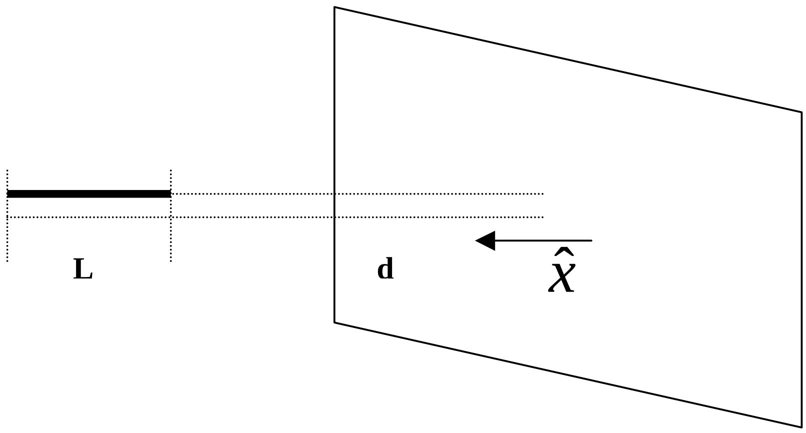
Pauta P2 Control 1 2007



El campo eléctrico producido por un plano infinito es:

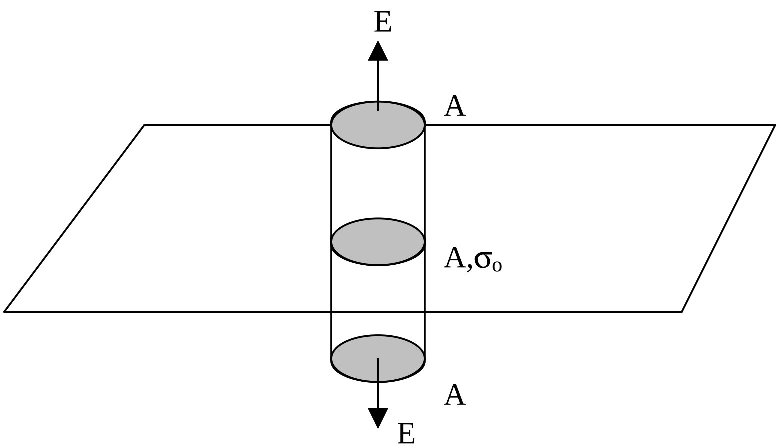
$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$EA + EA = \frac{\sigma_o A}{\varepsilon_o}$$ el plano es infinito, el campo apunta perpendicular al plano

$$E = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}$$

Por lo tanto:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\hat{x}$$



(2 puntos por expresión correcta del campo)

Luego la fuerza sobre el alambre de largo L es:

$$\vec{F} = \int \vec{E}dq = \int \vec{E}(-\lambda)dx = \int \vec{E}(-\lambda)dx$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{F} = \int \vec{E}(-\lambda)dx = \int_{d}^{d+L} \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}(-\lambda)dx \;\; \hat{x}$$

$$= \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}(-\lambda)x/_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d+L}} \;\; \hat{x} = \frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}(-\lambda)\left[(d+L)-d\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\lambda L \;\; \hat{x}$$

(2 puntos por expresión de la fuerza)

La ecuación de movimiento es:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{a} =$ aceleración del centro de masa

$$\vec{F} = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o}\lambda L \;\; \hat{x} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{a} = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o m}\lambda L \;\; \hat{x}$$

aceleración constante!!

$$\vec{v}_{CM} = -\frac{\sigma_o}{2\varepsilon_o m}\lambda L \cdot t + v_o \;\; \hat{x}$$

$v_o = 0$ ya que parte del reposo

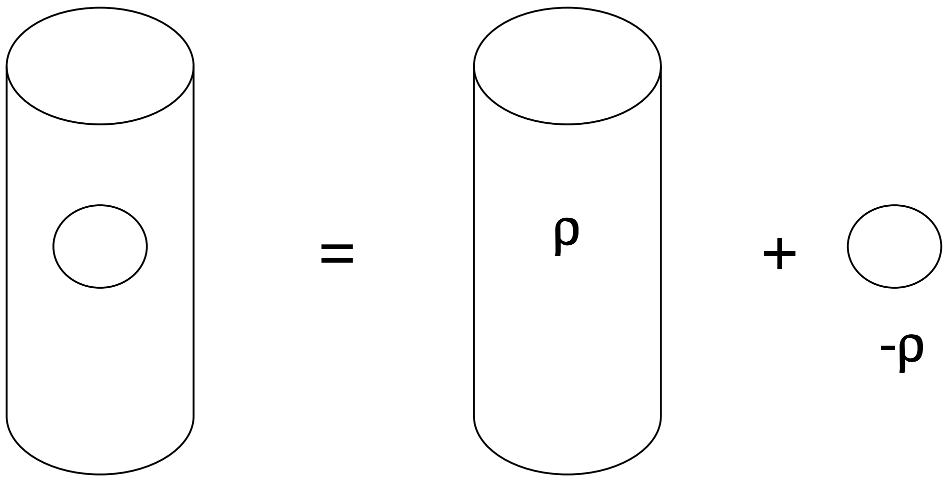
$$\vec{x}_{CM} = -\frac{\sigma_o}{4\varepsilon_o m}\lambda L \cdot t^2 + x_o \;\; \hat{x}$$

$x_o = d + L/2 =$ posición del centro de masa en t=0

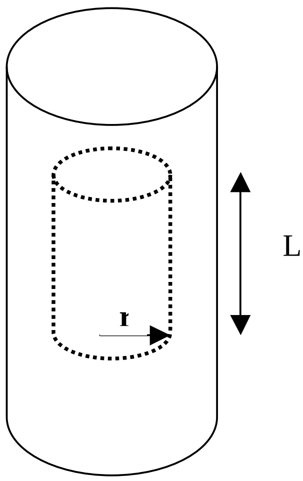
(2 puntos por ecuación de movimiento)

Pauta Ejercicio 1

Para resolver este problema se aplica el principio de superposición



Para calcular el campo eléctrico producido por el cilindro se ocupa la ley de Gauss:



$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$\oiint = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\iint dS = E2\pi rL$$

$$Q_{encerrada} = \iiint \rho dV = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r} \frac{\rho_o}{r_0} rrdrd\theta dZ = \frac{2\pi L\rho_o}{r_0}\frac{r^3}{3}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico es:

$$E2\pi rL = \frac{2\pi L\rho_o}{\varepsilon_o r_0}\frac{r^3}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_o r^2}{3\varepsilon_o r_0}\hat{r}$$

(1.5 puntos)

El potencia eléctrico producido por el cilindro es:

$$V(r) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(ref)$$

$$V(r) = -\int_{b}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(b)$$

$$V(r) = -\int_{b}^{r} \frac{\rho_o r^2}{3\varepsilon_o r_0} \cdot dr + 0$$

$$\Rightarrow$$

$$V(r) = -\frac{\rho_o}{3\varepsilon_o r_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{b^3}{3}\right]$$

(1.5 puntos)

Ahora se calcula el campo eléctrico producido por la esfera de densidad -ρ.

El problema radica en que la densidad es $\frac{\rho_o}{r_0} r$, con r en cilíndricas

Por lo tanto, hay que pasar este r en cilíndricas a un r en esféricas.

$$-\rho = -\frac{\rho_o}{r_0} r = -\frac{\rho_o}{r_0} r' sen\varphi'$$

Por campo eléctrico por definición:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|^3} \rho dV$$

El campo eléctrico se calcula en el plano:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\,sen\varphi\cos\theta\hat{x} + r\,sen\varphi sen\theta\hat{y}$$

$$\vec{r}\,' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$= r'sen\varphi'\cos\theta'\hat{x} + r'sen\varphi' sen\theta'\hat{y} + r'\cos\varphi'\hat{z}$$

Reemplazando:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{(r\,sen\varphi\cos\theta - r'sen\varphi'\cos\theta')\hat{x} + (r\,sen\varphi sen\theta - r'sen\varphi' sen\theta')\hat{y} - r'\cos\varphi'\hat{z}}{[(r\,sen\varphi\cos\theta - r'sen\varphi'\cos\theta')^2 + (r\,sen\varphi sen\theta - r'sen\varphi' sen\theta')^2 + (r'\cos\varphi')^2]^{3/2}} \left(-\frac{\rho_0}{r_o} r' sen\varphi'\right) r'^2 sen\varphi' dr' d\varphi' d\theta'$$

(1.5 puntos por escribir expresión)

Por potencia eléctrico por definición:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho dV}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

Reemplazando:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{(\frac{\rho_0}{r_o} r' \mathrm{s}en\varphi')r^2{}' \mathrm{s}en\varphi' dr' d\varphi' d\theta'}{[(r\,\mathrm{s}en\varphi\cos\theta - r'\mathrm{s}en\varphi'\cos\theta')^2 + (r\,\mathrm{s}en\varphi sen\theta - r'\mathrm{s}en\varphi' sen\theta')^2 + (r'\cos\varphi')^2]^{1/2}}$$

(1.5 puntos por escribir expresión)

Observación: No se podía ocupar Gauss con la esfera ya que el campo eléctrico no es constante sobre una superficie esférica ya que la densidad dependía del radio en cilíndricas y no en esféricas.