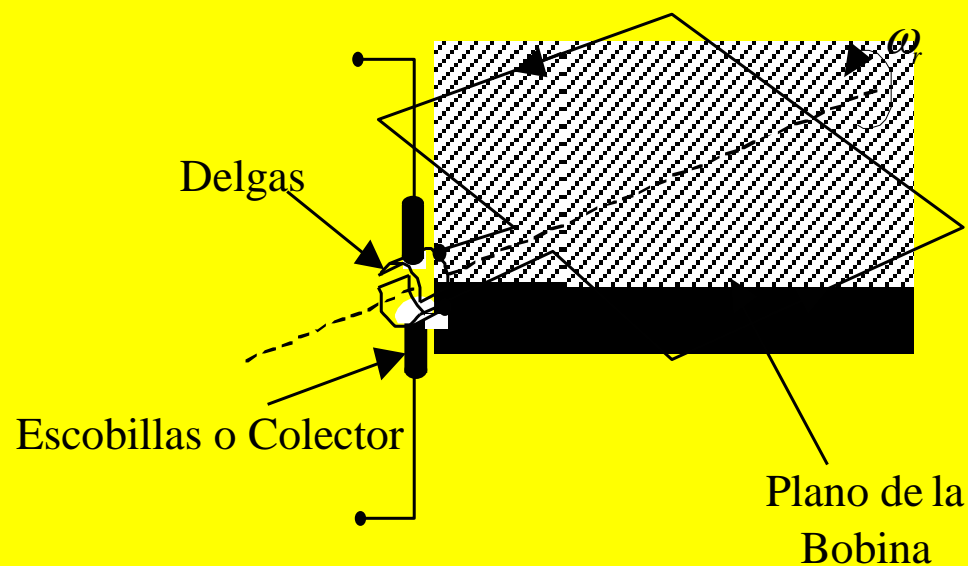
$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon = B \omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



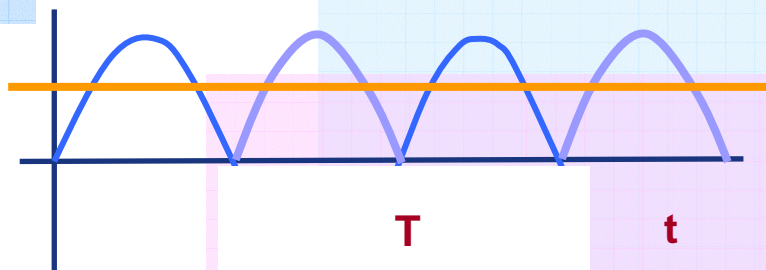
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$



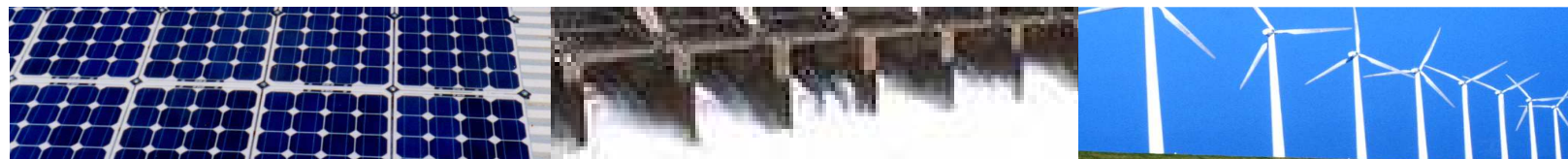
Principio del generador de Corriente Continua



Valor
medio no
nulo



$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$



Generador de Corriente Continua

