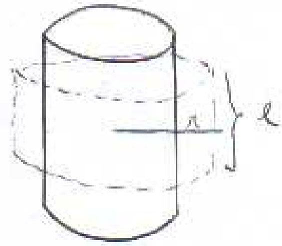
P] Se tiene un cilindro infinito de radio R cargado con densidad volumétrica variable $\rho(r) = \frac{\rho_0 R}{r}$

En la superficie del cilindro existe además una densidad de carga superficial negativa uniforme $\sigma_0 = -\rho_0 R$

Determine el campo eléctrico para cualquier punto del espacio.



Para $r > R$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 2\pi r \cdot l = \frac{\iiint \rho(r)\, r\, dr\, d\theta\, dz + (-\rho_0 R)\, 2\pi R\, l}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint \rho(r)\, r\, dr\, d\theta\, dz = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho_0 R}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho_0 R \cdot R \cdot 2\pi \cdot l$$

$$= \rho_0 R^2\, 2\pi \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad E\, 2\pi r \cdot l = \frac{\rho_0 R^2\, 2\pi \cdot l - \rho_0 R^2\, 2\pi l}{\varepsilon_0}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad E = 0 \quad \Rightarrow \vec{E} = 0$$

Para $r < R$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho_0 R}{\cancel{r}} \cdot r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$E \cdot 2\pi r\, l = \rho_0 R\; r\, 2\pi \cdot l$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\, \hat{r}.$$

CABENAVI @ ING.UCHILE.CL

P] Se tiene un campo eléctrico definido por $\hat{E} = r \operatorname{sen}\theta \; \hat{r}$ en coordenadas cilíndricas.

Determine

a) Distribución de carga en el espacio

b) Si se deja una carga puntual en el origen, determine la ecuación de movimiento de la carga.

$$\vec{E} = r \operatorname{sen}\theta \; \hat{r}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot r \operatorname{sen}\theta)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \operatorname{sen}\theta)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{2r \operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \rho = 2\varepsilon_0 \operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

$$\vec{F} = \int \vec{E} \, dq$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2\varepsilon_0 q \operatorname{sen}\theta \hat{r} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon_0 q \operatorname{sen}\theta \; \hat{r} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}\right]$$

$$\begin{array}{l} \text{Según } \hat{r} \Rightarrow \\ \text{Según } \hat{\theta} \Rightarrow \\ \text{Según } \hat{k} \Rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{l} 2\varepsilon_0 q \operatorname{sen}\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{array}\right\} \text{Sistema de ecuaciones diferenciales}$$

$$t=0 \left\{ \begin{array}{ll} \dot{z} = 0 & z = 0 \\ \dot{\theta} = 0 & \theta = 0 \\ \dot{r} = 0 & r = 0 \end{array} \right\} \text{condiciones iniciales}$$

P] Se tiene una distribución de carga con simetría esférica tal como lo muestra la figura.

i) Entre $r = 0$ y $r = b$ se tiene una densidad volumétrica de carga ρ_0

ii) Entre $r = a$ y $r < b$ el campo eléctrico es de la forma $\vec{E} = \frac{1}{3} K_0 r \hat{r}$

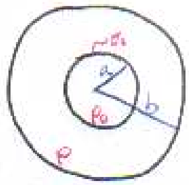
iii) En $r = a$ existe una densidad superficial de carga σ_1 desconocida.

Determine

a) Densidad de carga ρ entre $r = a$ y $r = b$

b) Campo eléctrico en todo el espacio

c) Densidad superficial σ_1



- Para $r < a$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

- Para $a < r < b$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\frac{1}{3} K_0 r \hat{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \left(\frac{1}{3}K_0 r\right)\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K_0}{3} r^3\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{K_0}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = K_0 \varepsilon_0 = \text{CONSTANTE}$$

Utilizando GAUSS:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{3} K_0 r \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\oint ds} = \frac{\frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3) \cdot K_0 \varepsilon_0 + \sigma_1 \cdot 4\pi a^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{3} K_0 4\pi r^3} = \cancel{\frac{4}{3}\pi r^3 K_0} - \frac{4}{3}\pi a^3 K_0 + \frac{\sigma_1 4\pi a^2}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi a^2}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} - \frac{4}{3}\pi a^3 K_0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{a\rho_0}{3} - \frac{a K_0 \varepsilon_0}{3}$$

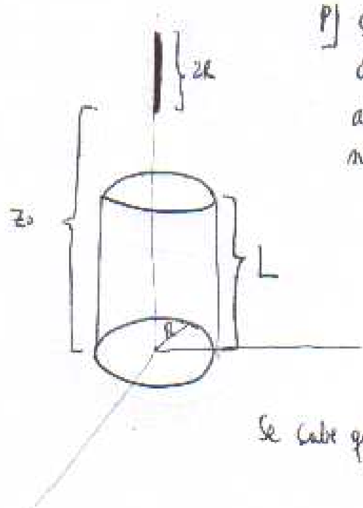
• Para $r > b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(b^3 - a^3\right) \cdot K_0 \varepsilon_0 + \sigma_1 \cdot 4\pi a^2 + \rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(b^3 - a^3\right) \varepsilon_0 K_0 + \sigma_1 4\pi a^2 + \rho_0 \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

P] Se tiene un cilindro de radio R y altura L y densidad uniforme ρ_0. Determine la fuerza un alambre de largo $2R$ y densidad de carga negativa $-\lambda$



Se sabe que el campo eléctrico se calcula como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\rho\, dV$$

$\vec{r} = z\hat{k}$ → punto donde quiero calcular el campo

$\vec{r}\,' = r\hat{r} + z'\hat{k}$ → punto dentro de la distribución de carga.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{\rho_0\left[(z-z')\hat{k} - r\hat{r}\right] r\,dr\,d\theta\,dz'}{\left((z-z')^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{\rho_0 (z-z')\,r\,dr\,d\theta\,dz'}{\left((z-z')^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{k} + \underbrace{0\,\hat{r}}_{=0}$$

ya que el campo en el e
R tiene sólo
componente seg

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\cdot\rho_0 \int_0^R\int_0^L \frac{(z-z')\,r\,dr\,dz'}{\left((z-z')^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\rho_0\int_0^L\left[\frac{-(z-z')}{\left((z-z')^2+r^2\right)^{1/2}}\Big|_0^R\right]dz'\ \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\rho_0\int_0^L\left[\frac{-(z-z')}{\left((z-z')^2+R^2\right)^{1/2}} + \frac{(z-z')}{\left((z-z')^2\right)^{1/2}}\right]dz'\ \hat{k}$$

Si $z > z'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 2\pi\rho_0\int_0^L\left(1 - \frac{(z-z')}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{1/2}}\right)dz'\ \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[z'\Big|_0^L - \left[(z-z')^2+R^2\right]^{1/2}\Big|_0^L\right]\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left[L - \sqrt{(z-L)^2+R^2} + \sqrt{z^2+R^2}\right]\hat{k}$$

$$\vec{F} = \int \vec{E}\, dq$$

$$\vec{F} = \int_{z_0}^{z_0+2R} \frac{\varphi_0}{2\varepsilon_0} \left[L - \sqrt{(z-L)^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2}\right] (-\lambda\, dz)$$

$$\vec{F} = -\frac{\lambda\varphi_0}{2\varepsilon_0} \left[\int_{z_0}^{z_0+2R} L\, dz - \int_{z_0}^{z_0+2R} \sqrt{(z-L)^2 + R^2}\, dz + \int_{z_0}^{z_0+2R} \sqrt{z^2+R^2} \right.$$

HINT:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right)$$

Cambio de variable:

$z - L = u$

$dz = du$

Si $z = z_0 \Rightarrow z_0 - L = u$

Si $z = z_0 + 2R \Rightarrow z_0 + 2R - L = u$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{\lambda\varphi_0 L}{2\varepsilon_0} (z_0 + 2R - z_0) + [-I_1 + I_2] \cdot -\frac{\lambda\varphi_0}{2\varepsilon_0}$$

$$I_1 = \int_{z_0}^{z_0+2R} \sqrt{(z-L)^2 + R^2}\, dz = \int_{z_0-L}^{z_0+2R-L} \sqrt{u^2 + R^2}\, du$$

$$I_2 = \int_{z_0}^{z_0+2R} \sqrt{z^2+R^2}\, dz$$

Utilizando HINT

$$I_1 = \int_{z_0-L}^{z_0+2R-L} \sqrt{u^2+R^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{R^2+u^2} + \frac{R^2}{2} \ln\left(\frac{u}{R} + \frac{\sqrt{R^2+u^2}}{R}\right) \Bigg|_{z_0-L}^{z_0+2R}$$

$$I_2 = \int_{z_0}^{z_0+2R} \sqrt{z^2+R^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{R^2+z^2} + \frac{R^2}{2} \ln\left(\frac{z}{R} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{R}\right) \Bigg|_{z_0}^{z_0+2R}$$