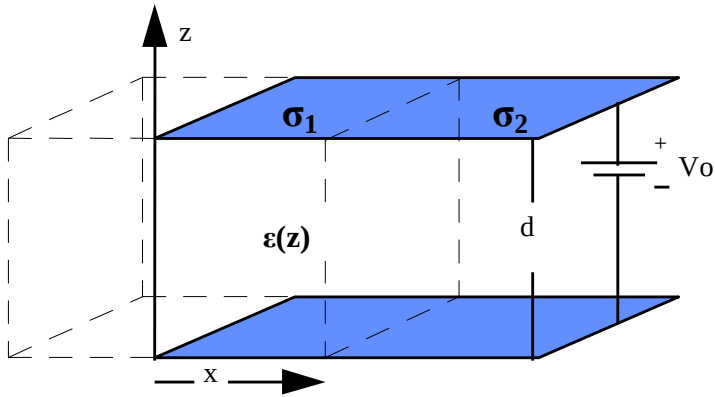


Pauta P1 C2



Sea D_1 el campo eléctrico en el condensador de $\epsilon_1 = \epsilon(z)$

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_0 \left(1 + \frac{z}{d}\right) E_1$$

Además se cumple que:

$$\iint \vec{D}_1 d\vec{S} = \sigma_1 A \Rightarrow D_1 A = \sigma_1 A \Rightarrow D_1 = \sigma_1$$

Con σ_1 densidad de carga superficial de la placa izquierda (ver figura).

Luego,

$$\sigma_1 = D_1 = \epsilon_0 \left(1 + \frac{z}{d}\right) E_1$$

$\Rightarrow$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{d}{d+z} \Rightarrow E_1 = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{d}{d+z} \hat{z}$$

Aplicando la definición de diferencia de potencial eléctrico:

$$V_o = -\int_0^d \left(-\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{d}{d+z}\right) dz = \frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} \int_0^d \frac{dz}{d+z} = \frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} (\ln(d+d) - \ln(d)) = \frac{\sigma_1 d}{\epsilon_0} \ln(2)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{V_o \epsilon_0}{d \ln(2)}$$

(1 punto)

De manera análoga, sea D_2 el campo eléctrico en el condensador de $\epsilon_2 = \epsilon_0$

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 \Rightarrow D_2 = \epsilon_1 E_2 = \epsilon_0 E_1$$

$$\iint \vec{D}_2 d\vec{S} = \sigma_2 B \Rightarrow D_2 B = \sigma_2 B \Rightarrow D_2 = \sigma_2$$

$$\sigma_2 = D_2 = \epsilon_0 E_2$$

$\Rightarrow$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \hat{z}$$

$$V_o = -\int_0^d -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{V_o \epsilon_0}{d}$$

(1 punto)

La carga total en la placa superior es:

$$Q = \sigma_1 A + \sigma_2 B = \frac{V_o \epsilon_0}{d \ln(2)} xb + \frac{V_o \epsilon_0}{d} (a - x)b$$

La capacidad es:

$$Q = CV_o \Rightarrow C = Q/V_o$$

$$C = \frac{\epsilon_0}{d \ln(2)} xb + \frac{\epsilon_0}{d} (a - x)b$$

(1 punto)

La energía del condensador es:

$$W = \frac{1}{2} CV_o^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{d \ln(2)} xb + \frac{\epsilon_0}{d} (a - x)b \right) V_o^2$$

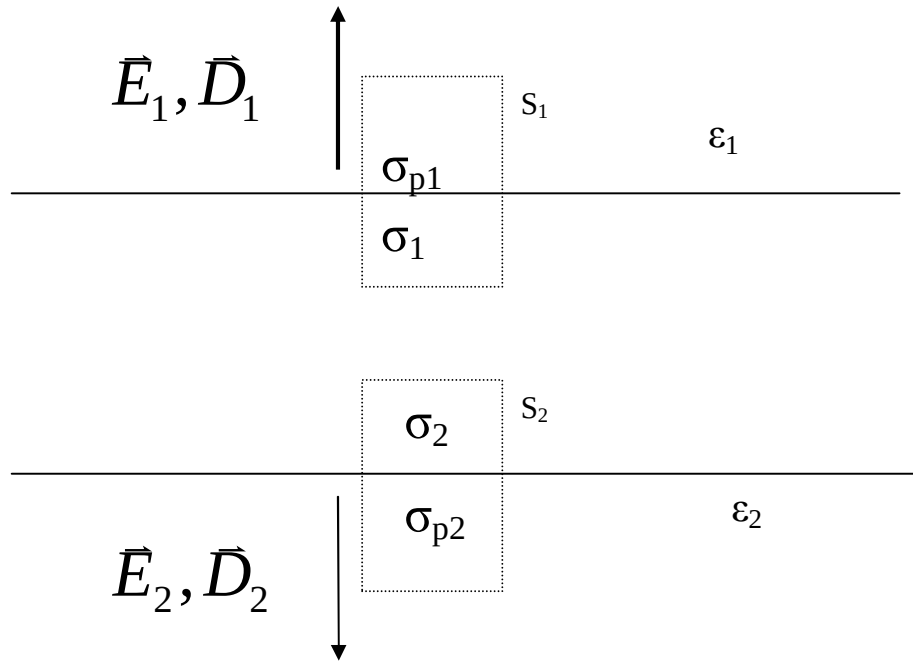
(2 puntos)

La fuerza es:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} \hat{x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0}{d \ln(2)} b - \frac{\epsilon_0}{d} b \right) V_o^2 \hat{x}$$

(1 punto)

Pauta P2 C2



Para S_1 :

$$\iint \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \sigma_1 A$$

$$\Rightarrow D_1 A = \sigma_1 A$$

$$\Rightarrow D_1 = \sigma_1$$

$$\iint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_1 + \sigma_{p1}}{\epsilon_o} A$$

$$\Rightarrow E_1 A = \frac{\sigma_1 + \sigma_{p1}}{\epsilon_o} A$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_{p1}}{\epsilon_o}$$

Además:

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_{p1}}{\epsilon_o} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \Rightarrow \sigma_{p1} = \left(\frac{\epsilon_o}{\epsilon_1} - 1 \right) \sigma_1$$

Para S_2 :

$$\iint \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \sigma_2 A$$

$$\Rightarrow D_2 A = \sigma_2 A$$

$$\Rightarrow D_2 = \sigma_2$$

$$\iint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_2 + \sigma_{p2}}{\epsilon_0} A$$

$$\Rightarrow E_2 A = \frac{\sigma_2 + \sigma_{p2}}{\epsilon_0} A$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_{p2}}{\epsilon_0}$$

Además:

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_{p2}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \Rightarrow \sigma_{p2} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - 1\right)\sigma_2$$

(1.5 puntos)

El vector polarización es:

$$\epsilon_i E_i = D_i = \epsilon_0 E_i + P_i \Rightarrow P_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) E_i$$

El campo eléctrico E_i producido por un plano infinito es constante $\Rightarrow P_i = \text{CONSTANTE}$

Luego, la densidad volumétrica de polarización es cero ya que $\nabla \cdot P_i = 0$

El campo eléctrico corresponde a la superposición de planos infinitos, y es constante. Y como la densidad volumétrica de polarización es nula, se tiene que $E_1 = E_2$

(1 punto)

$$D_1 + D_2 = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$$

$$E_1 = E_2 = E$$

$\Rightarrow$

$$\epsilon_1 E + \epsilon_2 E = \sigma$$

$\Rightarrow$

$$\epsilon_1 E + \epsilon_2 E = \sigma$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \Rightarrow \frac{\epsilon_1 \sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \sigma_1 \qquad \frac{\sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{\epsilon_2 \sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \sigma_2$$

(1.5 puntos)

Además, E y D es nulo en el interior del conductor (1 punto)

Finalmente, reemplazando los valores en las densidades superficiales de polarización:

$$\sigma_{p2} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - 1\right)\sigma_2 = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - 1\right)\frac{\epsilon_2 \sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_2)\sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$
$$\sigma_{p1} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1\right)\sigma_1 = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1\right)\frac{\epsilon_1 \sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_1)\sigma}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

(1 punto)

dudas a: cabenavi@ing.uchile.cl