

## Capítulo 6

# ONDAS

### 6.1. Introducción

la ecuación de ondas Ec.5.31. Aunque esta ecuación Existen numerosos fenómenos en la naturaleza que obedecen a la hemos desarrollado para el caso de una perturbación que se propaga en un medio material —y en este caso se habla de ondas mecánicas, o elásticas o acústicas—existen otros fenómenos en que ella representa ondas que se propagan en el vacío, como ocurre con las ondas electromagnéticas. A pesar de la gran diversidad de los procesos ondulatorios, por el hecho de obedecer la misma ecuación, poseen propiedades y características comunes algunas de las cuales deseamos estudiar.

### 6.2. La Función de Ondas

Se dice que una onda se propaga entre dos puntos, cuando una perturbación (por ejemplo, una deformación, una sobrepresión, etc) se desplaza desde un punto a otro sin que entre ellos haya transporte del medio material que sirve de soporte de la onda. Si bien la perturbación puede ser una cantidad escalar o una cantidad vectorial que se propaga en tres dimensiones, para simplificar nosotros supondremos que se trata de una deformación transversal  $\psi(x, t)$ , que avanza *sin deformarse* a lo largo de una cuerda con velocidad  $v$  constante.

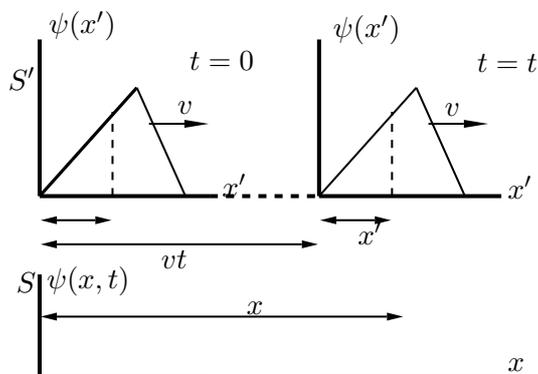


Figura 6.1:

En la Fig. 6.1, se han representado dos posiciones sucesivas de un pulso transversal, en los instantes  $t = 0$  y  $t = t$ .  $S$  es un observador fijo y  $S'$  un observador móvil que se traslada con la velocidad  $v$  del pulso y que en  $t = 0$  coincide con el sistema fijo. Para  $S'$  la forma del pulso  $\psi(x')$  no depende del tiempo ya que para este observador el pulso no se mueve y su forma no varía. Para el observador fijo, la forma del pulso será  $\psi(x, t)$  la que debe ser igual a  $\psi(x')$ . Pero,  $x' = x - vt$ , por lo que

$$\psi(x, t) = \psi(x - vt)$$

representa una onda que se propaga en el sentido positivo del eje  $x$ , sin deformarse y con velocidad constante  $v$ .

Análogamente, la función

$$\psi(x, t) = \psi(x + vt)$$

representa una onda que se propaga en el sentido negativo del eje  $x$ , sin deformarse y con velocidad constante  $v$ . Por lo tanto, cualquiera función cuyo argumento sea  $x + vt$  o  $x - vt$  o un múltiplo de  $x \pm vt$ , describe una onda en una dimensión, la que deberá satisfacer la ecuación de ondas. Una función de onda más general será entonces

$$\psi(x, t) = \psi(x - vt, x + vt).$$

Si definimos

$$r = x - vt \tag{6.1}$$

$$s = x + vt \tag{6.2}$$

podemos expresar  $\psi$  como función de  $r$  y  $s$ :  $\psi = \psi(r, s)$ . Evaluando las derivadas parciales de  $\psi$  que reemplazaremos en la ecuación de ondas se obtienen las relaciones:

$$\frac{\partial \psi(r, s)}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Pero, de Ecs. 6.1 y 6.2

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} = 1$$

por lo que

$$\frac{\partial \psi(r, s)}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Derivando nuevamente,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}. \quad (6.3)$$

Evaluemos ahora

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Pero, de Ecs. 6.1 y 6.2

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -v \quad \text{y} \quad \frac{\partial s}{\partial t} = v.$$

Luego,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \right],$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \right]. \quad (6.4)$$

Reemplazando las Ecs. 6.3 y 6.4 en la ecuación de ondas resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial s}.$$

Por lo tanto, la función  $\psi$  debe satisfacer la condición de que el segundo miembro se anule. La función más general que satisface este requerimiento:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial s} = 0$$

es entonces

$$\psi = \psi_1(r) + \psi_2(s).$$

Luego, la función de ondas más general y que es solución de la ecuación de ondas está representada por

$$\boxed{\psi(x, t) = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt)}$$

expresión que se conoce como *solución de D'Alembert*. Vemos que el fenómeno ondulatorio unidimensional más general corresponde a una superposición lineal de ondas que se propagan en sentidos opuestos.

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(r)}{\partial x} &= \frac{d\psi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\psi(r)}{dr} \\ \frac{\partial \psi(r)}{\partial t} &= \frac{d\psi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial t} = -v \frac{d\psi(r)}{dr}, \end{aligned}$$

y de estas dos deducimos que para  $r = x - vt$

$$\boxed{\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(r)}{\partial t}} \quad (6.5)$$

Análogamente, podemos deducir que para  $s = x + vt$

$$\boxed{\frac{\partial \psi(s)}{\partial x} = +\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(s)}{\partial t}} \quad (6.6)$$

Estas relaciones son características de las ondas de cualquier forma que se propagan sin deformarse con velocidad constante  $v$ .

### 6.3. La cuerda continua y otros ejemplos

En esta sección veremos algunos casos de perturbaciones que bajo aproximaciones simplificatorias satisfacen la ecuación de ondas.

#### 6.3.1. Otra vez la cuerda uniforme

Imaginemos una cuerda flexible de densidad lineal  $\mu = cte$ , que suponemos en ausencia de gravedad, y que cuando está en equilibrio estático está sometida a la tensión  $\mathcal{T}$  y que coincide con el eje  $x$ .

Si despreciamos el roce con el aire y suponemos pequeñas deformaciones *transversales* contenidas siempre en el plano de la figura, es posible hacer aproximaciones razonables.

En la Fig. 6.2 hemos representado un elemento de cuerda de largo  $\Delta x$ , el cual está sometido a tensión en sus extremos. Para pequeñas deformaciones podemos despreciar la variación de la magnitud de la tensión y suponer que es constante e igual al valor  $\mathcal{T}$  que tiene en la posición de equilibrio. Como la cuerda es flexible,  $\mathcal{T}$  debe ser tangente a la cuerda.

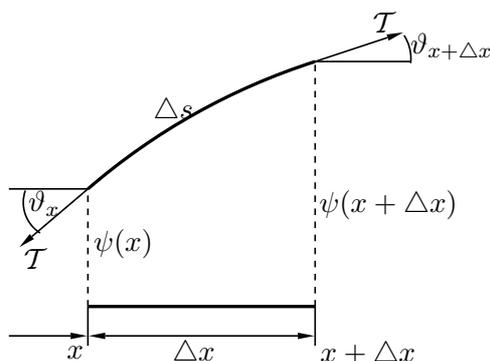


Figura 6.2:

Además, si la deformación es pequeña, el ángulo de inclinación  $\vartheta$  también será suficientemente pequeño como para validar las siguientes aproximaciones

$$\cos \vartheta \approx 1, \quad \text{sen } \vartheta \approx \text{tg } \vartheta = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta \psi)^2} \\ &= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2} \\ &\approx \Delta x. \end{aligned}$$

La última aproximación equivale a despreciar la variación de longitud del elemento de cuerda ignorando su desplazamiento longitudinal.

Proyectando la II Ley de Newton en la dirección transversal, resulta

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mathcal{T} \text{sen } \vartheta \Big|_{x+\Delta x} - \mathcal{T} \text{sen } \vartheta \Big|_x \\ &= \mathcal{T} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x \right\} \\ \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mathcal{T} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Esta expresión, cuando  $\Delta x$  tiende a cero, nos lleva a

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.7)$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (6.8)$$

es la velocidad de propagación o velocidad de fase de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Hemos redescubierto la ecuación de ondas, pero esta vez ha sido a partir de una cuerda continua, mientras que la primera vez lo hicimos a partir de una cuerda sin masa con carga discreta. De nuevo, dentro de las aproximaciones realizadas, hallamos que la velocidad queda determinada por las propiedades del medio: la tensión y la densidad lineal de la cuerda.

### 6.3.2. Ondas longitudinales en una barra delgada

Se dice que una onda es *longitudinal* cuando la agitación que produce en las partículas del medio tiene la misma dirección que la de propagación de la onda. En general, las ondas longitudinales se propagan en todos los medios. En cambio, las ondas transversales no pueden ser transmitidas por gases y líquidos puesto que estos medios no admiten esfuerzos de corte apreciables, si despreciamos su viscosidad. En un sólido se propagan simultáneamente ondas transversales y longitudinales con velocidades diferentes. Si consideramos una barra delgada—o sea, una barra cuyo diámetro transversal es mucho menor que su longitud—podemos concentrarnos en las ondas longitudinales en una dimensión.

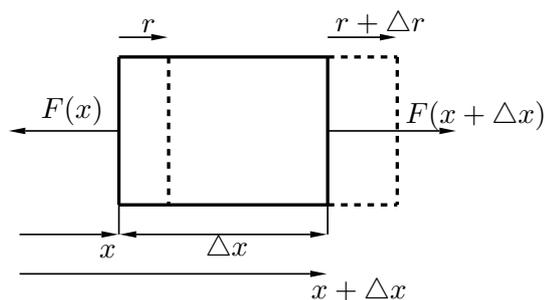


Figura 6.3:

En la Fig. 6.3 se muestra un elemento de barra de longitud  $\Delta x$  que se traslada y deforma bajo la acción de las fuerzas normales que el resto de la barra ejerce sobre las secciones que están en las posiciones definidas por  $x$  y  $x + \Delta x$ . El tamaño de la sección transversal  $S$  lo suponemos suficientemente pequeño como para aceptar que las fuerzas normales son constantes sobre sus secciones respectivas. Bajo la acción de estas fuerzas, la sección en  $x$  se traslada en  $r$  y la sección en  $x + \Delta x$  se traslada en  $r + \Delta r$ , donde  $\Delta r$  es la deformación, que supondremos suficientemente pequeña para admitir que es *elástica*. De acuerdo con lo anterior, vale la ley de Hooke:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta r}{\Delta x}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad (o módulo de Young) que caracteriza la naturaleza del material con que está constituido el sólido,  $P/S$  es el esfuerzo normal y  $\Delta r/\Delta x$  es la deformación lineal. Pero,

$$\Delta r = r(x + \Delta x) - r(x) = \left\{ r(x) + \frac{\partial r}{\partial x} \Delta x + \dots \right\} - r(x)$$

por lo que

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{\partial r}{\partial x},$$

y en consecuencia, la ley de Hooke queda como sigue

$$\frac{F}{S} = E \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (6.9)$$

Si  $\rho$  es la densidad cúbica del material, la ecuación del movimiento en la dirección del eje  $x$  nos da

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= F + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x - F = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \rho S \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Despejando  $F$  de Ec. 6.9 y reemplazando en Ec. 6.10,

$$SE \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0, \quad (6.11)$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.12)$$

Lo anterior muestra que la deformación elástica se propaga como una onda longitudinal a lo largo de la barra con una velocidad de fase que depende de las propiedades del medio material de una manera similar al caso de la propagación de una onda transversal en una cuerda.

Por otra parte, si derivamos dos veces respecto del tiempo la Ec. 6.9 y cambiamos el orden de la derivación, se obtiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial x} = SE \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Si derivamos respecto de  $x$  la Ec. 6.10,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2},$$

y combinando estas dos últimas relaciones resulta

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (6.13)$$

Luego, el esfuerzo normal también se propaga como una onda longitudinal y con la misma velocidad que la deformación elástica.

En un medio sólido extenso, no es posible despreciar las ondas de deformación transversal originadas por los esfuerzos de corte que se producen cuando se propaga una onda longitudinal. Se encuentra que la velocidad de propagación de la componente longitudinal es mayor que la de la componente transversal. Por ejemplo, para el caso de ondas sísmicas en las vecindades de la superficie de la tierra, la velocidad de propagación de la componente longitudinal ( $\sim 8$  km/s) es casi el doble de la velocidad de la componente transversal.

### 6.3.3. Ondas longitudinales en una columna gaseosa

El análisis es similar al caso de las ondas longitudinales en una barra delgada, pero esta vez debe tenerse en cuenta que la densidad del medio no es constante. Suponemos una columna de pequeña sección transversal, a fin de limitarnos a una onda que se propaga en una dimensión, además, despreciamos el efecto que la pared del tubo pueda ejercer sobre la propagación.

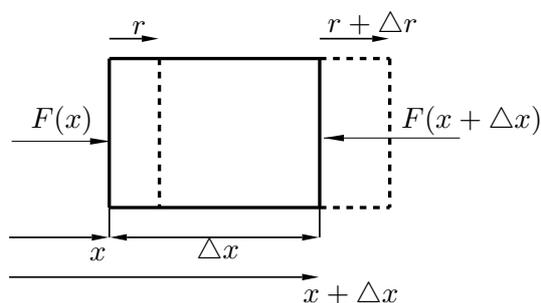


Figura 6.4:

En la Fig. 6.4 se representa un elemento de columna gaseosa de largo  $\Delta x$  y sección transversal  $S$  que bajo la variación de presión asociada a la onda, se traslada y deforma. Sean  $P_0$ ,  $V_0$  y  $\rho_0$  la presión, el volumen y la densidad en condiciones de equilibrio. Bajo la acción de una excitación los valores de la presión, del volumen y densidad cambian a  $P = P_0 + \Delta p$ ,  $V = V_0 + \Delta v$  y  $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$  respectivamente. La sección en  $x$  se desplaza en  $r$  y la sección en  $x + \Delta x$  se traslada en  $r + \Delta r$ . Supondremos que el proceso de compresión o expansión es adiabático, o sea, aceptaremos que las deformaciones son tan pequeñas como para despreciar las pérdidas de energía por difusión, viscosidad y conductividad térmica. Esta hipótesis es avalada por los resultados experimentales que satisfacen las predicciones del desarrollo que viene a continuación.

De acuerdo con lo anterior, la masa del elemento de volumen debe conservarse, y como

$$\Delta r = r(x + \Delta x) - r(x) = \frac{\partial r}{\partial x} \Delta x$$

resulta:

$$\begin{aligned} \rho_0 S \Delta x &= \rho S (\Delta x + \Delta r) \\ \rho_0 S \Delta x &= \rho S \Delta x \left( 1 + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ \rho_0 &= \rho \left( 1 + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \quad \text{y luego,} \\ \rho &= \rho_0 \left( 1 + \frac{\partial r}{\partial x} \right)^{-1} \\ \rho &= \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial r}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

donde hemos considerado que la deformación lineal  $\partial r/\partial x \ll 1$ , para justificar la aproximación que nos lleva a la ecuación anterior. Por ejemplo, para una onda sonora típica la deformación lineal es del orden de  $10^{-3}$ . De la última ecuación obtenemos

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial r}{\partial x} \quad (6.14)$$

Suponiendo, además, que la deformación volúmica es suficientemente pequeña, la sobrepresión  $\Delta p$  variará linealmente con ella de acuerdo a la ley de Hooke, por lo que podemos escribir

$$\Delta p = -K \frac{\Delta v}{V_0} \quad (6.15)$$

donde  $K$  es el *módulo de compresibilidad*, cuyo valor depende de la naturaleza del medio y de si los procesos que ocurren en el gas son adiabáticos o isotérmicos. Para las pequeñas deformaciones que estamos considerando, podemos aceptar que  $K$  es constante. Pero,

$$\frac{\Delta v}{V_0} = \frac{S\Delta r}{S\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial r}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial r}{\partial x}$$

y reemplazando en Ec. 6.15,

$$\Delta p = -K \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (6.16)$$

Por otra parte, el movimiento del elemento de volumen en la dirección  $x$  debe satisfacer la II Ley de Newton,

$$\begin{aligned} F(x) - F(x + \Delta x) &= \rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ SP(x) - S\left(P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial x} \Delta x\right) &= \rho_0 S \Delta x \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial P(x)}{\partial x} &= \rho_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 + \Delta p & \text{y} \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x} &= \frac{\partial \Delta p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$-\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \quad (6.17)$$

Derivando la Ec. 6.16 respecto de  $x$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 r}{\partial x^2},$$

y reemplazando en la Ec. 6.17 resulta

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0. \quad (6.18)$$

Luego, el desplazamiento de las partículas del gas se propaga como una onda longitudinal con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (6.19)$$

Pero, no sólo el desplazamiento se propaga como una onda. Procediendo en forma análoga con  $\Delta \rho$  y  $\Delta p$  podemos demostrar que también la sobrepresión y la variación de densidad satisfacen la misma ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} = 0 \quad (6.21)$$

donde  $v$  está dada por la Ec. 6.19.

Como dijimos, el valor de  $K$  depende de la naturaleza del proceso de propagación en el gas: isotérmico o adiabático. La evidencia experimental indica que para pequeñas variaciones de presión, el proceso es adiabático, por lo que para gases ideales se debe satisfacer

$$PV^\gamma = cte. \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

es la razón entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante. Diferenciando

$$\begin{aligned} dP V^\gamma + P \gamma V^{\gamma-1} dV &= 0 \\ V dP + \gamma P dV &= 0 \\ -V \frac{dP}{dV} &= \gamma P. \end{aligned}$$

Pero, de la Ley de Hooke, Ec.6.15

$$K = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}.$$

Combinando esta ecuación y la anterior se obtiene

$$K_{ad} = \gamma P. \quad (6.22)$$

Como la variación de  $P$  es pequeña, podemos considerar  $P \sim P_0$ , por lo que  $K$  es prácticamente constante. En consecuencia, para un proceso adiabático en un gas ideal, la velocidad de propagación será

$$v_{ad} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (6.23)$$

la que también podemos expresar en función de la temperatura, puesto que

$$PV = nRT \quad \text{y} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V},$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta,  $M$  es la masa molecular y  $R$  es la constante de los gases ideales que vale  $R = 8,31451 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ . Reemplazando en  $v_{ad}$  obtenemos

$$\boxed{v_{ad} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}}. \quad (6.24)$$

## 6.4. Frente de onda

El argumento  $\phi$  de la función de ondas  $\psi(\phi)$  recibe el nombre de *fase* de la onda. El lugar geométrico de todos los puntos que en un instante dado tienen una misma fase—o, para los cuales la perturbación  $\psi$  es la misma—es una superficie que recibe el nombre de *superficie de equifase* o *frente de onda*. En el caso de las ondas en una dimensión que estamos usando como ejemplo,  $\psi(x - vt + \alpha)$ , donde  $\alpha$  es una constante, la fase correspondiente es

$$\phi = x - vt + \alpha,$$

y la ecuación del frente de onda es

$$x - vt + \alpha = \phi = cte \quad \text{o sea,} \quad x = cte$$

lo que representa una superficie *plana* perpendicular a la dirección de propagación  $x$ . Por esta razón se dice que esta es una *onda plana*. Si derivamos la fase respecto del tiempo, obtenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 = \frac{dx}{dt} - v,$$

donde  $dx/dt$  representa la velocidad de desplazamiento del frente de onda en la dirección de propagación de la onda. La expresión anterior nos muestra que la velocidad del plano de fase es igual a la velocidad de propagación de la onda. Debido a esto,  $v$  también recibe el nombre de *velocidad de fase*.

Cuando la fuente emisora está distribuida a lo largo de una línea recta muy larga, los frentes de onda—lejos de los extremos de la distribución— son superficies cilíndricas coaxiales con la distribución. A estas ondas se las llama *ondas cilíndricas*. En cambio, cuando las dimensiones de la fuente son muy pequeñas y se la puede considerar puntiforme, los frentes de onda son esferas concéntricas. En este caso se habla de *ondas esféricas*.

## 6.5. Ondas Armónicas

Aunque la forma de la función de onda puede ser cualquiera, conviene elegir una forma armónica o sinusoidal para un análisis más detallado de las propiedades de las ondas. Hay múltiples razones para esto: una función periódica de cualquier forma se puede representar como una superposición lineal de funciones armónicas de frecuencias convenientes (análisis de Fourier); la derivación o integración de una onda armónica de frecuencia determinada produce otra función armónica de la misma frecuencia; en medios dispersivos (para los cuales la velocidad de fase es función de la frecuencia) la forma de una onda sinusoidal se mantiene, mientras que una onda no armónica cambia de forma durante su propagación. Sea

$$\psi = A \cos k(vt - x)$$

una función de onda armónica. La constante  $k$  recibe el nombre de *número de onda* y tiene la dimensión recíproca de una longitud, puesto que el argumento de la función armónica debe ser adimensional. Se define, además, la *frecuencia angular*  $\omega$  de la onda como

$$\omega = kv, \tag{6.25}$$

de modo que con estos nuevos parámetros la expresión de la función de onda queda

$$\psi = A \cos(\omega t - kx).$$

La función de onda armónica es periódica en el espacio y en el tiempo, ya que se repite su valor si  $x$  varía en una cantidad  $\lambda$  tal que

$$k\lambda = 2\pi,$$

o si  $t$  varía en una cantidad  $T$  tal que

$$\omega T = 2\pi.$$

El período espacial  $\lambda$  recibe el nombre de *longitud de onda*, y el período temporal  $T$  es el *período* a secas. Estas nuevas cantidades satisfacen las relaciones

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (6.26)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.27)$$

Otra cantidad importante para la especificación de una onda armónica es el número de oscilaciones por unidad de tiempo o *frecuencia*  $f$ ; como  $T$  es el tiempo que demora en completar una oscilación, resulta de inmediato la relación

$$f = \frac{1}{T} \quad (6.28)$$

Multiplicando las Ecs. 6.26 y 6.28 obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda f &= \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} \\ \lambda f &= v, \end{aligned} \quad (6.29)$$

relación importante que sólo vale para ondas armónicas.

### 6.5.1. Representación compleja

Aprovechando la identidad de Euler

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta \quad \text{donde } i = \sqrt{-1}$$

representaremos una onda armónica  $\psi = A \cos(\omega t - kx)$  como la parte real del número complejo  $A \exp [i(\omega t - kx)]$ . Hemos supuesto que  $A$  es real, pero puede ser imaginario sin que se altere esta convención, ya que una amplitud compleja solo introduce un desfase constante en el argumento de la función. Por ejemplo, si  $A_c$  es una cantidad compleja de magnitud real  $A$ , la podemos representar como  $A \exp [i\delta]$  de modo que la función armónica compleja la expresamos como

$$\psi_c = A_c \exp [i(\omega t - kx)] = A \exp [i\delta] \exp [i(\omega t - kx)] = A \exp [i(\omega t - kx + \delta)],$$

y cuya parte real será la función de onda armónica

$$\psi = A \cos(\omega t - kx + \delta).$$

## 6.6. Propagación de la Energía

La energía cinética de un elemento de longitud  $dx$  de la cuerda y cuya velocidad transversal es  $\partial\psi/\partial t$  tiene como expresión

$$dK = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2$$

donde  $\mu dx$  es el elemento de masa. La energía cinética por unidad de longitud o *densidad de energía cinética* será, entonces

$$\boxed{K_1(x, t) = \frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2.} \quad (6.30)$$

La energía potencial corresponde al trabajo realizado por la tensión para alargar elásticamente al elemento de longitud  $\Delta x$  a  $\Delta s$ ; luego, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta V &= \mathcal{T} (\Delta s - \Delta x) \\ &= \mathcal{T} \left( \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta\psi)^2} - \Delta x \right) \\ &= \mathcal{T} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \Delta x, \end{aligned}$$

expresión que dentro de las aproximaciones hechas podemos escribir como

$$dV = \mathcal{T} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \mathcal{T} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Luego, la energía potencial por unidad de longitud o *densidad de energía potencial*  $V_1$  será

$$\boxed{V_1(x, t) = \frac{1}{2} \mathcal{T} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2.} \quad (6.31)$$

Reemplazando la Ec. 6.5

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

en la anterior, resulta

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathcal{T} \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2,$$

y como

$$\frac{\mathcal{T}}{v^2} = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}/\mu} = \mu$$

llegamos a que

$$V_1(x, t) = K_1(x, t), \quad (6.32)$$

o sea, que la energía se reparte en partes iguales entre la cinética y la potencial, y por lo tanto, la densidad de energía mecánica total  $E_1 = K_1 + V_1$  será

$$E_1(x, t) = \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \mathcal{T} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad (6.33)$$

La energía total transportada por un elemento de longitud  $dx$  es

$$dE = E_1 dx,$$

y la potencia  $P$  transmitida es entonces  $dE/dt$ , o sea

$$P(x, t) = \mu v \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \mathcal{T} v \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2. \quad (6.34)$$

Alternativamente, si usamos la Ec. 6.5, la potencia se puede expresar

$$P(x, t) = -\mathcal{T} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (6.35)$$

La última relación corresponde a la situación que mostramos en la Fig 6.5, en la que hemos aislado un segmento  $\Delta x$  de una cuerda cuya deformación transversal se desplaza de izquierda a derecha. La fuerza que en el extremo izquierdo se ejerce sobre este segmento realiza un trabajo por unidad de tiempo que es transportado por la onda hacia la derecha. Esta potencia es  $P = -\vec{\mathcal{T}} \cdot \vec{v}_\psi$ , donde  $\vec{v}_\psi$  es la velocidad transversal del punto de aplicación de la fuerza.

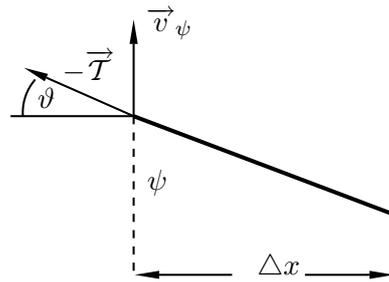


Figura 6.5:

Luego, la potencia instantánea transferida es

$$P = -\mathcal{T} \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{sen} \vartheta.$$

Pero, dentro de las aproximaciones hemos aceptado que

$$\operatorname{sen} \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y en consecuencia,

$$\boxed{P(x, t) = -\mathcal{T} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t}}. \quad (6.36)$$

Podemos encontrar expresiones análogas para los otros casos que ya hemos visto:

- Para ondas longitudinales en una barra delgada se obtiene

$$P(x, t) = -S E \frac{\partial r(u)}{\partial x} \frac{\partial r(u)}{\partial t}. \quad (6.37)$$

- Para ondas longitudinales en una columna gaseosa encontramos

$$P(x, t) = -S K \frac{\partial r(u)}{\partial x} \frac{\partial r(u)}{\partial t}. \quad (6.38)$$

Para el caso de una onda transversal armónica en una cuerda

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

las relaciones para las densidades de energía y la potencia  $K_1, V_1, E_1, P$  serán las siguientes

$$K_1 = V_1 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

$$E_1 = \mu \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

$$P = \mu v \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

Vemos que *la energía y la potencia se propagan como ondas y son directamente proporcionales al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud.*

Como el valor medio de  $\text{sen}^2 \vartheta$  en un período es  $1/2$ , el valor medio de la potencia transportada en un período por una onda en una cuerda será

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2} \quad (6.39)$$

Análogamente, para una onda plana longitudinal en una columna gaseosa obtenemos para la potencia instantánea

$$P(x, t) = -S K \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Para una onda armónica, teniendo presente que  $K = \rho v^2$  resulta

$$\boxed{P(x, t) = S \rho v \omega^2 A^2 \text{sen}^2(t - kx)} \quad (6.40)$$

y su valor medio

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} S \rho v \omega^2 A^2.} \quad (6.41)$$

Y como ocurre para cualquier onda armónica, se mantiene la proporcionalidad con el cuadrado de la frecuencia y el cuadrado de la amplitud.

Se define la *intensidad*  $I$  de una onda como *el valor medio de la energía transmitida por unidad de tiempo y por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación*. Luego la intensidad de una onda acústica plana en un medio gaseoso será

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 \quad (6.42)$$

*La respuesta del oído a las ondas sonoras depende de la variación de la presión en el gas.* Si la onda de desplazamiento es

$$r(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

la onda de presión que satisface la Ley de Hooke

$$\Delta p \equiv p(x, t) = -K \frac{\partial r}{\partial x},$$

tendrá la forma siguiente

$$p(x, t) = -K k A \text{sen}(\omega t - kx) = K k A \cos(\omega t - kx + \frac{1}{2}\pi).$$

Existe entonces, un desfase de  $\pi/2$  entre la onda de presión y la onda de desplazamiento. Si llamamos

$$p_M \equiv KkA$$

a la amplitud de la onda de presión, y puesto que  $K = \rho v^2$  y  $k = \omega/v$ , podemos escribir

$$p_M = \rho v^2 \frac{w}{v} A = \rho v \omega A$$

resultando

$$\omega A = \frac{p_M}{\rho v}.$$

Reemplazando en la expresión de la potencia media transportada obtenemos

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} S \rho v \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} S \rho v \frac{p_M^2}{(\rho v)^2} \\ &= \frac{1}{2} S \frac{p_M^2}{\rho v}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el oído la potencia acústica media es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} S \frac{p_M^2}{\rho v}$$

y la intensidad será

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \frac{p_M^2}{\rho v}} \quad (6.43)$$

## 6.7. Superposición de Ondas

Experimentalmente se encuentra que cuando las perturbaciones son pequeñas, las ondas que coinciden en el espacio se superponen linealmente y cada una se propaga independientemente de las demás. Esta situación es consecuencia de la linealidad de la ecuación de ondas, que es una ecuación diferencial parcial lineal—dentro de las aproximaciones que se han hecho—, de modo que si  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son dos funciones de onda que satisfacen la ecuación, entonces la función  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  también es una función que satisface la misma ecuación. Esta propiedad se llama *principio de superposición*.

En algunos medios, la velocidad de fase de las ondas resulta ser función de la frecuencia, lo que da lugar a que la onda cambie de forma a medida que avanza, salvo que su forma sea la de una función armónica. Los medios materiales que dan lugar a este fenómeno se llaman *medios dispersivos*. En cambio se llaman *medios no-dispersivos* aquellos en que la velocidad de fase es constante, por lo que la forma del pulso no cambia mientras se propaga. La ecuación de onda que hemos encontrado corresponde a propagación en un medio no-dispersivo.

Otro fenómeno importante ocurre cuando un tren de ondas pasa de un medio a otro de diferentes propiedades. La discontinuidad del medio da lugar a que parte de la energía transportada por la onda incidente se refleje (onda reflejada) y parte se transmita (onda transmitida). En lo que sigue estudiaremos algunos aspectos sencillos de los casos aquí mencionados.

### 6.7.1. Ondas Estacionarias

Supongamos que dos ondas armónicas de igual frecuencia  $\psi_1$  y  $\psi_2$  viajan en sentidos opuestos y simultáneamente a lo largo del eje  $x$ . Podemos imaginar que esto ocurre a lo largo de una cuerda tensa, o a lo largo de una columna gaseosa. Si representamos una función de onda compleja mediante un acento circunflejo, cada onda quedará representada por

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1 &= B_1 e^{i(\omega t - kx)} \\ \hat{\psi}_2 &= B_2 e^{i(\omega t + kx)}\end{aligned}$$

La superposición de estas dos ondas nos da

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 = e^{i\omega t} (B_1 e^{-ikx} + B_2 e^{ikx})$$

Impongamos, ahora, como *primera condición de borde*, que el extremo  $x = 0$  esté fijo. Para el caso de la cuerda, esto equivale a fijar su extremo en el origen; para la columna gaseosa, equivale a cerrar el extremo del tubo contenedor en el origen. Podemos escribir

$$\hat{\psi}(0, t) = 0 = e^{i\omega t} (B_1 + B_2),$$

por lo que

$$B_1 = -B_2 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x, t) &= B_2 e^{i\omega t} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= B_2 e^{i\omega t} 2i \operatorname{sen} kx.\end{aligned}$$

La función de onda resultante será la parte real de la función compleja

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re} \hat{\psi}(x, t)$$

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t.$$

El argumento de esta función de onda no es  $\omega t \pm kx$  por lo que *no representa una onda viajera*. Esta función, cuya parte espacial está separada de la parte temporal, representa una *onda estacionaria*. Nos muestra que un punto cualquiera  $x_1$  ejecuta un movimiento armónico simple ( $\equiv$  MAS) de amplitud  $A \operatorname{sen} kx_1$  y frecuencia angular  $\omega$ . En otras palabras, *todas* las partículas—de la cuerda, por ejemplo— oscilan con MAS de la *misma* frecuencia, por lo que la onda estacionaria representa uno de los modos normales de vibración del sistema con frecuencia normal  $\omega$ . En este caso, todas las frecuencias son posibles y su espectro es continuo. También, se observa que todos los puntos definidos por  $kx = n\pi$  tienen amplitud nula por lo que están en reposo permanente. Estos son los puntos llamados *nodos*. Aquellos que alcanzan la amplitud máxima  $A$  están definidos por  $kx = (2n - 1)\pi/2$  y se llaman *antinodos* o *vientres*.

Supongamos ahora, que imponemos como *segunda condición de borde* que el extremo  $x = l$  también esté fijo. Esto equivale a fijar el extremo  $x = l$  de la cuerda, o a cerrar el extremo  $x = l$  del tubo que contiene la columna gaseosa. La función de onda deberá satisfacer

$$\psi(l, t) = 0 = A \operatorname{sen} kl \operatorname{sen} \omega t \quad \forall t,$$

por lo que  $\operatorname{sen} kl = 0$  y  $kl = n\pi$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Luego, las ondas estacionarias posibles para estas dos condiciones de borde deben ser aquellas que satisfacen

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \text{o} \quad (6.44)$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad \text{o} \quad (6.45)$$

$$f_n = \frac{n}{2l}v \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.46)$$

Ahora el *espectro de las frecuencias permitidas es discontinuo*. Cualquier modo normal debe acomodar en el largo  $l$  un múltiplo entero de  $\lambda/2$ . En la Fig.

5.6 se han dibujado tres de los modos normales de oscilación de una cuerda con sus dos extremos fijos.

$n$	$\lambda$	$f$	armónica
1	$2l$	$\frac{v}{2l} = f_1$	primera
2	$l$	$2f_1$	segunda
3	$\frac{2}{3}l$	$3f_1$	tercera

Figura 5.6:

La frecuencia caracterizada por  $n = 1$  se llama frecuencia *fundamental* o *primera armónica*; el estado, o la onda caracterizada por una frecuencia doble de la fundamental se llama segunda armónica, etc. Para el caso representado en esta figura, vemos que son posibles todas las armónicas:  $1^a, 2^a, 3^a, \dots$

Si cambiamos las condiciones de borde, las soluciones serán diferentes. En efecto, supongamos ahora, que los puntos en el origen  $x = 0$  de la cuerda están fijos y que los puntos en  $x = l$  pueden oscilar libremente en la dirección transversal. (Esto equivale a suponer que el extremo  $x = l$  de un tubo está abierto). La onda estacionaria correspondiente a suponer que el origen esté fijo debe satisfacer la nueva condición de borde en  $x = l$ , que significa que la tensión en ese punto no tiene componente transversal. A su vez, esto se traduce en que  $\partial\psi/\partial x = 0$ , implicando que la amplitud de la oscilación de ese extremo tiene siempre un máximo. Por lo tanto,

$$\psi(l, t) = A \operatorname{sen} kl \operatorname{sen} \omega t$$

debe ser máxima en cada instante, o sea, los puntos  $x = l$  oscilan con amplitud máxima

$$A \sin kl = A, \quad \text{por lo que} \quad \sin kl = 1 \quad \text{y} \quad kl = (2n - 1)\frac{1}{2}\pi.$$

Luego, las ondas estacionarias compatibles con las nuevas condiciones de borde deben satisfacer

$$k_n = \frac{2n - 1}{2l}\pi, \quad \text{o} \quad \lambda_n = \frac{4l}{2n - 1},$$

$$\text{o} \quad f_n = \frac{2n - 1}{4l}v, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

$n$	$\lambda$	$f$	armónica
1	$4l$	$\frac{v}{4l} = f_1$	primera
2	$\frac{1}{3}4l$	$3f_1$	tercera
3	$\frac{1}{5}4l$	$5f_1$	quinta

Figura 5.7:

Para este caso, las frecuencias permitidas son la fundamental  $f_1$  y las armónicas impares  $f_2 = 3f_1$ ,  $f_3 = 5f_1$ , etc. En la Fig. 5.7 se han representado algunos modos normales para la cuerda con un extremo fijo y el otro con libertad de oscilación transversal.

### 6.7.1.1. Método de separación de variables

Este método se aplica a la ecuación de ondas, para encontrar los modos normales u ondas estacionarias. Consiste en buscar una solución que sea el producto de funciones que dependen de una sola variable cada una. Para el caso de la ecuación de ondas unidimensional suponemos que

$$\psi(x, t) = X(x)T(t)$$

donde las funciones  $X$  y  $T$  dependen sólo de  $x$  y  $t$  respectivamente. Reemplazando en la ecuación de ondas obtenemos

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}.$$

El primer miembro es sólo función de  $x$  y vale para todo  $t$ ; el segundo miembro es sólo función de  $t$  y vale para todo  $x$ . Para satisfacer esta situación ambos miembros deben ser iguales a una misma constante llamada *constante de separación* y que designaremos por  $-\omega^2$ . Resultan dos ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son inmediatas

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X &= 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T &= 0. \end{aligned}$$

Si definimos  $k = \omega/v$ , las soluciones son de la forma

$$\begin{aligned} X(x) &= a \cos kx + b \operatorname{sen} kx \\ T(t) &= c \cos \omega t + d \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Las constantes  $a, b, c, d$  dependen de las condiciones de borde, y para cada valor de  $\omega$  existirá un conjunto diferente de constantes. Substituyendo en la expresión de  $\psi$  obtenemos como solución de la ecuación de ondas

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + B \cos kx \cos(\omega t + \delta) \\ &= A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} kx \cos \omega t \\ &\quad + C \cos kx \operatorname{sen} \omega t + D \cos kx \cos \omega t \\ &= A_1 \operatorname{sen}(kx + \alpha) \operatorname{sen}(\omega t + \beta). \end{aligned} \tag{6.47}$$

donde cada término representa una onda estacionaria.

Imponiendo las condiciones de borde correspondientes a una cuerda con los dos extremos fijos, o a una columna gaseosa dentro de un tubo con los dos extremos cerrados

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0,$$

la Ec.6.46 nos da

$$\psi(0, t) = C \operatorname{sen} \omega t + D \operatorname{cos} \omega t = 0 \quad \forall t$$

lo que se satisface sólo si  $C = D = 0$  ; y

$$\psi(l, t) = \operatorname{sen} kl (A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{cos} \omega t) = 0 \quad \forall t.$$

De aquí resulta,  $kl = n\pi$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , reencontrándose los mismos valores ya obtenidos anteriormente

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad \omega_n = vk_n.$$

Luego, uno de los posibles modos normales de oscilación de la cuerda con los dos extremos fijos queda representado por

$$\psi_n(x, t) = \operatorname{sen} k_n x (A_n \operatorname{sen} \omega_n t + B_n \operatorname{cos} \omega_n t). \quad (6.48)$$

Una solución general de la ecuación de ondas compatible con las condiciones de borde que exigen que los dos extremos de la cuerda estén fijos, será una superposición de soluciones particulares como la Ec. 6.47 y quedará representada por

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} k_n x (A_n \operatorname{sen} \omega_n t + B_n \operatorname{cos} \omega_n t),$$

donde los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  quedan determinados por las condiciones iniciales:

1.  $\psi(x, 0)$  que representa la forma inicial de la cuerda, y
2.  $\dot{\psi}_0 = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_0$  que representa la velocidad transversal de cada partícula en el instante inicial (véase análisis de Fourier).

### 6.7.2. Interferencia

Supongamos que dos ondas de igual frecuencia se propagan en el mismo sentido a lo largo de una cuerda. Si además, los desplazamientos transversales son paralelos, la onda resultante, de acuerdo al principio de superposición será

$$\hat{\psi}(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son reales. La onda resultante tendrá una amplitud  $A$ , la misma frecuencia  $\omega$  y algún desfase  $\delta$ , por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} A e^{i(\omega t - kx + \delta)} &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t - kx + \varphi)}, & \text{y simplificando} \\ A e^{i\delta} &= A_1 + A_2 e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias obtenemos

$$\begin{aligned} A \cos \delta &= A_1 + A_2 \cos \varphi \\ A \sin \delta &= A_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi]^{\frac{1}{2}} \quad (6.49)$$

y

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi}. \quad (6.50)$$

Cuando las ondas que interfieren están en fase, o sea cuando  $\varphi = 0$ , la amplitud de la onda resultante es máxima:  $A = A_1 + A_2$ , y se dice en este caso que hay *interferencia constructiva*. En cambio, cuando las ondas están en oposición de fase, o sea cuando  $\varphi = \pi$ , la amplitud de la onda resultante es mínima:  $A = A_1 - A_2$ , y se dice que hay *interferencia destructiva*. Si las amplitudes de las ondas que interfieren son iguales, la amplitud resultante es nula.

### 6.7.3. Latidos

Supongamos ahora, que se superponen ondas de distinta frecuencia, que se propagan en el mismo sentido. Adicionalmente, para simplificar, aceptaremos que tienen la misma amplitud.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ \psi_2 &= A \cos(\omega_2 t - k_2 x). \end{aligned}$$

Luego, la onda resultante será

$$\psi = A[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)],$$

y si usamos una identidad trigonométrica conocida

$$\psi = 2A \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x\right).$$

La onda que resulta tiene una frecuencia  $\omega$  igual al promedio de las frecuencias de las componentes

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

y un número de onda

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

La amplitud  $2A$  es variable y se expresa como

$$2A \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x\right).$$

Se dice que la amplitud está *modulada* por una envolvente armónica de baja frecuencia que también se propaga como una onda de frecuencia

$$\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2),$$

y cuyo número de onda es

$$k' = \frac{1}{2}(k_1 - k_2).$$

Si la velocidad de propagación no depende de la frecuencia, o sea, si el medio de propagación es *no-dispersivo*, las dos ondas que se superponen tendrán la misma velocidad de fase  $v$

$$v_1 = v_2 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v.$$

La onda resultante y la onda moduladora también se propagarán con la misma velocidad de fase  $v$ , pues

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 v + k_2 v}{k_1 + k_2} = v$$

y

$$\frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1 - k_2} = v.$$

Figura 6.9:

En vista de que las ondas componentes, la resultante y la moduladora se propagan con la misma velocidad de fase, la forma de la onda resultante no cambia durante la propagación en un medio no-dispersivo. En la Fig. 6.9 hemos representado la situación descrita anteriormente. Cuando la diferencia de frecuencias entre las ondas que se superponen es pequeña se produce el fenómeno de los *latidos o pulsaciones*. Cuando se superponen ondas sonoras cuyas frecuencias difieren en menos de 10Hz, el oído escucha fluctuaciones en la intensidad del sonido resultante debido a que la amplitud de la onda portadora pasa dos veces por un máximo durante el período de la onda moduladora. Este período es

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)},$$

y la frecuencia de los latidos será

$$f' = \frac{2}{T'} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \quad (6.51)$$

Luego, el oído humano podrá detectar diferencias de frecuencias inferiores a 10 Hz contando simplemente el número de latidos que escucha en un intervalo de tiempo.

### 6.7.4. Velocidad de Grupo

Si la velocidad de un onda depende de su frecuencia, se dice que el medio es *dispersivo*. Luego, si las dos ondas anteriores se propagan en un medio dispersivo, las velocidades de fase serán diferentes

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \neq v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$$

y la forma de la onda resultante será variable. El punto más característico de una forma variable, es el máximo de su amplitud. A la velocidad de fase del máximo de la envolvente de la onda resultante se le llama *velocidad de grupo*  $v_g$ . Luego, para el caso en consideración la velocidad de grupo será

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

valor que es diferente de  $v_1$  o  $v_2$ . Si superponemos muchas ondas armónicas de frecuencias parecidas distribuidas en un intervalo relativamente estrecho resulta un pulso o paquete de ondas que se deformará al propagarse por un medio dispersivo y cuyo máximo es un punto fácilmente identificable. La velocidad de este máximo será la velocidad de grupo, la que en este caso corresponde a la expresión

$$v_g = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (6.52)$$

Pero, a cada frecuencia corresponde una velocidad de fase, pues  $\omega = kv$  por lo que la relación anterior para  $v_g$  se puede expresar en función de la velocidad de fase y de la longitud de onda o del número de onda. Resulta finalmente

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (6.53)$$

La ecuación que conecta  $\omega$  con  $k$  se suele llamar *relación de dispersión* y la representación gráfica correspondiente se conoce como diagrama de Brillouin.

## 6.8. Trasmisión y Reflexión

Cuando existe una discontinuidad en el medio de propagación, parte de la onda se trasmite y otra parte se refleja. Analicemos el caso de una onda armónica que se propaga a lo largo de una cuerda tensa cuya densidad lineal varía bruscamente de  $\mu_1$  a  $\mu_2$ .

Supongamos que la fuente que produce las ondas se encuentra en el extremo izquierdo de la cuerda y que la onda transmitida más allá de la discontinuidad, es absorbida en el otro extremo, sin reflejarse. En la Fig. 5.9 se muestra que el origen de la coordenada  $x$  se ha elegido en la sección en donde se produce la discontinuidad. En esta sección se deben satisfacer dos condiciones de borde:

Figura 5.9:

1. La forma de la cuerda es continua, por lo que se debe cumplir que

$$\psi(x=0)\Big|_{0-\epsilon} = \psi(x=0)\Big|_{0+\epsilon}. \quad (6.54)$$

2. La ecuación del movimiento transversal de un elemento de masa  $\mu dx$  es

$$-T \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{0-\epsilon} + T \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{0+\epsilon} = \mu dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Para una sección,  $dx$  tiende a cero, y el segundo miembro se anula y la condición se reduce a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{0-\epsilon} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{0+\epsilon}. \quad (6.55)$$

Supongamos que la onda armónica que incide desde la izquierda sobre la discontinuidad, la representamos por la parte real de

$$\hat{\psi}_1 = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad \text{para} \quad -\infty < x < 0,$$

donde la amplitud  $A_1$  de la onda incidente la elegimos real, y  $\omega$  es la frecuencia del dispositivo externo que genera la onda. La onda transmitida es la parte real de

$$\hat{\psi}_2 = \hat{A}_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad \text{para} \quad 0 < x < \infty.$$

Nótese que estas dos funciones de ondas no satisfacen las condiciones de borde, Ecs. 6.53 y 6.54, puesto que de ellas resultan las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_2 \\ k_1 A_1 &= k_2 \hat{A}_2 \end{aligned}$$

que son incompatibles ya que  $k_1 \neq k_2$ . Por lo tanto, necesariamente debe existir una tercera onda, la que representa la reflexión hacia la izquierda en la discontinuidad. Sea

$$\hat{\psi}_3 = \hat{A}_3 e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

la onda reflejada. Las dos condiciones de borde en  $x = 0$  toman la forma:

$$\begin{aligned} \psi_1 + \hat{\psi}_3 &= \hat{\psi}_2 \\ \frac{\partial(\psi_1 + \hat{\psi}_3)}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 + \hat{A}_3 &= \hat{A}_2 \\ -k_1 A_1 + k_1 \hat{A}_3 &= -k_2 \hat{A}_2. \end{aligned}$$

De aquí despejamos de inmediato las amplitudes de la onda reflejada y de la onda transmitida, las que resultan ser reales:

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1 \\ \hat{A}_3 &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1. \end{aligned}$$

Se acostumbra a definir el *coeficiente de transmisión de amplitud*  $T_a$

$$T_a = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad (6.56)$$

y el *coeficiente de reflexión de amplitud*  $R_a$

$$R_a = \frac{A_3}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}. \quad (6.57)$$

Nótese que  $R_a$  puede ser positivo cuando  $k_1 > k_2$ , o negativo si  $k_1 < k_2$ . Cuando  $R_a > 0$  la onda reflejada tiene la misma fase que la incidente; si

$R_a < 0$  la onda reflejada está desfasada en  $\pi$  respecto de la incidente. Como  $k_i = \omega/v_i = (\omega/\sqrt{T})\sqrt{\mu_i}$ , podemos reformular las conclusiones anteriores de la siguiente manera: cuando una onda pasa de un medio más denso a otro menos denso, la onda reflejada tiene la misma fase que la incidente; cuando pasa de un medio menos denso a otro de mayor densidad, la onda reflejada está en oposición de fase con la incidente. Por ejemplo, cuando una onda que se propaga por una cuerda llega a un extremo fijo, se refleja en oposición de fase puesto que dicho extremo se comporta como un medio de densidad infinita.

También, conviene definir el *coeficiente de reflexión de potencia*  $R_p$  y el *coeficiente de transmisión de potencia*  $T_p$  de la siguiente manera:

$$R_p = \frac{\langle P_3 \rangle}{\langle P_1 \rangle} = \frac{A_3^2}{A_1^2} = \left[ \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right]^2 \quad (6.58)$$

$$T_p = \frac{\langle P_2 \rangle}{\langle P_1 \rangle} = \frac{\mu_2 v_2 A_2^2}{\mu_1 v_1 A_1^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (6.59)$$

Como los coeficientes definidos dependen sólo de las propiedades del medio y no de la frecuencia, las conclusiones anteriores son válidas para ondas de cualquier forma.

### 6.8.1. Ajuste de impedancias

Se acostumbra representar las propiedades de un medio de propagación por una cantidad llamada *impedancia característica*  $Z$  que para el caso de la cuerda se define como la razón entre la fuerza transversal y la velocidad transversal en cualquier sección obteniéndose que  $Z = \mu v = \sqrt{(\mu T)}$ .

Muchas veces, es muy importante optimizar la transmisión de potencia a través de una discontinuidad en el medio de propagación, haciendo que el coeficiente de transmisión de potencia alcance su valor máximo ( $= 1$ ). Cuando se logra esto, se dice que *las impedancias están ajustadas*. Para alcanzar este ajuste de impedancias se intercala entre los dos medios de propagación un tercer medio, cuyas dimensiones e impedancia se deben determinar.

Supongamos entonces, que intercalamos un segmento de cuerda de longitud  $l$  y de impedancia característica  $Z_3 = \mu_3 v_3$  entre dos cuerdas de impedancias  $Z_1 = \mu_1 v_1$  y  $Z_2 = \mu_2 v_2$  como se muestra en la Fig. 5. 10.

También supongamos que la fuente de ondas está en el extremo izquierdo, y que el extremo derecho absorbe perfectamente sin reflejar las ondas que se transmiten desde la izquierda de modo que en esa zona solo hay ondas que viajan hacia la derecha. Imponiendo las condiciones de borde en  $x = 0$  y en  $x = l$  escribimos

Figura 5.10:

$$\begin{aligned}\psi_1(0, t) + \hat{\psi}_3(0, t) &= \hat{\psi}_2(0, t) \\ \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} \Big|_{x=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1(l, t) + \hat{\psi}_3(l, t) &= \hat{\psi}_2(l, t) \\ \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} &= \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} \Big|_{x=l},\end{aligned}$$

Llamemos

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) \quad \text{y} \quad \hat{\psi}_2 = \hat{B}_1 \cos(\omega t + k_1 x)$$

a las ondas incidente y reflejada en la cuerda izquierda; sean

$$\hat{\psi}_3 = \hat{A}_3 \cos(\omega t - k_3 x) \quad \text{y} \quad \hat{\psi}_4 = \hat{B}_3 \cos(\omega t + k_3 x)$$

las ondas en el acoplamiento intermedio; y sea

$$\hat{\psi}_5 = \hat{A}_2 \cos(\omega t - k_2 x),$$

la onda en la cuerda derecha. Aplicando las condiciones de borde a estas funciones de onda obtenemos las relaciones entre las amplitudes

$$\begin{aligned}A_1 + \hat{B}_1 &= \hat{A}_3 + \hat{B}_3 \\ -ik_1 A_1 + ik_1 \hat{B}_1 &= -ik_3 \hat{A}_3 + ik_3 \hat{B}_3 \\ \hat{A}_3 e^{-ik_3 l} + \hat{B}_3 e^{ik_3 l} &= \hat{A}_2 \\ ik_3 (\hat{A}_3 e^{-ik_3 l} - \hat{B}_3 e^{ik_3 l}) &= ik_2 \hat{A}_2.\end{aligned}$$

Si reemplazamos

$$k_i = \frac{\omega}{v_i} = \frac{\omega}{\sqrt{T}} \sqrt{\mu_i} = \frac{\omega}{T} Z_i$$

resulta

$$\begin{aligned} 2A_1 &= \hat{A}_3 \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} + \hat{B}_3 \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1} \\ 2\hat{A}_3 e^{-ik_3 l} &= \hat{A}_2 \frac{Z_3 + Z_2}{Z_3} \\ 2\hat{B}_3 e^{ik_3 l} &= \hat{A}_2 \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3} . \end{aligned}$$

Reemplazando las dos últimas en  $2A_1$ , obtenemos

$$2A_1 = \frac{\hat{A}_2}{2Z_1 Z_3} \left[ (Z_3 + Z_2)(Z_1 + Z_3) e^{ik_3 l} + (Z_3 - Z_2)(Z_1 - Z_3) e^{-ik_3 l} \right] ,$$

y multiplicando por el complejo conjugado

$$\begin{aligned} 4A_1^2 &= \frac{\hat{A}_2 \hat{A}_2^*}{4(Z_1 Z_3)^2} \left[ (Z_3 + Z_2)^2 (Z_1 + Z_3)^2 + (Z_3 - Z_2)^2 (Z_1 - Z_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + (Z_3 + Z_2)(Z_1 + Z_3)(Z_3 - Z_2)(Z_1 - Z_3)(e^{i2k_3 l} + e^{-i2k_3 l}) \right] . \end{aligned}$$

El coeficiente de trasmisión de potencia, entonces será

$$\begin{aligned} T_p(l, Z_3) &= \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} \\ &= 16 \frac{Z_2}{Z_1} (Z_1 Z_3)^2 \left[ (Z_3 + Z_2)^2 (Z_1 + Z_3)^2 + (Z_3 - Z_2)^2 (Z_1 - Z_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(Z_3 + Z_2)(Z_1 + Z_3)(Z_3 - Z_2)(Z_1 - Z_3) \cos(2k_3 l) \right]^{-1} \end{aligned}$$

y cuyo máximo se obtiene para

$$\frac{\partial T_p}{\partial l} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T_p}{\partial Z_3} = 0 .$$

De la primera condición resulta

$$\text{sen}(2k_3 l) = 0, \quad \text{o sea,} \quad 2k_3 l = \pi$$

lo que significa

$$l = \frac{1}{4} \lambda_3 . \quad (6.60)$$

De la segunda condición se deduce que

$$Z_3 = \sqrt{Z_1 Z_2} , \quad (6.61)$$

o sea que la impedancia característica del acoplamiento es el medio armónico de las dos impedancias por ajustar. Con estos valores, el coeficiente de transmisión de potencia se hace igual a la unidad. El problema de ajuste de impedancias es de importancia en muchas aplicaciones tecnológicas (transmisión de señales, recubrimientos ópticos, etc).

## 6.9. APLICACIONES

A1. Una cuerda de largo  $l = 0,9$  m y densidad lineal  $\mu = 0,2$  kg/m tiene sus dos extremos fijos de modo que su tensión es  $\mathcal{T} = 80$  N. Si la cuerda oscila en su tercera armónica con una amplitud  $A = 0,4$  cm, calcular a) la frecuencia; b) el valor máximo de la velocidad transversal; c) la posición de los puntos que pueden alcanzar la velocidad máxima anterior.

La onda estacionaria para dos extremos fijos está representada por

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \operatorname{sen} k_n x$$

donde  $k_n = n\pi/l$  y  $\omega_n = (n\pi/l)v$ . Para la tercera armónica  $n = 3$ , luego:

a)

$$\omega_3 = \frac{3\pi}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\mu}} \quad \text{y}$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 33,3 \text{ Hz.}$$

b)

$$v_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_n A \cos(\omega_n t + \phi) \operatorname{sen} k_n x.$$

El valor máximo de  $v_\psi$  es la amplitud de esta velocidad transversal, o sea,

$$v_{\psi \text{Max}} = \omega_n A = 0,837 \text{ m/s.}$$

c) Este máximo se alcanza cada vez que  $\operatorname{sen} k_n x = \pm 1$ , o sea, para

$$k_n x = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Luego:

$$x = \frac{1}{k_3} (2m + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{l}{6} (2m + 1) = \frac{l}{6}, \frac{l}{2}, \frac{5l}{6}.$$

A2.- Una cuerda homogénea y uniforme tiene una densidad lineal  $\mu$ , está sometida a una tensión  $\mathcal{T}$  y tiene su extremo A fijo. El otro extremo es perfectamente absorbente por lo que no hay reflexión. En una sección B a una distancia  $L$  del extremo A de la cuerda, se le aplica una fuerza transversal  $F_0 \exp(i\omega t)$ . Encontrar las funciones de onda a ambos lados de la sección B.

La función de onda a la izquierda de B,  $\hat{\psi}_i$ , será la superposición de una onda que se propaga hacia la izquierda,  $\hat{\psi}_1$ , y de una onda reflejada en A que se propaga hacia la derecha,  $\hat{\psi}_2$ . Eligiendo el origen en A, escribimos

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_i &= \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_i &= \hat{A}_1 e^{i(\omega t + kx)} + \hat{A}_2 e^{i(\omega t - kx)}.\end{aligned}$$

A la derecha de B, solo hay una onda,  $\hat{\psi}_d$ , que se propaga hacia la derecha

$$\hat{\psi}_d = \hat{A}_3 e^{i(\omega t - k(x-l))}.$$

Se deben satisfacer las siguientes condiciones de borde:

1. en  $x = 0$

$$\hat{\psi}_i = 0 \quad \text{ya que A no se mueve}$$

2. en  $x = l$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_i &= \hat{\psi}_d \\ -\mathcal{T} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x} + \mathcal{T} \frac{\partial \hat{\psi}_d}{\partial x} + F_0 e^{i\omega t} &= 0\end{aligned}$$

De la condición de borde en  $x = 0$  resulta

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 0,$$

por lo que podemos escribir

$$\hat{\psi}_i = 2i\hat{A}_1 e^{i\omega t} \text{sen } kx.$$

De la continuidad de la función en  $x = l$  resulta

$$\hat{A}_3 = 2i\hat{A}_1 \text{sen } kl,$$

luego,

$$\hat{\psi}_d = 2i\hat{A}_1 \text{sen } kl e^{i(\omega t - k(x-l))}.$$

La última condición de borde en  $x = l$  nos da

$$\hat{A}_1 = -i \frac{F_0}{2k\mathcal{T}} e^{-ikl}.$$

Luego, las funciones de onda solicitadas son

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_i &= \frac{F_0}{k\mathcal{T}} e^{-ikl} e^{i\omega t} \operatorname{sen} kx && \text{onda estacionaria} \\ \hat{\psi}_d &= \frac{F_0}{k\mathcal{T}} e^{-ikl} \operatorname{sen} kl e^{i(\omega t - k(x-l))} && \text{onda viajera}\end{aligned}$$

A3. Una partícula de masa  $M$  se fija a una cuerda uniforme, cuya densidad lineal  $\mu$  es constante y que está sometida a una tensión  $\mathcal{T}$ . Desde la izquierda incide sobre la partícula una onda  $\hat{\psi}_1 = A_1 \exp(i(\omega t - kx))$ . En la posición de la partícula—donde se elige  $x = 0$ — se produce transmisión y reflexión. Además se supone que en el segmento derecho de la cuerda solo existe una onda que se propaga en ese sentido, pues dicho extremo es un absorbente perfecto. a) Encontrar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. b) A continuación suponga que  $(M\omega^2)/(2k\mathcal{T}) = \operatorname{tg} \vartheta$  y demuestre que respecto de la amplitud de la onda incidente, la de la onda transmitida retrasa en  $\vartheta$  y la amplitud de la onda reflejada retrasa en  $\pi/2 + \vartheta$  para  $0 < \vartheta < \pi/2$ . Demuestre además que el coeficiente de transmisión de potencia es  $\operatorname{sen}^2 \vartheta$  y el coeficiente de reflexión de potencia es  $\operatorname{cos}^2 \vartheta$ .

La onda a la izquierda de la partícula tendrá dos componentes que representan la onda incidente  $\hat{\psi}_1$  y la onda reflejada  $\hat{\psi}_3$ . La onda en el lado derecho corresponderá a la onda transmitida  $\hat{\psi}_2$ . Las formas respectivas serán las siguientes

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1 &= A_1 e^{i(\omega t - kx)} && \text{onda incidente,} \\ \hat{\psi}_3 &= \hat{A}_3 e^{i(\omega t + kx)} && \text{onda reflejada} \\ \hat{\psi}_2 &= \hat{A}_2 e^{i(\omega t - kx)} && \text{onda transmitida}\end{aligned}$$

Las condiciones de borde en  $x = 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_3 &= \hat{\psi}_2 && \text{continuidad de la función de onda} \\ \mathcal{T} \left( -\frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x} \right) + \mathcal{T} \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial x} &= M \frac{\partial^2 \hat{\psi}_2}{\partial t^2} && \text{ecuación del movimiento de M}\end{aligned}$$

Las condiciones anteriores se traducen en las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}A_1 + \hat{A}_3 &= \hat{A}_2 \\ ik\mathcal{T}(A_1 - \hat{A}_3) &= \hat{A}_2(ik\mathcal{T} - M\omega^2)\end{aligned}$$

de donde despejamos

$$\begin{aligned}\hat{A}_2 &= A_1 \frac{1}{1 + i \frac{M\omega^2}{2kT}} \\ \hat{A}_3 &= A_1 \frac{-i \frac{M\omega^2}{2kT}}{1 + i \frac{M\omega^2}{2kT}}.\end{aligned}$$

Expresando un número complejo en forma exponencial

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} \quad \text{para } \operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}$$

encontramos los desfases indicados en el enunciado.